CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Jeudi 20 Mai 1999, de 8h. à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans tout le problème l'espérance d'une variable aléatoire Y sera notée $\mathbb{E}(Y)$.
Tous les polynômes de ce problème sont à coefficients réels.

Pour tout entier naturel k, on note E_k l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus k.
À tout entier naturel n non nul et à toute suite $(s_0, s_1, \ldots, s_{2n})$ de $2n+1$ réels, on associe les applications Φ_n et S_n définies de la manière suivante :

pour tout élément (A, B) de $E_n \times E_n$ avec $A = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $B = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j$, on pose

$$\Phi_n(A, B) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_i b_j s_{i+j} = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} a_i b_j s_{i+j}$$

et, pour tout polynôme C élément de E_{2n}, avec $C = \sum_{i=0}^{2n} c_i X^i$, on pose $S_n(C) = \sum_{i=0}^{2n} c_i s_i$.

1) a) Vérifier que, pour tout entier naturel n, Φ_n est une forme bilinéaire symétrique sur $E_n \times E_n$.

b) Vérifier que, pour tout entier naturel n, S_n est une forme linéaire sur E_{2n} et, pour tout élément (A, B) de $E_n \times E_n$, prouver l'égalité : $\Phi_n(A, B) = S_n(AB)$ (*on commencera par considérer le cas où $A = X^i$ et $B = X^j$ avec $0 \leqslant i, j \leqslant n$.*)

2) Deux cas particuliers

a) Dans cette sous-question on suppose que $n = 1$ et $s_0 = 1$, s_1 et s_2 étant quelconques. Pour tout élément (a, b) de $\mathbb{R}^2$, vérifier l'égalité :

$$\Phi_1(aX + b, aX + b) = (b + as_1)^2 + a^2(s_2 - s_1^2)$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante, portant sur les réels s_1 et s_2, pour que l'application Φ_1 soit un produit scalaire sur $E_1 \times E_1$.

b) Dans cette sous-question on suppose que $n = 2$, $s_0 = 1$ et $s_1 = s_3 = 0$, s_2 et s_4 étant quelconques. Prouver que l'application Φ_2, associée à un tel choix de $(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4)$, est un produit scalaire sur $E_2 \times E_2$ si et seulement si les réels s_2 et s_4 vérifient les conditions suivantes : $s_2 > 0$ et $s_4 - s_2^2 > 0$.

3) Deux exemples

Dans cette question on considère un entier naturel n non nul.

a) Dans cette sous-question, on se donne un entier naturel d non nul et une variable aléatoire discrète Y, prenant d valeurs distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d$, avec les probabilités, strictement positives, respectives $p_1, p_2, \ldots, p_d$, et on pose, pour tout entier naturel k :

$$s_k = \mathbb{E}(Y^k) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i^k p_i$$

On considère les applications Φ_n et S_n associées à ce choix de $(s_0, s_1, \ldots, s_{2n})$.

i) Pour tout polynôme Q de E_{2n}, vérifier l'égalité : $S_n(Q) = \sum_{i=1}^{d} Q(\alpha_i) p_i$.

ii) En déduire une condition nécessaire et suffisante, portant sur n et d, pour que l'application Φ_n soit un produit scalaire sur $E_n \times E_n$.

b) i) Dans cette sous-question, on considère une variable aléatoire Y dont une densité f est continue sur le segment $[0, 1]$ et nulle en dehors de $[0, 1]$. On pose, pour tout entier naturel k,

$$s_k = \mathbb{E}(Y^k) = \int_0^1 t^k f(t)\, dt$$

Vérifier que l'application Φ_n, associée à ce choix de $(s_0, s_1, \ldots, s_{2n})$, est un produit scalaire sur $E_n \times E_n$.

ii) Montrer que, dans le cas où $(s_0, s_1, \ldots, s_{2n}) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{2n+1}\right)$, l'application Φ_n, associée à ce choix, est un produit scalaire sur $E_n \times E_n$.

4) Dans cette question on revient au cas général où on considère un entier naturel n non nul, une suite $(s_0, s_1, \ldots, s_{2n})$ de $2n + 1$ réels et les applications Φ_n et S_n associées à cette suite.

On admet le résultat suivant : tout polynôme P peut s'écrire sous la forme

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - \zeta_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{l} (X^2 + b_j X + c_j)$$

où r et l sont des entiers naturels (avec la convention que si r ou l est nul, le produit correspondant vaut 1), où λ est un réel, où, si r est non nul, $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_r$ sont les racines réelles distinctes de P, de multiplicités respectives $m_1, m_2, \ldots, m_r$, et où, si l est non nul, $b_1, b_2, \ldots, b_l, c_1, c_2, \ldots, c_l$ sont des réels vérifiant $b_j^2 - 4c_j < 0$ pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant l$.

Un polynôme **non nul** P, à coefficients réels, est dit **positif** si, pour tout réel x, $P(x) \geqslant 0$.

a) Montrer que la multiplicité d'une racine réelle d'un polynôme positif est paire.

b) Montrer que tout polynôme P positif de degré 2 est somme de deux carrés de polynômes, c'est-à-dire qu'il existe un couple (A, B) de polynômes, tel que $P = A^2 + B^2$.

c) En remarquant que, si A, B, C, D sont quatre polynômes, on a :

$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC + BD)^2 + (AD - BC)^2$$

montrer que tout polynôme positif est somme de deux carrés de polynômes.

d) Montrer que Φ_n est un produit scalaire sur $E_n \times E_n$ si et seulement si, pour tout polynôme P positif, élément de $\cancel{E_n}$ E_{2n}, on a : $S_n(P) > 0$.

5) Dans cette question on suppose que $n = 2$ et $(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right)$.

a) À l'aide du procédé d'orthonormalisation de Schmