Exercice $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi uniforme sur $[a,b]$. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M_n = \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Min}}\ X_k$. Montrer que $(M_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la variable certaine égale à a.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons F_n la fonction de répartition de M_n.

M_n prend ses valeurs dans $[a,b]$ donc $\forall x \in]-\infty, a[,\ F_n(x) = 0$ et

$\forall x \in [b,+\infty[,\ F_n(x) = 1$.

Soit $x \in [a,b[$. $F_n(x) = P(M_n \leqslant x) = 1 - P(M_n > x) = 1 - P(\underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Min}} X_k > x)$.

$F_n(x) = 1 - P(\{X_1 > x\} \cap \dots \cap \{X_n > x\}) = 1 - P(X_1 > x) \cdots P(X_n > x)$.

$F_n(x) = 1 - (1 - P(X_1 \leqslant x)) \cdots (1 - P(X_n \leqslant x)) = 1 - \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)^n = 1 - \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^n$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, a[\\ 1 - \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^n & \text{si } x \in [a,b[\\ 1 & \text{si } x \in [b,+\infty[\end{cases}$$

$\forall x \in]-\infty, a[.\ \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$; $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 1$.

$\forall x \in]a,b[,\ \left|\frac{b-x}{b-a}\right| < 1$ donc $\forall x \in]a,b[,\ \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 1 - 0 = 1$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_n(a) = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} F_n(a) = 0$

Finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, a] \\ 1 & \text{si } x \in]a,+\infty[\end{cases}$

Posons $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = a$. X est la variable aléatoire certaine égale à a.

Notons F sa fonction de répartition.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, a[\\ 1 & \text{si } x \in [a,+\infty[\end{cases}$.

1) F est continue en tout point de $\mathbb{R}$ sauf en a.

2) $\forall x \in \mathbb{R} - \{a\}\ \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$

Alors $(M_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la variable certaine X égale à a.

Exercice $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi uniforme sur $[a,b]$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Max}}\ X_k$.

Q1. Montrer que la suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine b.

Q2. Et $\big(\underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Min}}\ X_k\big)_{n\geqslant 1}$?

Q1 Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $P(|M_n - b| \geqslant \varepsilon) = P(\{M_n - b \geqslant \varepsilon\} \cup \{M_n - b \leqslant -\varepsilon\})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|M_n-b|\geqslant \varepsilon) = P(M_n - b \geqslant \varepsilon) + P(M_n - b \leqslant -\varepsilon)$ par incompatibilité.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(|M_n-b|\geqslant\varepsilon) = P(M_n \geqslant b+\varepsilon) + P(M_n \leqslant b-\varepsilon) = P(M_n \leqslant b-\varepsilon)$ car M_n prend ses valeurs dans $[a,b]$.

1er cas... $b-\varepsilon < a$. Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(|M_n-b|\geqslant\varepsilon) = P(M_n\leqslant b-\varepsilon) = 0$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|M_n-b|\geqslant\varepsilon) = 0$.

2ème cas... $b-\varepsilon \geqslant a$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(|M_n-b|\geqslant\varepsilon) = P(M_n\leqslant b-\varepsilon) = P(\{X_1\leqslant b-\varepsilon\}\cap\dots\cap\{X_n\leqslant b-\varepsilon\})$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(|M_n-b|\geqslant\varepsilon) = P(X_1\leqslant b-\varepsilon)\cdots P(X_n\leqslant b-\varepsilon)$ par indépendance.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $P(|M_n-b|\geqslant\varepsilon) = P(X_1\leqslant b-\varepsilon)\cdots P(X_n\leqslant b-\varepsilon) \underset{b-\varepsilon\in[a,b]}{=} \left(\dfrac{b-\varepsilon-a}{b-a}\right)^n$

Or $\left|\dfrac{b-\varepsilon-a}{b-a}\right| = \dfrac{b-a-\varepsilon}{b-a} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|M_n-b|\geqslant\varepsilon)=0$.

Finalement $(M_n)_{n\geqslant1}$ converge en probabilité vers la variable certaine b.

Q2 Posons $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $m_n = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} X_k$. Montrons que $(m_n)_{n\geqslant1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à a.

V1 On utilise des arguments analogues à ceux de Q1

V2 On utilise Q1... en remarquant que $m_n = -\text{Max}(-X_1,-X_2,\dots,-X_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $-X_k \hookrightarrow \mathcal{U}([-b,-a])$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et $(-X_n)_{n\geqslant1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes. Alors $(-m_n)_{n\geqslant1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $-a$ donc $(m_n)_{n\geqslant1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à a...

Exercice **Convergence en probabilité. Loi faible des grands nombres.** F1$^+$

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre p.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ et $Y_n = e^{F_n}$.

Q1. a) n est dans $\mathbb{N}^*$. Calculer $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.

b) Montrer que $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à e^p.

Q2. Retrouver ce résultat en deux lignes avec le cours.

Q1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

a) $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre p.

Alors $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Soit $r \in \mathbb{N}$. $Y_n = e^{F_n} = e^{\frac{S_n}{n}}$. Y_n est une variable aléatoire finie, donc Y_n possède un moment d'ordre r qui vaut : $\sum_{\ell=0}^{n} e^{\frac{r\ell}{n}} P(S_n = \ell)$. (théorème de transfert... $Y_n^r = e^{r\frac{S_n}{n}}$).

$E(Y_n^r) = \sum_{\ell=0}^{n} e^{\frac{r\ell}{n}} \binom{n}{\ell} p^\ell q^{n-\ell}$ avec $q = 1-p$.

$E(Y_n^r) = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \left(e^{\frac{r}{n}} p\right)^\ell q^{n-\ell} = \left(e^{r/n} p + q\right)^n$.

$\forall r \in \mathbb{N},\ E(Y_n^r) = \left(e^{\frac{r}{n}} p + q\right)^n$.

Ainsi $E(Y_n) = \left(e^{\frac{1}{n}} p + q\right)^n$.

$V(Y_n) = \left(e^{\frac{2}{n}} p + q\right)^n - \left(e^{\frac{1}{n}} p + q\right)^{2n}$.

b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Y_n possède un moment d'ordre 2 donc $Y_n - e^p$ possède un moment d'ordre 2, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Appliquons l'inégalité de Markov.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(|Y_n - e^p| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{E((Y_n - e^p)^2)}{\varepsilon^2} = \dfrac{V(Y_n - e^p) + (E(Y_n - e^p))^2}{\varepsilon^2} = \dfrac{V(Y_n) + (E(Y_n) - e^p)^2}{\varepsilon^2}$.

$\left\{\begin{array}{l} V(Y_n - e^p) = V(Y_n) \\ E(Y_n - e^p) = E(Y_n) - e^p \end{array}\right.$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant P(|Y_n - e^p| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V(Y_n) + (E(Y_n) - e^p)^2}{\varepsilon^2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(Y_n) = \left(e^{\frac{1}{n}} p + q\right)^n = e^{n \ln\left(e^{\frac{1}{n}} p + q\right)}$.

On $\lim_{n \to +\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} p + q\right) = p + q = 1$. Ainsi $n \ln\left(e^{\frac{1}{n}} p + q\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} n\left(e^{\frac{1}{n}} p + q - 1\right) = n p \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$.

$n\ln(e^{\frac{1}{n}}p+q) \underset{n\to+\infty}{\sim} np(e^{\frac{1}{n}}-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} np\times\frac{1}{n} = p$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\ln(e^{1/n}p+q)) = p$ et $t\mapsto e^t$ est continue en p. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln(e^{\frac{1}{n}}p+q)} = e^p$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} E(Y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln(e^{\frac{1}{n}}p+q)} = e^p$. $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} E(Y_n) = e^p}}$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $(e^{\frac{2}{n}}p+q)^n = e^{n\ln(e^{\frac{2}{n}}p+q)}$ on aurait pu faire qu'un cas en traitant $(e^{\frac{t}{n}}p+q)^n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(e^{\frac{2}{n}}p+q) = p+q=1$. Alors $n\ln(e^{\frac{2}{n}}p+q) \underset{n\to+\infty}{\sim} n(e^{\frac{2}{n}}p+q-1) = np(e^{\frac{2}{n}}-1)$

$n\ln(e^{\frac{2}{n}}p+q) \underset{n\to+\infty}{\sim} np(e^{\frac{2}{n}}-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} np\times\frac{2}{n} = 2p$... car $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n}=0$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\ln(e^{\frac{2}{n}}p+q)) = 2p$ et $t\mapsto e^t$ est continue en $2p$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln(e^{\frac{2}{n}}p+q)} = e^{2p}$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}(e^{\frac{2}{n}}p+q)^n = e^{2p}$. Alors $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} E(Y_n^2) = e^{2p}}}$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V(Y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(E(Y_n^2)-(E(Y_n))^2\right) = e^{2p}-(e^p)^2 = 0$. $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} V(Y_n) = 0}}$

Rappelons que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq P(|Y_n-e^p|\geq\varepsilon) \leq \dfrac{V(Y_n)+(E(Y_n)-e^p)^2}{\varepsilon^2}$.

Remarquons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{V(Y_n)+(E(Y_n)-e^p)^2}{\varepsilon^2} = 0$.

Alors par encadrement on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|Y_n-e^p|\geq\varepsilon) = 0$ et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

Alors $\underline{\underline{(Y_n)_{n\geq 1} \text{ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à } e^p}}$.

Q2
- $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires (mutuellement) indépendantes.
- Toutes les variables de cette suite possèdent une espérance commune égale à p et une variance commune égale à pq.

La loi faible des grands nombres montre que la suite $\left(\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire constante égale à p.

Or $x \mapsto e^x$ est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Le cours montre alors que $\left(e^{\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}}\right)_{n\geq 1}$ converge vers la variable aléatoire constante égale à e^p.

Ainsi $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge vers la variable aléatoire constante égale à e^p.

Exercice **Convergence en loi et en probabilité.** **F1$^+$**

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ayant même loi et mutuellement indépendantes. F est la fonction de répartition des variables de cette suite.

On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty}(x(1-F(x))=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(xF(-x))=0$.

On pose pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$: $M_n = \dfrac{1}{n}\ \mathrm{Sup}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $m_n = \dfrac{1}{n}\ \mathrm{Inf}(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Montrer que $(M_n)_{n\geqslant 1}$ (resp.$(m_n)_{n\geqslant 1}$) converge en loi et en probabilité vers la variable aléatoire certaine nulle.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$P(M_n \leqslant x) = P(\mathrm{Sup}(X_1, X_2, \dots, X_n) \leqslant nx) = P(\{X_1 \leqslant nx\} \cap \{X_2 \leqslant nx\} \cap \dots \cap \{X_n \leqslant nx\})$.

Par indépendance il vient $P(M_n \leqslant x) = P(X_1 \leqslant nx)\, P(X_2 \leqslant nx) \cdots P(X_n \leqslant nx) = (F(nx))^n$.

$P(m_n \leqslant x) = P(\mathrm{Inf}(X_1, X_2, \dots, X_n) \leqslant nx) = 1 - P(\mathrm{Inf}(X_1, X_2, \dots, X_n) > nx)$

$P(m_n \leqslant x) = 1 - P(\{X_1 > nx\} \cap \{X_2 > nx\} \cap \dots \cap \{X_n > nx\}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indépendance}}}{=} 1 - P(X_1 > nx)\, P(X_2 > nx) \cdots P(X_n > nx)$.

$P(m_n \leqslant x) = 1 - (1 - P(X_1 \leqslant nx))(1 - P(X_2 \leqslant nx)) \cdots (1 - P(X_n \leqslant nx)) = 1 - (1 - F(nx))^n$.

Notons, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, F_{M_n} la fonction de répartition de M_n et F_{m_n} celle de m_n.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ F_{M_n}(x) = (F(nx))^n$ et $F_{m_n}(x) = 1 - (1 - F(nx))^n$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1er cas. $x < 0$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} F(nx) \overset{\left\{\substack{\lim_{y\to-\infty} F(y)=0 \\ x<0}\right.}{=} 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [\![n_0, +\infty[\![,\ 0 \leqslant F(nx) \leqslant \frac{1}{2}$.

Alors $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![,\ 0 \leqslant F_{M_n}(x) = (F(nx))^n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Par encadrement on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{M_n}(x) = 0$.

2ème cas. $x > 0$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty}(F(nx)) = 1$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [\![n_0, +\infty[\![,\ 0 < F(nx)$!

Alors $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![,\ F_{M_n}(x) = e^{n\ln(F(nx))}$.

$n\ln(F(nx)) \underset{n\to+\infty}{\sim} n(F(nx) - 1) = -\frac{1}{x}\left(nx(1 - F(nx))\right)$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} F(nx) = 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\ln(F(nx))) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\left(nx(1 - F(nx))\right)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \lim\limits_{y\to+\infty}(y(1-F(y)))=0}}{=} -\frac{1}{x} \times 0 = 0$.

Comme $t \mapsto e^t$ est continue en 0 : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{M_n}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln F(nx)} = e^0 = 1$.

Finalement $\forall x \in]-\infty, 0[,\ \lim\limits_{n\to+\infty} F_{M_n}(x) = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[,\ \lim\limits_{n\to+\infty} F_{M_n}(x) = 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1er cas. $x<0$. $\lim_{n\mapsto+\infty} F(nx)=0$. $\lim_{n\mapsto+\infty}(1-F(nx))=1$.

Alors $\exists n_0\in\mathbb{N}^*$, $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $1-F(nx)>0$.

$\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $F_{m_n}(x)=1-(1-F(nx))^n=1-e^{n\ln(1-F(nx))}$.

$\lim_{n\mapsto+\infty}F(nx)=0$ donc $n\ln(1-F(nx)) \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} n(-F(nx))=\frac{1}{x}(-nx)F(-(-nx))$.

$\lim_{n\mapsto+\infty}\left(n\ln(1-F(nx))\right)=\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{x}(-nx)F(-(-nx))\right)=\frac{1}{x}\times 0=0$.

$\lim_{y\mapsto+\infty} yF(-y)=0$ et $\lim_{n\mapsto+\infty}(-nx)\underset{x<0}{=}+\infty$

comme $t\mapsto e^t$ est continue en 0 : $\lim_{n\mapsto+\infty}e^{n\ln(1-F(nx))}=e^0=1$.

Alors $\lim_{n\mapsto+\infty}F_{m_n}(x)=\lim_{n\mapsto+\infty}\left(1-e^{n\ln(1-F(nx))}\right)=1-1=0$. $\lim_{n\to+\infty}F_{m_n}(x)=0$.

F prend ses valeurs dans $[0,1]$.

2ème cas. $x>0$ $\lim_{n\mapsto+\infty}(1-F(nx))=1-1=0$. $\exists n_0\in\mathbb{N}^*$, $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $0\leq 1-F(nx)\leq\frac{1}{2}$.

Alors $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $0\leq(1-F(nx))^n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$.

Par encadrement il vient : $\lim_{n\mapsto+\infty}(1-F(nx))^n=0$. Ainsi $\lim_{n\mapsto+\infty}F_{m_n}(x)=\lim_{n\mapsto+\infty}\left(1-(1-F(nx))^n\right)=1-0=1$.

$\lim_{n\mapsto+\infty}F_{m_n}(x)=1$

$\forall x\in]-\infty,0[$, $\lim_{n\mapsto+\infty}F_{m_n}(x)=0$ et $\forall x\in]0,+\infty[$, $\lim_{n\mapsto+\infty}F_{m_n}(x)=1$.

Notons G la fonction de répartition de la variable aléatoire constante égale à 0.

$\forall x\in]-\infty,0[$, $G(x)=0$ et $\forall x\in[0,+\infty[$, $G(x)=1$.

Ainsi 1) Si $x\in\mathbb{R}$, G est continue en x si et seulement si $x\neq 0$.

2) $\forall x\in]-\infty,0[$, $\lim_{n\mapsto+\infty}F_{n_n}(x)=\lim_{n\mapsto+\infty}F_{m_n}(x)=0=G(x)$.

3) $\forall x\in]0,+\infty[$, $\lim_{n\mapsto+\infty}F_{n_n}(x)=\lim_{n\mapsto+\infty}F_{m_n}(x)=1=G(x)$.

Les trois points précédents montrent que les suites $(n_n)_{n\geq1}$ et $(m_n)_{n\geq1}$ converge en loi vers la variable aléatoire certaine nulle.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $P(|M_n - 0| \geq \varepsilon) = P(M_n \leq -\varepsilon) + P(M_n \geq \varepsilon) = P(M_n \leq -\varepsilon) + 1 - P(M_n < \varepsilon)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} P(M_n \leq -\varepsilon) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_{M_n}(-\varepsilon) = 0$ ... car $-\varepsilon < 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(M_n \leq \frac{\varepsilon}{2}) \leq P(M_n < \varepsilon) \leq 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(M_n \leq \frac{\varepsilon}{2}) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_{M_n}(\frac{\varepsilon}{2}) = 1$.

croissance... $\{M_n \leq \frac{\varepsilon}{2}\} \subset \{M_n < \varepsilon\}$

Alors par encadrement il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} P(M_n < \varepsilon) = 1$.

⚠ On aurait pu noter que $P(M_n < \varepsilon) = P(M_n \leq \varepsilon)$ en notant que M_n est à densité...

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|M_n - 0| \geq \varepsilon) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(P(M_n \leq -\varepsilon) + 1 - P(M_n < \varepsilon)\right) = 0 + 1 - 1 = 0$.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|M_n - 0| \geq \varepsilon) = 0$. <u>$(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine nulle.</u>

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $P(|m_n - 0| \geq \varepsilon) = P(m_n \leq -\varepsilon) + P(m_n \geq \varepsilon) = P(m_n \leq -\varepsilon) + 1 - P(m_n < \varepsilon)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} P(m_n \leq -\varepsilon) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_{m_n}(-\varepsilon) = 0$ car $-\varepsilon < 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(m_n \leq \frac{\varepsilon}{2}) \leq P(m_n < \varepsilon) \leq 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(m_n \leq \frac{\varepsilon}{2}) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_{m_n}(\frac{\varepsilon}{2}) = 1$ car $\frac{\varepsilon}{2} > 0$.

Alors par encadrement il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} P(m_n < \varepsilon) = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - P(m_n < \varepsilon)) = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|m_n - 0| \geq \varepsilon) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(P(m_n \leq -\varepsilon) + 1 - P(m_n < \varepsilon)\right) = 0$.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|m_n - 0| \geq \varepsilon) = 0$. <u>$(m_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine nulle.</u>

<u>Remarque.</u> – $\lim\limits_{x\to+\infty} (x(1 - F(x))) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x F(-x)) = 0$) ne sert que pour traiter la convergence en probabilité | en loi de $(M_n)_{n\geq 1}$ (resp. $(m_n)_{n\geq 1}$).

Exercice Q1. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $f_n : t \to \dfrac{1}{\pi}\,\dfrac{n}{1+n^2\,t^2}$ est une densité de probabilité.

Q2. Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, X_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f_n.

Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire certaine nulle.

Q1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

→ f_n est continue et positive sur $\mathbb{R}$.

→ Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $\displaystyle\int_0^x f_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{n}{1+n^2t^2}\,dt$. La fonction $t \mapsto nt$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Ceci autorise le changement de variable $u = nt$ dans ce qui suit.

$$\int_0^x f_n(t)\,dt \underset{u=nt}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{nx} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\pi}\Big[\arctan u\Big]_0^{nx} = \frac{1}{\pi}\arctan nx \qquad (*)$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\arctan nx\right) = \frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{2}$. Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ existe et vaut $1/2$.

f_n étant paire sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f_n(t)\,dt$ existe et vaut $1/2$.

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt$ existe et vaut 1.

Ceci achève de montrer que <u>f_n est une densité de probabilité.</u>

Q2 Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle P(|X_n - 0| \geqslant \varepsilon) = 1 - P(|X_n| < \varepsilon) = 1 - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_n(t)\,dt$.

$$P(|X_n - 0| \geqslant \varepsilon) \underset{f_n \text{ est paire}}{=} 1 - 2\int_0^{\varepsilon} f_n(t)\,dt \underset{(*)}{=} 1 - 2\times\frac{1}{\pi}\arctan(n\varepsilon).$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 - 2\times\frac{1}{\pi}\arctan(n\varepsilon)\right) \underset{\varepsilon>0}{=} 1 - 2\times\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{2} = 1-1 = 0.$$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - 0| \geqslant \varepsilon) = 0$.

<u>$(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire certaine nulle.</u>

EXERCICE F1

J.F.C.

Question 9 HEC 2006 F1 *élève*

On considéres deux suites $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$ X_n et Y_n suivent la loi exponentielle de paramètre λ. On suppose que X_1, X_2, ..., X_n, ..., Y_1, Y_2, ..., Y_n, ... sont mutuellement indépendantes.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, N_n est la variable alétoire égale au nombre d'indices i de $[\![1,n]\!]$ tels que lévénement $\{X_i \leqslant Y_i\}$ se réalise.

Montrer que la suite te terme général $\dfrac{N_n}{n}$ converge en probabilité vers $\dfrac{1}{2}$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $B_i = \mathbb{1}_{\{X_i \leq Y_i\}}$.

$(B_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de vaa
→ indépendantes
→ ayant même loi
→ possédant une espérance et une variance.

La loi faible des grands nombres montre que $\dfrac{N_n}{n} = \dfrac{B_1+B_2+\cdots+B_n}{n}$ converge en probabilité vers $E(B_1) = P(X_1 \leq Y_1)$.

$Y_1 - X_1$ est une var à d (th de convolution).

$P(Y_1 - X_1 = 0) = 0$. $Y_1 - X_1$ et $X_1 - Y_1$ ont même loi.

Alors $1 = P(X_1 - Y_1 > 0) + P(X_1 - Y_1 = 0) + P(X_1 - Y_1 < 0) = 2P(X_1 - Y_1 < 0) = 2P(X_1 - Y_1 \leq 0)$.

$P(X_1 - Y_1 \leq 0) = \frac{1}{2}$; $P(X_1 \leq Y_1) = \frac{1}{2}$.

Alors $\left(\dfrac{N_n}{n}\right)$ converge en probabilité vers $\frac{1}{2}$.

R

R..

EXERCICE F1

Question 6 HEC 2008 S6 **F1**

Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit θ un réel strictement positif et pour tout n dans $\mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $n\,\theta$.

Q1. Montrer que la suite de terme général $\dfrac{X_n - n\,\theta}{n}$ converge en probabilité vers 0.

Q2. En désuire que pour x réel distinct de θ l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e^{-n\theta}\sum\limits_{k\leqslant n\,x}\dfrac{(n\,\theta)^k}{k!}\right)$.

Remarque : dans le texte initial il y avait un λ réel strictement positif à la place de n et on faisait tendre λ vers $+\infty$!!

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Q1 Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $T_n = \dfrac{X_n - n\theta}{n}$.

X_n possède une espérance et une variance qui valent $n\theta$.

Alors T_n possède une espérance et une variance. $E(T_n) = \frac{1}{n}\left(E(X_n) - n\theta\right) = 0$ et

$V(T_n) = \frac{1}{n^2}V(X_n) = \dfrac{\theta}{n}$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$0 \leq P(|T_n - 0| \geqslant \varepsilon) = P(|T_n - E(T_n)| \geqslant \varepsilon) \leq \dfrac{V(T_n)}{\varepsilon^2} = \dfrac{\theta}{n\varepsilon^2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\theta}{n\varepsilon^2} = 0$.

Par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(P(|T_n - 0| \geqslant \varepsilon)\right) = 0$ et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi $\left(\dfrac{X_n - n\theta}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine nulle.

Q2 Soit x un élément de $\mathbb{R} - \{\theta\}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u_n = e^{-n\theta}\sum\limits_{k\leqslant nx}\dfrac{(n\theta)^k}{k!}$.

$u_n = \sum\limits_{k=0}^{E(nx)} P(X_n = k) = P(X_n \leqslant nx) = P\left(\dfrac{X_n - n\theta}{n} \leqslant x - \theta\right)$.

1er cas.. $x - \theta < 0$. Alors $\left\{\dfrac{X_n - n\theta}{n} \leqslant x - \theta\right\} \subset \left\{\left|\dfrac{X_n - n\theta}{n}\right| \geqslant \theta - x\right\}$.

Alors $0 \leq u_n \leq P\left(\left|\dfrac{X_n - n\theta}{n}\right| \geqslant \theta - x\right)$. Par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

2ème cas.. $x - \theta > 0$ $\left\{\dfrac{X_n - n\theta}{n} > x - \theta\right\} \subset \left\{\dfrac{X_n - n\theta}{n} \geqslant x - \theta\right\} \subset \left\{\left|\dfrac{X_n - n\theta}{n}\right| \geqslant x - \theta\right\}$.

$0 \leq P\left(\dfrac{X_n - n\theta}{n} > x - \theta\right) = 1 - u_n \leq P\left(\left|\dfrac{X_n - n\theta}{n}\right| \geqslant x - \theta\right)$.

Par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e^{-n\theta}\sum\limits_{k\leqslant nx}\dfrac{(n\theta)^k}{k!}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > \theta \\ 0 \text{ si } x < \theta\end{cases}$

exercice.. Relier que cela dans la convergence en loi de $\left(\frac{X_n}{n}\right)$ vers θ.

R

Question 4 HEC 2009-4

Pour n entier naturel non nul, soit X_n une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de loi binomiale de paramètres n et p avec $p \in]0,1[$.

Q1. Montrer que pour $a > 0$ fixé, $P([X_n \leqslant a])$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Q2. Montrer que si $b > 0$,

$$P\left(\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > b\right]\right) \leqslant \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n}\operatorname{Min}(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n})$$

Qu'en déduit-on pour $P([|X_n - np| \leqslant nb])$ quand n tend vers $+\infty$?

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Q1 soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $n_0 = \text{Ent}(a)$. $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $P(X_n \leq a) = \sum_{\ell=0}^{n_0} P(X_n = \ell) = \sum_{\ell=0}^{n_0} \binom{n}{\ell} p^\ell (1-p)^{n-\ell}$

$\forall \ell \in [\![0, n_0]\!]$, $\binom{n}{\ell} p^\ell (1-p)^{n-\ell} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^\ell}{\ell!} p^\ell (1-p)^{n-\ell} = \frac{p^\ell}{\ell!(1-p)^\ell}\left(n^\ell (1-p)^n\right)$.

$|1-p|<1$ donc par croissance comparée : $\lim_{n\to+\infty} (n^\ell (1-p)^n) = 0$ pour tout $\ell \in [\![0, n_0]\!]$

Alors $\forall \ell \in [\![0, n_0]\!]$, $\lim_{n\to+\infty} \binom{n}{\ell} p^\ell (1-p)^{n-\ell} = 0$ donc $\underline{\lim_{n\to+\infty} P(X_n \leq a) = 0}$.

Q2 soit $b \in \mathbb{R}_+^*$. 1er cas $b\sqrt{n} \leq \sqrt{p(1-p)}$.

Alors $1 \leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n} b\sqrt{n} = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n} \operatorname{Min}(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n})$

Ainsi $P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > b\right) \leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n} \operatorname{Min}(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n})$.

2ème cas. $b\sqrt{n} > \sqrt{p(1-p)}$. Alors $\frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n} \operatorname{Min}(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n}) = \frac{p(1-p)}{b^2 n}$.

$V\left(\frac{X_n}{n}\right)$ existe et vaut $\frac{1}{n^2} V(X_n)$ ou $\frac{p(1-p)}{n}$. $E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{np}{n} = p$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > b\right) = P\left(\left|\frac{X_n}{n} - E\left(\frac{X_n}{n}\right)\right| > b\right) \leq \frac{V\left(\frac{X_n}{n}\right)}{b^2} = \frac{p(1-p)}{n\, b^2} = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n} \operatorname{Min}(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n})$.

Dans les deux cas : $\underline{0 \leq P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > b\right) \leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n} \operatorname{Min}(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n})}$.

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n} \times \operatorname{Min}(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n})\right) = 0 \times \sqrt{p(1-p)} = 0$.

Par encadrement $\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > b\right) = 0$; $\underline{\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - np| > nb) = 0}$

R...

EXERCICE F1 9S9

Question 2 HEC 2011 S 1152 F1

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ i.i.d..

On suppose que, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, la variable alétoire X_k suit une loi uniforme sur le segment $[0,1]$.

On pose $Y_n = \text{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Étudier la convergence de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Cours *Théorème de d'Alembert-Gauss* ↑ ?!

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Notons F_{Y_n} la fonction de répartition de Y_n.

Y_n prend ses valeurs dans $[0,1]$. Ainsi $\forall x\in]-\infty,0[$, $F_{Y_n}(x)=0$ et

$\forall x\in[1,+\infty[$, $F_{Y_n}(x)=1$.

Soit $x\in[0,1[$, $F_{Y_n}(x)=P(Y_n\leq x)=P(\text{Max}(X_1,X_2,\ldots,X_n)\leq x)$.

$F_{Y_n}(x)=P(\{X_1\leq x\}\cap\{X_2\leq x\}\cap\ldots\cap\{X_n\leq x\}) = P(X_1\leq x)P(X_2\leq x)\ldots P(X_n\leq x)$.

↑ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes

Or $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $P(X_k\leq x)=x$ car $x\in[0,1[$ et X_k suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

Donc $F_{Y_n}(x)=x^n$.

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F_{Y_n}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in]-\infty,0[\\ x^n & \text{si } x\in[0,1[\\ 1 & \text{si } x\in[1,+\infty[\end{cases}$$ et ceci pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\text{Alors } \forall x\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty}F_{Y_n}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in]-\infty,0[\\ 0 & \text{si } x\in[0,1[\\ 1 & \text{si } x\in[1,+\infty[\end{cases}$$

$$\text{Donc } \forall x\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty}F_{Y_n}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in]-\infty,1[\\ 1 & \text{si } x\in[1,+\infty[\end{cases}.$$

Soit Y la variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ constante égale à 1. Soit F_Y sa fonction répartition. $\forall x\in\mathbb{R}$, $F_Y(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in]-\infty,1[\\ 1 & \text{si } x\in[1,+\infty[\end{cases}$.

Si $x\in\mathbb{R}$, F_Y est continue en x si et seulement si $x\neq1$.

De plus $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}F_{Y_n}(x)=F_Y(x)$.

Alors <u>$(Y_n)_{n\geq1}$ converge en loi vers Y c'est à dire vers la variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ constante et égale à 1.</u>

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|Y_n - 1| \geq \varepsilon) = P(\{Y_n - 1 \geq \varepsilon\} \cup \{Y_n - 1 \leq -\varepsilon\}) = P(Y_n - 1 \geq \varepsilon) + P(Y_n - 1 \leq -\varepsilon)$.

Incompatibilité.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|Y_n - 1| \geq \varepsilon) = P(Y_n \geq 1+\varepsilon) + P(Y_n \leq 1-\varepsilon) = 0 + P(Y_n \leq 1-\varepsilon) = P(Y_n \leq 1-\varepsilon)$.

Y_n prend ses valeurs dans $[0,1]$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(|Y_n - 1| \geq \varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1-\varepsilon < 0 \\ (1-\varepsilon)^n & \text{si } 1-\varepsilon \geq 0 \quad (\text{dans ce cas } 1-\varepsilon \in [0,1[) \end{cases}$$

Si $1-\varepsilon < 0$: $\lim_{n \to +\infty} P(|Y_n - 1| \geq \varepsilon) = 0$

Si $1-\varepsilon \geq 0$: $\lim_{n \to +\infty} P(|Y_n - 1| \geq \varepsilon) = \lim_{n \to +\infty} (1-\varepsilon)^n = 0$ ($1-\varepsilon \in [0,1[$)

Donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n \to +\infty} P(|Y_n - 1| \geq \varepsilon) = 0$. $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 1.

Remarque.. On aurait dû commencer par le second point car la convergence en probabilité donne la convergence en loi !

Notons que lorsque la limite est une variable certaine il y a équivalence entre les deux convergences.

Cela étant je tenais à prouver les deux convergences !

R.

EXERCICE 1 F1

Question 6 HEC 2011 C. DAUDET ⚠ utilise la loi gamma à deux paramètres.

Soit n un entier naturel non nul.

Q1. Trouver un réel C_n pour que la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) = \begin{cases} C_n\, e^{-4nt}\, t^{n-1} & \text{si } t \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ soit une densité de probabilité.

Q2. $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 4.

Trouver, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la loi de $Z_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité.

Question de cours : Définition d'une forme linéaire. Noyau et image d'une forme linéaire.

Q1 Posons $\forall t \in \mathbb{R},\ g_n(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{t}{1/4n}}\, t^{n-1}}{(1/4n)^n\, \Gamma(n)} & \text{si } t \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

g_n est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi gamma de paramètres $\frac{1}{4n}$ et n.

Notons que $f_n = \dfrac{C_n \Gamma(n)}{(4n)^n}\, g_n$. Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,dt$ existe et vaut 1.

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt$ existe et vaut $\dfrac{C_n \Gamma(n)}{(4n)^n}$.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt = 1 \iff C_n = \dfrac{(4n)^n}{\Gamma(n)}$.

* Donc si f_n est une densité de probabilité : $C_n = \dfrac{(4n)^n}{\Gamma(n)}$.

* Réciproquement supposons que $C_n = \dfrac{(4n)^n}{\Gamma(n)}$.

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt$ existe et vaut 1.

2) $C_n > 0$. Ainsi $\forall t \in]-\infty, 0[,\ f_n(t) = 0 \geqslant 0$ et

$\forall t \in [0,+\infty[,\ f_n(t) = C_n\, e^{-4nt}\, t^{n-1} \geqslant 0$.

Donc f_n est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

3) $\forall t \in]-\infty, 0[,\ f_n(t) = 0$ donc f_n est continue sur $]-\infty, 0[$.

$\forall t \in [0,+\infty[,\ f_n(t) = C_n\, e^{-4nt}\, t^{n-1}$ donc f_n est continue sur $[0,+\infty[$.

Alors f_n est au moins continue sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

ceci achève de montrer que f_n est une densité de probabilité.

<u>f_n est une densité de probabilité si et seulement si</u> $\underline{c_n = \frac{(4n)^n}{\Gamma(n)} = \frac{(4n)^n}{(n-1)!}}$.

(Q2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent la loi exponentielle de paramètre 4 donc la loi gamma de paramètres $\frac{1}{4}$ et 1.

Le cours indique que $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit la loi gamma de paramètres $\frac{1}{4}$ et n.

<u>Toujours d'après le cours $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$ suit la loi gamma de paramètres $\frac{1}{4n}$ et n.</u>

<u>Remarque</u> : Si $c_n = \frac{(4n)^n}{\Gamma(n)}$, $f_n = g_n$ donc f_n est une densité de Z_n.

1) $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

2) les variables aléatoires de cette suite ont même espérance $\frac{1}{4}$ et même variance $1/16$.

La loi faible des grands nombres montre alors que la suite $\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $\frac{1}{4}$.

<u>$(Z_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $\frac{1}{4}$.</u>

⚠ On peut traiter cet exercice sans utiliser la loi gamma à deux paramètres mais en faisant le changement de variable $u = 4nt$

EXERCICE F1

J.F.C.
2014

Exercice **Une condition suffisante pour avoir convergence en probabilité.** **F1**

Soit $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Q1. Un cas très particulier mais usuel.

On suppose que $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![,\ E(X_n - X) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V(X_n - X) = 0$.

Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers X.

Q2. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n - X) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V(X_n - X) = 0$.

Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers X.

Cette condition est suffisante mais n'est pas nécessaire. Voir plus bas.

Q1 Pour tout n dans $[\![n_0,+\infty[\![$, $X_n - X$ possède une variance. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne : $\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![,\ 0 \leqslant P(|X_n - X - \underbrace{E(X_n - X)}_{=0}| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V(X_n-X)}{\varepsilon^2}$.

Ce qui donne encore $\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![,\ 0 \leqslant P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V(X_n-X)}{\varepsilon^2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{V(X_n-X)}{\varepsilon^2} = 0$

Alors par encadrement on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = 0$ et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

$(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers X.

Q2 Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout n dans $[\![n_0,+\infty[\![$, $E((X_n-X)^2)$ existe.

Alors l'inégalité de Markov donne : $\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![,\ 0 \leqslant P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{E((X_n-X)^2)}{\varepsilon^2}$

Ainsi $\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![,\ 0 \leqslant P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V(X_n-X) + (E(X_n-X))^2}{\varepsilon^2}$.

Or par hypothèse $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{V(X_n-X) + (E(X_n-X))^2}{\varepsilon^2} = 0$. Donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = 0$

et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

$(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers X.

Exercice **Convergence en probabilité.** **F1**

Pour tout élement n de $\mathbb{N}^*$, X_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que :

$$X_n(\Omega) = \left\{\frac{1}{n}, n\right\}, p\left(X_n = \frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1} \text{ et } P(\{X_n = n\}) = \frac{1}{n+1}.$$

Q1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine X égale à 0.

Q2. Etudier $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n - X)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V(X_n - X)$.

Q1 Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $n_0 = \max\left(\text{Ent}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+1, \text{Ent}(\varepsilon)+1\right)$. $n_0 \in \mathbb{N}^*$.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $n \geqslant n_0 \geqslant \text{Ent}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+1 > \frac{1}{\varepsilon}$ et $n \geqslant n_0 \geqslant \text{Ent}(\varepsilon)+1 > \varepsilon$.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $n > \frac{1}{\varepsilon}$ et $n > \varepsilon$. $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $\frac{1}{n} < \varepsilon < n$.

Alors $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $P(|X_n - 0| \geqslant \varepsilon) = P(|X_n| \geqslant \varepsilon) = P(X_n \geqslant \varepsilon) = P(X_n = n) = \frac{1}{n+1}$.

$X_n(\Omega) = \{\frac{1}{n}, n\}$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n - 0| \geqslant \varepsilon) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

<u>$(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine X égale à 0.</u>

Q2 Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $X_n - X$ est une variable aléatoire réelle finie donc possède une espérance et une variance.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n - X) = E(X_n) = \frac{1}{n} \times \frac{n}{n+1} + n \times \frac{1}{n+1} = 1$. $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n - X) = 1$.

$V(X_n - X) = E((X_n - X)^2) - (E(X_n - X))^2 = E(X_n^2) - 1 = \frac{1}{n^2} \times \frac{n}{n+1} + n^2 \times \frac{1}{n+1} - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$V(X_n - X) = \frac{n^2}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} - 1$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n+1} = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} - 1\right) = -1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V(X_n - X) = +\infty$.

<u>Remarque</u>. $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n - X) = \lim\limits_{n\to+\infty} V(X_n - X) = 0$ n'est pas une condition nécessaire pour que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers X.

R. EXERCICE F2

Question 13 HEC 07-13-S107 F 2 Déterminer une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, chacune prenant deux valeurs, telle que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable nulle mais telle que la suite $\big(E(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1 et la suite $\big(V(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tende vers $+\infty$.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ posons $D_n = \{\frac{1}{n}, n\}$ et considérons l'application f_n de D_n dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{n-1}{n}$ et $f_n(n) = \frac{1}{n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: D_n est fini, f_n prend ses valeurs dans $[0,1]$ et $f_n(\frac{1}{n}) + f_n(n) = 1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est la loi de probabilité d'une variable aléatoire X_n sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n) = \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \times n = 1 + \frac{n-1}{n^2}$. Alors $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = 1}}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n^2) = \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \times n^2 = \frac{n-1}{n^3} + n$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n^2) = +\infty$; donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} V(X_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(E(X_n^2) - (E(X_n))^2 \right) = +\infty$. $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} V(X_n) = +\infty}}$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Alors $\exists n_1 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in [\![n_1, +\infty[\![$, $n > \varepsilon$ et $\exists n_2 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in [\![n_2, +\infty[\![$, $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$. $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $\frac{1}{n} < \varepsilon < n$.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $0 \leqslant P(|X_n - 0| \geqslant \varepsilon) = P(|X_n| \geqslant \varepsilon) = P(X_n \geqslant \varepsilon) = P(X_n = n) = \frac{1}{n}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n - 0| \geqslant \varepsilon) = 0$ et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $\underline{\underline{(X_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge en probabilité vers la variable certaine nulle.}}}$

Exercice	Convergence en probabilité.	F1

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p, mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose : $Y_n = X_n + X_{n+1}$. On pose encore, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{n}$.

Montrer que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $2p$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k + X_{k+1}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n+1} X_k$.

$S_n = \frac{1}{n}\left[X_1 + 2\sum_{k=2}^{n} X_k + X_{n+1}\right]$. $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}, S_n$ sont des variables finies donc possède une espérance. La linéarité de l'espérance donne :

$E(S_n) = \frac{1}{n}\left[E(X_1) + 2\sum_{k=2}^{n} E(X_k) + E(X_{n+1})\right] = \frac{1}{n}\left[p + 2(n-1)p + p\right] = 2p$ $\quad E(S_n) = 2p$

$X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$ possède une variance qui vaut pq et ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes. Alors $X_1, 2X_2, \ldots, 2X_n, X_{n+1}$ possèdent pour variance $pq, 4pq, \ldots, 4pq, pq$ et sont mutuellement indépendantes.

Alors $X_1 + 2X_2 + \cdots + 2X_n + X_{n+1}$ possède une variance égale à $pq + 4pq + \cdots + 4pq + pq$.

Ainsi $V(X_1 + 2\sum_{k=2}^{n} X_k + X_{n+1})$ existe et vaut $pq(1 + 4(n-1) + 1)$.

donc $V(S_n)$ existe et vaut $\frac{1}{n^2}(4n-2)pq$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $V(S_n)$ existe. Alors l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant P(|S_n - E(S_n)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(S_n)}{\varepsilon^2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant P(|S_n - 2p| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{pq}{\varepsilon^2}\left(\frac{4}{n} - \frac{2}{n^2}\right)$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{pq}{\varepsilon^2}\left(\frac{4}{n} - \frac{2}{n^2}\right)\right) = 0$.

Alors par encadrement $\lim_{n\to+\infty} P(|S_n - 2p| \geqslant \varepsilon) = 0$ pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers $2p$ ... ou vers la variable aléatoire constante égale à $2p$.

Exercice **Convergence en probabilité.** F1 $^+$ ESCP 1999 3.2

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, X_n suit une loi binômiale de paramètres 1 et p. On pose pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $Y_n = X_nX_{n+1}$.

Montrer que $\left(\dfrac{Y_1+Y_2+\cdots+Y_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à p^2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. X_n, X_{n+1} et Y_n sont des variables aléatoires réelles finies donc elles possèdent une espérance.

De plus X_n et X_{n+1} sont indépendantes. Alors $E(Y_n) = E(X_nX_{n+1}) = E(X_n)E(X_{n+1}) = p\times p = p^2$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(Y_n) = p^2$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ possèdent une espérance commune qui vaut p^2.

Alors $Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$ possède une espérance commune qui vaut $n\times p^2$.

Ainsi $\dfrac{Y_1+Y_2+\cdots+Y_n}{n}$ possède une espérance commune qui vaut p^2 et ceci pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ possède une variance donc $Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$ possède une variance.

$$V(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n) = \sum_{k=1}^{n} V(Y_k) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \text{cov}(Y_i,Y_j) = \sum_{k=1}^{n} V(X_kX_{k+1}) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \text{cov}(X_iX_{i+1}, X_jX_{j+1})$$

Soit $k\in[\![1,n]\!]$. $Y_k(\Omega) = \{0,1\}$. $P(Y_k=1) = P(X_kX_{k+1}=1) = P(\{X_k=1\}\cap\{X_{k+1}=1\}) = P(X_k=1)\,P(X_{k+1}=1)$
Indépendance.

Alors $P(Y_k=1) = p^2$ et $P(Y_k=0) = 1-p^2$.

Alors $V(Y_k) = E(Y_k^2) - (E(Y_k))^2 = (0\cdot P(Y_k^2=0) + 1\times \underbrace{P(Y_k^2=1)}_{P(Y_k=1)\,=\,p^2}) - (p^2)^2 = p^2 - p^4 = p^2(1-p^2)$.

$V(Y_k) = p^2(1-p^2)$.

Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ tel que $i<j$.

Si $i+1<j$: X_iX_{i+1} et X_jX_{j+1} sont indépendantes donc $\text{cov}(X_iX_{i+1}, X_jX_{j+1}) = 0$.
car $X_i, X_{i+1}, X_j, X_{j+1}$ sont indépendantes.

Supposons $i+1=j$ $\text{cov}(X_iX_{i+1}, X_jX_{j+1}) = \text{cov}(X_iX_{i+1}, X_{i+1}X_{i+2})$

$= E(X_iX_{i+1}X_{i+1}X_{i+2}) - E(X_iX_{i+1})\,E(X_{i+1}X_{i+2})$

$= E(X_iX_{i+1}^2X_{i+2}) - p^2\times p^2$.

$= E(X_iX_{i+1}X_{i+2}) - p^4$ car $X_{i+1}^2 = X_{i+1}$

$= p^3 - p^4$ par indépendance.

Ainsi $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i<j \Rightarrow \operatorname{cov}(Y_i,Y_j) = \begin{cases} p^3 - p^4 & \text{si } i+1=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$$V(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n) = \sum_{k=1}^{n} V(Y_k) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \operatorname{cov}(Y_i,Y_j) = n\times p^2(1-p^2) + 2\sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{\operatorname{cov}(Y_i,Y_{i+1})}_{p^3-p^4=p^3(1-p)}$$

$$V(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n) = n\,p^2(1-p^2) + 2(n-1)\,p^3(1-p)$$

Alors $V\left(\dfrac{Y_1+Y_2+\cdots+Y_n}{n}\right)$ existe et vaut $\dfrac{1}{n^2}\left[n\,p^2(1-p^2)+2(n-1)p^3(1-p)\right]$ ou

$\dfrac{1}{n}\,p^2(1-p^2)+2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)p^3(1-p)$. Notons que ceci vaut encore pour $n=1$ car $V(Y_1)=p^2(1-p^2)$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{Y_1+Y_2+\cdots+Y_n}{n}$ possède une variance.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne alors :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad P\left(\left|\frac{Y_1+Y_2+\cdots+Y_n}{n} - E\left(\frac{Y_1+Y_2+\cdots+Y_n}{n}\right)\right|\geq \varepsilon\right) \leq \frac{V\left(\frac{Y_1+Y_2+\cdots+Y_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 0\leq P\left(\left|\frac{Y_1+Y_2+\cdots+Y_n}{n} - p^2\right|\geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\left[\frac{1}{n}p^2(1-p^2)+2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)p^3(1-p)\right] \text{ et}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\left[\frac{1}{n}p^2(1-p^2)+2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)p^3(1-p)\right]\right)=0.$$

Alors par encadrement il vient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{Y_1+Y_2+\cdots+Y_n}{n}-p^2\right|\geq\varepsilon\right)=0$ et ceci pour tout

ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi $\underline{\left(\dfrac{Y_1+Y_2+\cdots+Y_n}{n}\right)_{n\geq 1} \text{ converge en probabilité vers } p^2}$.

Exercice **Convergence en probabilité.**

f est une densité de probabilité continue sur $\mathbb{R}$.

Q1. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $f_n : t \to n\, f(nt)$ est une densité de probabilité continue sur $\mathbb{R}$.

Q2. Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, X_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f_n.

Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire certaine nulle.

Q1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$ donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_n(t) = n f(nt) \geqslant 0$.
  Alors f_n est positive sur $\mathbb{R}$.

- f est continue sur $\mathbb{R}$ et $t \mapsto nt$ est continue sur $\mathbb{R}$. Alors $t \mapsto f(nt)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  Ainsi $f_n : t \mapsto n f(nt)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

- Soit $A \in \mathbb{R}$. $t \mapsto nt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Ceci autorise le changement de variable $u = nt$ dans ce qui suit.
  $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x f_n(t)\,dt = \int_0^x n f(nt)\,dt \overset{u=nt}{=} \int_0^{nx} f(u)\,du$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x f_n(t)\,dt = \int_0^{nx} f(u)\,du$.
  Cela permet aussi d'écrire $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_x^0 f_n(t)\,dt = \int_{nx}^0 f(u)\,du$.
  $\int_0^{+\infty} f(u)\,du$ et $\int_{-\infty}^0 f(u)\,du$ sont convergentes, $\lim_{x \mapsto +\infty} (nx) = +\infty$ et $\lim_{x \mapsto -\infty} (nx) = -\infty$

Alors $\lim_{x \mapsto +\infty} \int_0^x f_n(t)\,dt = \lim_{x \mapsto +\infty} \int_0^{nx} f(u)\,du = \int_0^{+\infty} f(u)\,du$. Ainsi $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ converge et vaut $\int_0^{+\infty} f(u)\,du$.

$\lim_{x \mapsto -\infty} \int_x^0 f_n(t)\,dt = \lim_{x \mapsto -\infty} \int_{nx}^0 f(u)\,du = \int_{-\infty}^0 f(u)\,du$. Ainsi $\int_{-\infty}^0 f_n(t)\,dt$ converge et vaut $\int_{-\infty}^0 f(u)\,du$.

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt$ converge et vaut $\int_{-\infty}^0 f(u)\,du + \int_0^{+\infty} f(u)\,du$ ou $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du$ ou 1 !

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt$ converge et vaut 1.

Ceci achève de montrer que $f_n : t \mapsto n f(nt)$ est une densité de probabilité continue sur $\mathbb{R}$.

Q2 Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = P(|X_n| \geq \varepsilon) = 1 - P(|X_n| < \varepsilon) = 1 - P(-\varepsilon < X_n < \varepsilon)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = 1 - P(-\varepsilon < X_n \leq \varepsilon) = 1 - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_n(t)\,dt$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = 1 - \int_{-\varepsilon}^{0} f_n(t)\,dt - \int_{0}^{\varepsilon} f_n(t)\,dt \underset{\text{q1 !}}{=} 1 - \int_{-n\varepsilon}^{0} f(u)\,du - \int_{0}^{n\varepsilon} f(u)\,du$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} (-n\varepsilon) = -\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (n\varepsilon) = +\infty$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{-n\varepsilon}^{0} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{0} f(u)\,du$ (car $\int_{-\infty}^{0} f(u)\,du$ converge) et

$\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{0}^{n\varepsilon} f(u)\,du = \int_{0}^{+\infty} f(u)\,du$ (car $\int_{0}^{+\infty} f(u)\,du$ converge).

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \int_{-n\varepsilon}^{0} f(u)\,du - \int_{0}^{n\varepsilon} f(u)\,du\right) = 1 - \int_{-\infty}^{0} f(u)\,du - \int_{0}^{+\infty} f(u)\,du = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du = 1 - 1 = 0$.

Donc pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = 0$

$(X_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine nulle de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Exercice **Convergence en loi et convergence en probabilité.** F1

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.

On pose $Y = e^{-X}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Y_n = e^{-X+\frac{1}{n}}$.

Étudier Y. Montrer que $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers Y. La suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle en probabilité vers Y ?

$\forall x \in]-\infty,0]$, $Y^{-1}(]-\infty,x]) = \{\omega\in\Omega \mid Y(\omega)\leq x\} = \{\omega\in\Omega \mid e^{-X(\omega)}\leq x\} = \emptyset \in \mathcal{A}$.

$\forall x\in]0,+\infty[$, $Y^{-1}(]-\infty,x]) = \{\omega\in\Omega \mid Y(\omega)\leq x\} = \{\omega\in\Omega \mid e^{-X(\omega)}\leq x\} = \{\omega\in\Omega \mid X(\omega)\geq -\ln x\}$.

$\forall x\in]0,+\infty[$, $Y^{-1}(]-\infty,x]) = X^{-1}([-\ln x,+\infty[) \in \mathcal{A}$ car X est une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

Finalement $\forall x\in\mathbb{R}$, $Y^{-1}(]-\infty,x])\in\mathcal{A}$. Y est une variable aléatoire. Notons F_Y sa fonction de répartition. Notons F_X la fonction de répartition de X. $\forall x\in\mathbb{R}$, $F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & \text{si } x\in[0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

$\forall x\in]-\infty,0]$, $F_Y(x) = P(Y^{-1}(]-\infty,x])) = P(\emptyset) = 0$.

$\forall x\in]0,+\infty[$, $F_Y(x) = P(Y^{-1}(]-\infty,x])) = P(X^{-1}([-\ln x,+\infty[)) = P(X\geq -\ln x) = 1-P(X<-\ln x)$.

$\forall x\in]0,+\infty[$, $F_Y(x) = 1-P(X\leq -\ln x) = 1-F_X(-\ln x)$ (X est une var à d...).

$\forall x\in]0,1[$, $-\ln x\in]0,+\infty[$ et $F_Y(x) = 1-(1-e^{-(-\ln x)}) = x$.

$\forall x\in [1,+\infty[$, $-\ln x\in]-\infty,0]$ et $F_Y(x) = 1-0 = 1$.

Ainsi $\forall x\in\mathbb{R}$, $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\in]-\infty,0] \\ x & \text{si } x\in]0,1[\\ 1 & \text{si } x\in [1,+\infty[\end{cases}$.

<u>Ainsi Y suit la loi uniforme sur $]0,1]$ ou sur $[0,1]$ ou ... !!</u>

Notons pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, F_{Y_n} la fonction de répartition de Y_n. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $F_{Y_n}(x) = P(Y_n\leq x) = P(e^{-X+\frac{1}{n}}\leq x) = P(e^{-X}\leq e^{-\frac{1}{n}}x) = P(Y\leq e^{-\frac{1}{n}}x) = F_Y(e^{-\frac{1}{n}}x)$.

Soit $x\in\mathbb{R}$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $F_{Y_n}(x) = F_Y(e^{-\frac{1}{n}}x)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(e^{-\frac{1}{n}}x) = x$ et F_Y est continue en x car Y est une variable aléatoire à densité.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = F_Y(x)$ et ceci pour tout x dans $\mathbb{R}$.

Ainsi <u>$(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers Y.</u>

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|Y_n - Y| \geq \varepsilon) = P(|e^{1/n} Y - Y| \geq \varepsilon) = P(\underbrace{(e^{1/n}-1)}_{>0} \underbrace{Y}_{} \geq \varepsilon)$ Y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|Y_n - Y| \geq \varepsilon) = P\left(Y \geq \dfrac{\varepsilon}{e^{1/n}-1}\right) = 1 - P\left(Y < \dfrac{\varepsilon}{e^{1/n}-1}\right)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|Y_n - Y| \geq \varepsilon) = 1 - P\left(Y \leq \dfrac{\varepsilon}{e^{1/n}-1}\right) = 1 - F_Y\left(\dfrac{\varepsilon}{e^{1/n}-1}\right)$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} (e^{1/n}-1) = 0^+$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\varepsilon}{e^{1/n}-1} = +\infty$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|Y_n - Y| \geq \varepsilon) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - F_Y\left(\dfrac{\varepsilon}{e^{1/n}-1}\right)\right) = 1-1=0$

Pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|Y_n - Y| \geq \varepsilon) = 0$.

$(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers Y.

Exercice **Convergence en probabilité et convergence "véloce". Oral ESCP 2007 3.15** **F1^+**

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \text{Inf}(U_1, U_2, ..., U_n)$.

Q1. a) Montrer que M_n est une variable aléatoire.

b) Calculer $E(M_n)$ et $V(M_n)$.

c) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Etudier la convergence en probabilité de la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Q2. On définit les variables aléatoires U et V par : $U = \text{Inf}(U_1, 1-U_1)$ et $V = \text{Sup}(U_1, 1-U_1)$. Enfin on pose $Q = \dfrac{V}{U}$.

a) Déterminer la loi de Q.

b) Étudier l'existence de l'espérance de Q.

Q3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, soit X_n la variable aléatoire définie sur Ω par : $X_n(\omega) = \sqrt{n}$ si $U_1(\omega) \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $X_n(\omega) = 0$ si $U_1(\omega) > \dfrac{1}{n}$.

a) $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que X_n est effectivement une variable aléatoire.

On dit qu'une suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge "vélocement" vers Z si pour tout $\alpha > 0$, la série de terme général $P(\{\omega \in \Omega / |Z_n(\omega) - Z(\omega)| > \alpha\})$ converge.

b) En utilisant la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, comparer la convergence en probabilité et la convergence "véloce".

Q1 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$M_n^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid M_n(\omega) \leqslant x\} = \overline{\{\omega \in \Omega \mid M_n(\omega) > x\}}$.

$M_n^{-1}(]-\infty, x]) = \overline{\{\omega \in \Omega \mid U_1(\omega) > x, U_2(\omega) > x, \dots, U_n(\omega) > x\}}$.

$M_n^{-1}(]-\infty, x]) = \overline{\{\omega \in \Omega \mid U_1(\omega) > x\} \cap \{\omega \in \Omega \mid U_2(\omega) > x\} \cap \dots \cap \{\omega \in \Omega \mid U_n(\omega) > x\}}$.

$M_n^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid U_1(\omega) \leqslant x\} \cup \{\omega \in \Omega \mid U_2(\omega) \leqslant x\} \cup \dots \cup \{\omega \in \Omega \mid U_n(\omega) \leqslant x\}$.

$M_n^{-1}(]-\infty, x]) = U_1^{-1}(]-\infty, x]) \cup U_2^{-1}(]-\infty, x]) \cup \dots \cup U_n^{-1}(]-\infty, x])$.

$U_1, U_2, \dots, U_n$ sont n variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $U_i^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{A}$.

Comme $\mathcal{A}$ est stable par réunion finie : $M_n^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{A}$.

Ainsi M_n est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $M_n^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{A}$.

<u>cela permet de dire que M_n est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.</u>

<u>b)</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons F_n la fonction de répartition de M_n.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = P(M_n^{-1}(]-\infty, x])) = P(M_n \leqslant x) = 1 - P(M_n > x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = 1 - P(\{U_1 > x\} \cap \{U_2 > x\} \cap \dots \cap \{U_n > x\}) = 1 - P(U_1 > x)\, P(U_2 > x) \cdots P(U_n > x)$

$U_1, U_2, \dots, U_n$ sont mutuellement indépendantes.

Ca $U_1, U_2, \dots, U_n$ ont même loi. Notons F_{U_1} la fonction de répartition de U_1.

$$\forall z \in \mathbb{R},\ F_{U_1}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in]-\infty, 0[\\ z & \text{si } z \in [0,1[\\ 1 & \text{si } z \in [1,+\infty[. \end{cases}$$

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = 1 - (P(U_1 > x))^n = 1 - (1 - P(U_1 \leq x))^n = 1 - (1 - F_1(x))^n$.

$\forall x \in]-\infty, 0[,\quad F_n(x) = 1 - (1-0)^n = 0.$

$\forall x \in [0,1[,\quad F_n(x) = 1 - (1-x)^n$

$\forall x \in [1,+\infty[,\quad F_n(x) = 1 - (1-1)^n = 1$

Ainsi $\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty,0[\\ 1-(1-x)^n & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}}}$. On peut encore écrire que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 1-(1-x)^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}$$. $x \mapsto 0$, $x \mapsto 1-(1-x)^n$, $x \mapsto 1$ sont de

classe C^1 sur $\mathbb{R}$! Alors F_n est de classe C^1 sur $]-\infty,0]$, $[0,1]$ et $[1,+\infty[$.

Alors F_n est continue sur $]-\infty,0]$, $[0,1]$ et $[1,+\infty[$ donc sur $\mathbb{R}$, et de classe

C^1 au moins sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

Ceci achève de montrer que $\underline{M_n \text{ est une variable aléatoire à densité}}$.

$\forall x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[,\ F_n'(x) = 0$ et $\forall x \in]0,1[,\ F_n'(x) = n(1-x)^{n-1}$.

Posons $\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} n(1-x)^{n-1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}}$

f_n est une fonction positive ou nulle sur $\mathbb{R}$ qui coïncide avec F_n' sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$ donc

sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. Ainsi $\underline{\underline{f_n \text{ est une densité de } M_n}}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. f_n est nulle sur $]-\infty,0[$ et sur $]1,+\infty[$. Il en est de même de $t \mapsto t^k f_n(t)$.

Alors $\int_{-\infty}^0 t^k f_n(t)\,dt$ et $\int_1^{+\infty} t^k f_n(t)\,dt$ convergent et valent 0.

$t \mapsto t^k f_n(t)\,dt$ est continue $\underline{\underline{\text{sur}}}$ $[0,1]$ donc $\int_0^1 t^k f_n(t)\,dt$ converge

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t^\ell f_n(t)\,dt$ est convergente et vaut $\int_0^1 t^\ell f_n(t)\,dt$.

Si c'est nécessaire (!) disons que $\int_{-\infty}^{+\infty} t^\ell f_n(t)\,dt$ est absolument convergente car $t \mapsto t^\ell f_n(t)$ est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

Ainsi M_n possède un moment d'ordre ℓ qui vaut $\int_0^1 t^\ell f_n(t)\,dt$ ou $\int_0^1 n t^\ell (1-t)^{n-1}\,dt$.

Alors $E(M_n)$ et $V(M_n)$ existent.

$$E(M_n) = \int_0^1 n\,t(1-t)^{n-1}\,dt \underset{t=1-(1-t)}{=} n\left[\int_0^1 (1-t)^{n-1}\,dt - \int_0^1 (1-t)^n\,dt\right] = n\left[-\frac{(1-t)^n}{n}\right]_0^1 - n\left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1.$$

$$E(M_n) = n \times \frac{1}{n} - n \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}. \qquad \underline{\underline{E(M_n) = \frac{1}{n+1}}}.$$

$$\int_0^1 (1-t)^2 f_n(t)\,dt = n\int_0^1 (1-t)^{n+1}\,dt = n\left[-\frac{(1-t)^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{n}{n+2}.$$

Alors $\frac{n}{n+2} = \int_0^1 (1-t)^2 f_n(t)\,dt = \int_0^1 f_n(t)\,dt - 2\int_0^1 t f_n(t)\,dt + \int_0^1 t^2 f(t)\,dt$.

$$\frac{n}{n+2} = 1 - 2E(M_n) + E(M_n^2)\,; \quad E(M_n^2) = \frac{n}{n+2} - 1 + 2 \times \frac{1}{n+1} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

Alors $V(M_n) = E(M_n^2) - (E(M_n))^2 = \frac{2}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 = \frac{1}{(n+1)^2(n+1)}\left[2(n+1) - (n+2)\right]$

$$\underline{\underline{V(M_n) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}}}.$$

c) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|M_n| \geq \varepsilon) = P(M_n \geq \varepsilon) + P(M_n \leq -\varepsilon) = 1 - P(M_n < \varepsilon) + 0 = 1 - P(M_n \leq \varepsilon)$.

$\underline{\underline{1^{er}\text{ cas}}}$.. $\varepsilon \geq 1$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|M_n| \geq \varepsilon) = 1 - 1 = 0$. Puis $\lim_{n\to+\infty} P(|M_n| \geq \varepsilon) = 0$!

$\underline{\underline{2^{ème}\text{ cas}}}$.. $\varepsilon < 1$ Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|M_n| \geq \varepsilon) = 1 - (1 - (1-\varepsilon)^n) = (1-\varepsilon)^n$.

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} P(|M_n| \geq \varepsilon) = \lim_{n\to+\infty} (1-\varepsilon)^n = 0$ car $1-\varepsilon \in]0,1[$.

Finalement $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n\to+\infty} P(|M_n| \geq \varepsilon) = 0$.

Alors $\underline{\underline{(M_n)_{n\geq 1} \text{ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine nulle de } (\Omega, \mathcal{A}, P)}}$.

Q2 a) U et V prennent presque sûrement leurs valeurs dans $]0,\frac{1}{2}]$ et dans $[\frac{1}{2},1]$.

Alors $\varphi=\frac{V}{U}$ prend presque sûrement ses valeurs dans $[1,+\infty[$.

Soit F_φ la fonction de répartition de φ. $\forall x\in]-\infty,1[$, $F_\varphi(x)=0$.

Soit $x\in[1,+\infty[$. $(\{U_1\leq\frac{1}{2}\},\{U_1>\frac{1}{2}\})$ est un système complet d'événements.

$F_\varphi(x)=P(\varphi\leq x)=P(\frac{V}{U}\leq x)=P(V\leq xU)=P((\{V\leq xU\}\cap\{U_1\leq\frac{1}{2}\})+P((\{V\leq xU\}\cap\{U_1>\frac{1}{2}\})$

U prend ses valeurs presque sûrement dans $]0,\frac{1}{2}]$

$F_\varphi(x)=P(\{1-U_1\leq x(U_1)\}\cap\{U_1\leq\frac{1}{2}\})+P(\{U_1\leq x(1-U_1)\}\cap\{U_1>\frac{1}{2}\})$

$F_\varphi(x)=P(\{\frac{1}{1+x}\leq U_1\}\cap\{U_1\leq\frac{1}{2}\})+P(\{U_1\leq\frac{x}{1+x}\}\cap\{U_1>\frac{1}{2}\})$.

Notons que $\frac{1}{1+x}\leq\frac{1}{2}$ et $\frac{x}{1+x}>\frac{1}{2}$. Alors:

$F_\varphi(x)=P(\frac{1}{1+x}\leq U_1\leq\frac{1}{2})+P(\frac{1}{2}\leq U_1\leq\frac{x}{1+x})=P(\frac{1}{1+x}<U_1\leq\frac{1}{2})+P(\frac{1}{2}<U_1\leq\frac{x}{1+x})$

$F_\varphi(x)=F_{U_1}(\frac{1}{2})-F_{U_1}(\frac{1}{1+x})+F_{U_1}(\frac{x}{1+x})-F_{U_1}(\frac{1}{2})=F_{U_1}(\frac{x}{1+x})-F_{U_1}(\frac{1}{1+x})$.

Or $\frac{x}{1+x}\in[0,1]$ et $\frac{1}{1+x}\in[0,1]$ donc $F_\varphi(x)=\frac{x}{1+x}-\frac{1}{1+x}=\frac{x-1}{x+1}$

$\forall x\in\mathbb{R},\ F_\varphi(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{x+1} & \text{si } x\in[1,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

b) Notons que l'on peut écrire : $\forall x\in\mathbb{R}$, $F_\varphi(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in]-\infty,1]\\ \frac{x-1}{x+1} & \text{si } x\in[1,+\infty[\end{cases}$.

$x\mapsto 0$ est de classe C^1 sur $]-\infty,1]$ et $x\mapsto\frac{x-1}{x+1}$ est de classe C^1 sur $[1,+\infty[$.

Alors 1) F_φ est continue sur $\mathbb{R}$ (car continue sur $]-\infty,1]$ et sur $[1,+\infty[$).

2) F_φ est de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}-\{1\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points

Alors φ est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in]-\infty, 1[,\ F'_\varphi(x) = 0$ et $\forall x \in]1, +\infty[,\ F'_\varphi(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x+1)^2} & \text{si } x \in [1, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

f_φ est une fonction positive ou nulle sur $\mathbb{R}$ qui coïncide avec F'_φ sur $\mathbb{R} - \{1\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

Alors f_φ est une densité de probabilité de φ.

$t \mapsto t f_\varphi(t)$ est positive et continue sur $[1, +\infty[$.

De plus $t f_\varphi(t) = \dfrac{2t}{(t+1)^2} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{2}{t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2}{t}\,dt$ diverge.

Alors les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_1^{+\infty} t f_\varphi(t)\,dt$ diverge. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_\varphi(t)\,dt$ diverge également !

Ainsi φ n'a pas d'espérance.

Q3 a) $n \in \mathbb{N}^*$. Notons que $X_n(\Omega) = \{0, \sqrt{n}\}$. $X(\Omega)$ est finie.

$X_n^{-1}(\{0\}) = \{\omega \in \Omega \mid U_1(\omega) > \frac{1}{n}\} = U_1^{-1}(]\frac{1}{n}, +\infty[) \in \mathcal{A}$

U_1 est une variable aléatoire.

$X_n^{-1}(\{\sqrt{n}\}) = \{\omega \in \Omega \mid U_1(\omega) \leq \frac{1}{n}\} = U_1^{-1}(]-\infty, \frac{1}{n}]) \in \mathcal{A}$

ceci achève de montrer que X_n est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

b) • Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. ← ⚠ Ici on utilise $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour montrer que la convergence en probabilité ne donne pas la convergence quadratique

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(|X_n| \geq \varepsilon) = P(X_n \geq \varepsilon)$. Posons $n_0 = \mathrm{Ent}(\varepsilon^2) + 1$. $n_0 \in \mathbb{N}^*$.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![,\ n \geq n_0 = \mathrm{Ent}(\varepsilon^2) + 1 > \varepsilon^2$. $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![,\ \sqrt{n} > \varepsilon$.

Alors $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![,\ P(|X_n| \geq \varepsilon) = P(X_n \geq \varepsilon) = P(X_n = \sqrt{n}) = P(U_1 \leq \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(|X_n| \geq \varepsilon) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à 0 de $(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

on peut ici prendre un ε particulier...

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $n_0 = \mathrm{Ent}(\varepsilon^2)+1$.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $\sqrt{n} > \varepsilon$. Alors $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $P(|X_n| > \varepsilon) = P(X_n > \varepsilon) = P(X_n = \sqrt{n}) = \frac{1}{n}$.

Or la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge. Donc la série de terme général $P(|X_n|>\varepsilon)$ diverge. Ainsi $(X_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas "vélocement" vers la variable certaine égale à 0.

La convergence en probabilité ne donne pas la convergence "véloce".

- Supposons que dans $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ la suite de variable aléatoire $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge "vélocement" vers la variable aléatoire Z.

Alors pour tout α dans $\mathbb{R}_+^*$ la série de terme général $P(|Z_n - Z| > \alpha)$ converge.

Ainsi pour tout α dans $\mathbb{R}_+^*$ la suite de terme général $P(|Z_n - Z| > \alpha)$ converge vers 0.

(*) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\{|Z_n - Z| \geq \varepsilon\} \subset \{|Z_n - Z| > \frac{\varepsilon}{2}\}$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq P(|Z_n - Z| \geq \varepsilon) \leq P(|Z_n - Z| > \frac{\varepsilon}{2})$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty} P(|Z_n - Z| > \frac{\varepsilon}{2}) = 0$. Par encadrement il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|Z_n - Z| \geq \varepsilon) = 0$

pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|Z_n - Z| \geq \varepsilon) = 0$. Donc $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers Z.

Ainsi la convergence "véloce" donne la convergence en probabilité.

Ici on montre que la convergence "véloce" donne la convergence en probabilité.

Ici onglisse en retenant $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|Z_n - Z| \geq \varepsilon) = 0$ comme définition de la convergence en probabilité...

Exercice $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui converge en loi vers la variable certaine égale à c.

Montrer que cette suite converge en probabilité vers c.

Pour $\forall \omega\in\Omega$, $X(\omega)=c$. Montrons que $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers X.

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n-X|\geqslant\varepsilon)=0$.

$\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $P(|X_n-X|\geqslant\varepsilon)=P(\{X_n-X\geqslant\varepsilon\}\cup\{X_n-X\leqslant-\varepsilon\})$. Par incompatibilité :

$\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $P(|X_n-X|\geqslant\varepsilon)=P(\{X_n-X\geqslant\varepsilon\})+P(\{X_n-X\leqslant-\varepsilon\})$

$\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $P(|X_n-X|\geqslant\varepsilon)=P(X_n\geqslant\varepsilon+X)+P(X_n\leqslant X-\varepsilon)=P(X_n\geqslant\varepsilon+c)+P(X_n\leqslant c-\varepsilon)$

Pour tout $n\in[\![n_0,+\infty[\![$ notons F_n la fonction de répartition de X_n. Notons F celle de X.

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F(x)=P(X\leqslant x)=P(c\leqslant x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in[c,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Notons que F est continue sur $\mathbb{R}-\{c\}$ et ainsi $\forall x\in\mathbb{R}-\{c\}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}F_n(x)=F(x)$.

$\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $P(|X_n-X|\geqslant\varepsilon)=P(X_n\geqslant\varepsilon+c)+P(X_n\leqslant c-\varepsilon)=1-P(X_n<c+\varepsilon)+F_n(c-\varepsilon)$.

$\{X_n\leqslant c+\varepsilon/2\}\subset\{X_n<c+\varepsilon\}$ donc $P(X_n\leqslant c+\frac{\varepsilon}{2})\leqslant P(X_n<c+\varepsilon)$.

Alors $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $0\leqslant P(|X_n-X|\geqslant\varepsilon)\leqslant 1-P(X_n\leqslant c+\frac{\varepsilon}{2})+F_n(c-\varepsilon)=1-F_n(c+\frac{\varepsilon}{2})+F_n(c-\varepsilon)$.

$c-\varepsilon<c$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}F_n(c-\varepsilon)=F(c-\varepsilon)=0$.

$c+\frac{\varepsilon}{2}>c$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}F_n(c+\frac{\varepsilon}{2})=F(c+\frac{\varepsilon}{2})=1$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-F_n(c+\frac{\varepsilon}{2})+F_n(c-\varepsilon)\right)=1-1+0=0$.

On obtient alors par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty}P(|X_n-X|\geqslant\varepsilon)=0$, et ceci pour tout élément ε de $\mathbb{R}_+^*$.

Alors $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ <u>converge en probabilité vers la variable certaine c.</u>

<u>Exercice</u> .. Montrer que ceci vaut encore si l'on remplace "la variable certaine égale à c" par "une variable presque sûrement égale à c".

<u>Remarque</u> .. Ainsi dans la loi faible des grands nombres on peut remplacer convergence en probabilité par convergence en loi sans diminuer la portée du résultat.

Exercice **Une condition nécessaire et suffisante de convergence en probabilité.** **F1$^+$**

$(X_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ et X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

Montrer que $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers X si et seulement si :

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*},\ \exists p\in[\![n_0,+\infty[\![,\ \forall n\in[\![n_0,+\infty[\![,\ n\geqslant p\Rightarrow P(|X_n-X|\geqslant\varepsilon)<\varepsilon.$$

- Supposons que $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers X. Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$.

$\forall\varepsilon''\in\mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n\to+\infty} P(|X_n-X|\geqslant\varepsilon'')=0$. Ainsi : $\lim_{n\to+\infty} P(|X_n-X|\geqslant\varepsilon)=0$. Alors :

$\forall\varepsilon'\in\mathbb{R}_+^*$, $\exists p\in[\![n_0,+\infty[\![$, $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $n\geqslant p\Rightarrow P(|X_n-X|\geqslant\varepsilon)=|P(|X_n-X|\geqslant\varepsilon)|<\varepsilon'$.

$\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ donc $\exists p\in[\![n_0,+\infty[\![$, $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $n\geqslant p\Rightarrow P(|X_n-X|\geqslant\varepsilon)<\varepsilon$

Ainsi $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*, \exists p\in[\![n_0,+\infty[\![, \forall n\in[\![n_0,+\infty[\![, n\geqslant p\Rightarrow P(|X_n-X|\geqslant\varepsilon)<\varepsilon.$

- Supposons que : $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, $\exists p\in[\![n_0,+\infty[\![$, $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $n\geqslant p\Rightarrow P(|X_n-X|\geqslant\varepsilon)<\varepsilon$

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. Montrons que $\lim_{n\to+\infty} P(|X_n-X|\geqslant\varepsilon)=0$.

cela revient à montrer que : $\forall\varepsilon'\in\mathbb{R}_+^*$, $\exists p\in[\![n_0,+\infty[\![$, $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $n\geqslant p\Rightarrow|P(|X_n-X|\geqslant\varepsilon)|<\varepsilon'$

Soit $\varepsilon'\in\mathbb{R}_+^*$. ou $P(|X_n-X|\geqslant\varepsilon)<\varepsilon'$.

1er cas.. $\varepsilon\leqslant\varepsilon'$

Par hypothèse : $\exists p\in[\![n_0,+\infty[\![$, $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $n\geqslant p\Rightarrow P(|X_n-X|\geqslant\varepsilon)<\varepsilon\leqslant\varepsilon'$.

donc $\exists p\in[\![n_0,+\infty[\![$, $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $n\geqslant p\Rightarrow P(|X_n-X|\geqslant\varepsilon)<\varepsilon'$

2ème cas.. $\varepsilon>\varepsilon'$

Par hypothèse : $\exists p\in[\![n_0,+\infty[\![$, $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $n\geqslant p\Rightarrow P(|X_n-X|\geqslant\varepsilon')<\varepsilon'$

Notons alors que $\forall n\in\mathbb{N}^{n_0}$, $\{|X_n-X|\geqslant\varepsilon\}\subset\{|X_n-X|\geqslant\varepsilon'\}$ car $\varepsilon>\varepsilon'$.

donc $\forall n\in\mathbb{N}^{n_0}$, $P(|X_n-X|\geqslant\varepsilon)\leqslant P(|X_n-X|\geqslant\varepsilon')$

Ainsi $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $P(|X_n-X|\geqslant\varepsilon)\leqslant P(|X_n-X|\geqslant\varepsilon')<\varepsilon'$

Ici encore $\exists p\in[\![n_0,+\infty[\![$, $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $n\geqslant p\Rightarrow P(|X_n-X|\geqslant\varepsilon)<\varepsilon'$.

Finalement $\forall\varepsilon'\in\mathbb{R}_+^*$, $\exists p\in[\![n_0,+\infty[\![$, $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $n\geqslant p\Rightarrow 0\leqslant P(|X_n-X|\geqslant\varepsilon)<\varepsilon'$.

Par conséquent $\lim_{n\to+\infty} P(|X_n-X|\geqslant\varepsilon)=0$ et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$

Alors $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers X.

Exercice **La convergence en loi ne donne pas la convergence en probabilité.**

Y est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi normale centrée réduite. On pose : $X = -Y$. Pour tout élément n de $\mathbb{N}$, on pose encore : $X_n = Y$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge en loi vers X sans converger en probabilité vers X.

Soit F_X la fonction de répartition de X et ϕ celle de Y.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = P(X \leqslant x) = P(-Y \leqslant x) = P(Y \geqslant -x) = 1 - P(Y < -x) = 1 - P(Y \leqslant -x) = 1 - \phi(-x)$

Rappelons que Y suit la loi normale centrée réduite donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$.

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = 1 - (1 - \phi(x)) = \phi(x)$. $F_X = \phi$. X a même loi que Y.

Soit F_{X_n} la fonction de répartition de X_n, ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{X_n} = \phi = F_X$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$!! Ainsi $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge en loi vers X.

Rappelons que ϕ définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $P(|X_n - X| \geqslant 2) = P(|Y - X| \geqslant 2) = P(|2Y| \geqslant 2) = P(|Y| \geqslant 1)$.

$P(|X_n - X| \geqslant 2) = P(Y \geqslant 1) + P(Y \leqslant -1) = 1 - P(Y < 1) + P(Y \leqslant -1) = 1 - P(Y \leqslant 1) + P(Y \leqslant -1)$.

$P(|X_n - X| \geqslant 2) = 1 - \phi(1) + (1 - \phi(1)) = 2(1 - \phi(1)) > 0$.

Alors la suite $(P(|X_n - X| \geqslant 2))_{n\geqslant 0}$ est une suite constante et non égale à 0.

Alors $(P(|X_n - X| \geqslant 2))_{n\geqslant 0}$ ne converge pas vers 0.

Ainsi il existe un réel strictement positif ε tel que $(P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon))_{n\geqslant 0}$ ne converge pas vers 0.

Donc $(X_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas vers X en probabilité.

Exercice **La convergence en loi ne donne pas la convergence en probabilité again**

$(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi uniforme sur $[\![1, r]\!]$ ($r \in [\![2, +\infty[\![$) et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la même loi.

a) Montrer que converge $(X_n)_{n\geqslant 0}$ en loi vers X.

b) Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas en probabilité vers X

(on pourra montrer que $1 - \dfrac{1}{r} = P(|X_p - X_q| \geqslant 1) \leqslant P(|X_p - X| \geqslant \dfrac{1}{2}) + P(|X_q - X| \geqslant \dfrac{1}{2})$ et raisonner par l'absurde).

---

a) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ la fonction de répartition F_{X_n} de X_n est égale à la fonction de répartition F_X de X.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$!!

ceci suffit largement à démontrer que $\underline{(X_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge en loi vers } X}$.

b) Soit p et q deux éléments distincts de $\mathbb{N}$.

$P(|X_p - X_q| \geqslant 1) = 1 - P(|X_p - X_q| < 1) = 1 - P(|X_p - X_q| = 0) = 1 - P(X_p = X_q)$.
$|X_p - X_q|$ prend des valeurs dans $\mathbb{N}$!!

$(\{X_p = k\})_{k \in [\![1,r]\!]}$ est un système complet d'événements.

Alors $P(X_p = X_q) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} P(\{X_p = X_q\} \cap \{X_p = k\}) = \sum_{k=1}^{r} P(\{X_q = k\} \cap \{X_p = k\})$. Par indépendance il vient :

$P(X_p = X_q) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} P(X_q = k)\, P(X_p = k) = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{r} \times \frac{1}{r} = \frac{1}{r}$ car $X_p \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,r]\!])$ et $X_q \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,r]\!])$.

Alors $\underline{P(|X_p - X_q| \geqslant 1) = 1 - \frac{1}{r}}$.

Soit $\omega \in \Omega$. Supposons $1 \leqslant |X_p(\omega) - X_q(\omega)|$.

Alors $1 \leqslant |X_p(\omega) - X(\omega) + X(\omega) - X_q(\omega)| \leqslant |X_p(\omega) - X(\omega)| + |X(\omega) - X_q(\omega)|$

$1 \leqslant |X_p(\omega) - X(\omega)| + |X_q(\omega) - X(\omega)|$. Alors on ne peut pas avoir $|X_p(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{2}$ et $|X_q(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{2}$ car on n'a pas $1 < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$! Alors ou $|X_p(\omega) - X(\omega)| \geqslant \frac{1}{2}$ ou $|X_q(\omega) - X(\omega)| \geqslant \frac{1}{2}$.

$\forall \omega \in \Omega$, $1 \leqslant |X_p(\omega) - X_q(\omega)| \to |X_p(\omega) - X(\omega)| \geqslant \frac{1}{2}$ ou $|X_q(\omega) - X(\omega)| \geqslant \frac{1}{2}$.

donc $\{1 \leqslant |X_p - X_q|\} \subset \{|X_p - X| \geqslant \frac{1}{2}\} \cup \{|X_q - X| \geqslant \frac{1}{2}\}$. Par croissance on obtient :

$P(1 \leqslant |X_p - X_q|) \leqslant P(\{|X_p - X| \geqslant \frac{1}{2}\} \cup \{|X_q - X| \geqslant \frac{1}{2}\})$.

<u>Rappel</u>. $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leqslant P(A) + P(B)$. Alors :

$1-\frac{1}{r} = P(1 \leq |X_p - X_q|) \leq P(|X_p - X| \geq \frac{1}{2}) + P(|X_q - X| \geq \frac{1}{2})$.

$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $p \neq q \Rightarrow 1 - \frac{1}{r} \leq P(|X_p - X| \geq \frac{1}{2}) + P(|X_q - X| \geq \frac{1}{2})$.

Notons que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $p \neq 2p$.

Alors $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $1 - \frac{1}{r} \leq P(|X_p - X| \geq \frac{1}{2}) + P(|X_{2p} - X| \geq \frac{1}{2})$. (*)

Supposons que $(X_n)_{n \geq 0}$ converge en probabilité vers X.

Alors $\lim_{p \to +\infty} P(|X_p - X| \geq \frac{1}{2}) = \lim_{p \to +\infty} P(|X_{2p} - X| \geq \frac{1}{2}) = 0$

En faisant tendre p vers $+\infty$ dans (*) il vient $1 - \frac{1}{r} \leq 0$. Ceci contredit le fait que $r \in [\![2, +\infty[\![$.

Ainsi $(X_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas en probabilité vers X.

Exercice **La convergence en loi ne donne pas la convergence en probabilité again.**

$(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre p ($p \in]0,1[$).

Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge en loi vers X_0 mais ne converge pas en probabilité vers cette variable.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction de répartition F_{X_n} de X_n est égale à la fonction de répartition F_{X_0} de X_0. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{X_n}(x) = F_{X_0}(x)$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{X_n}(x) = F_{X_0}(x)$.

  ceci suffit très largement pour dire que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge en loi vers X_0.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $T_n = |X_n - X_0|$. $T_n(\Omega) = \{0, 1\}$.

  $P(T_n = 0) = P(|X_n - X_0| = 0) = P(X_n = X_0) = P(\{X_n = X_0\} \cap \{X_0 = 0\}) + P(\{X_n = X_0\} \cap \{X_0 = 1\})$

  $P(T_n = 0) = P(\{X_n = 0\} \cap \{X_0 = 0\}) + P(\{X_n = 1\} \cap \{X_0 = 1\})$. Par indépendance il vient :

  $P(T_n = 0) = P(X_n = 0)\,P(X_0 = 0) + P(X_n = 1)\,P(X_0 = 1) = q^2 + p^2$.

  Alors $P(T_n = 1) = 1 - P(T_n = 0) = 1 - (p^2 + q^2) = (p+q)^2 - (p^2 + q^2) = 2pq$.

  Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(|X_n - X_0| \geqslant \frac{1}{2}\right) = P\left(T_n \geqslant \frac{1}{2}\right) = P(T_n = 1) = 2pq > 0$.

  La suite $\left(P\left(|X_n - X_0| \geqslant \frac{1}{2}\right)\right)_{n\geqslant 1}$ est minorée par une constante strictement positive donc elle ne peut pas tendre vers 0.

  Ainsi il existe un réel ε tel que $\left(P(|X - X_n| \geqslant \varepsilon)\right)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas vers 0.

  Alors $(X_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas en probabilité vers X.

Question 24 ESCP 2010 D. ATTIAS $\boxed{\textbf{F1}}$

On lance une pièce qui donne face avec la probabilité p (où p appartient $]0,1[$). n est entier supérieur ou égal 1. On note : P_n (resp. F_n) la variable aléatoire égale au nombre de piles (resp. faces) obtenus au cours des n premiers lancers. ε est un réel strictement positif.

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{F_n-P_n}{n}-(1-2p)\right| \leqslant \varepsilon\right) = 1.$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $X_n = \frac{F_n - P_n}{n}$. $X_n = \frac{(n-P_n)-P_n}{n} = 1 - \frac{2P_n}{n}$. Posons $q = 1-p$.

$P_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. $E(P_n)$ (resp. $V(P_n)$) existe et vaut np (resp. npq)

Alors $E(X_n)$ existe et vaut $1 - \frac{2}{n} \times np$ donc $1-2p$ et $V(X_n)$ existe et vaut $\left(-\frac{2}{n}\right)^2 \times npq$ donc $\frac{4pq}{n}$.

- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant P(|X_n - E(X_n)| > \varepsilon) \leqslant \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2}$. Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4pq}{n\varepsilon^2}\right) = 0$.

Par encadrement on obtient $\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - E(X_n)| > \varepsilon) = 0$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - E(X_n)| \leqslant \varepsilon) = \lim_{n\to+\infty} \big(1 - P(|X_n - E(X_n)| > \varepsilon)\big) = 1$.

Finalement $\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{F_n - P_n}{n} - (1-2p)\right| \leqslant \varepsilon\right) = 1$.

Ainsi $\left(\frac{F_n - P_n}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ converge en probabilité vers $1-2p$.

EXERCICE.- Retrouver ce résultat avec la loi faible des grands nombres.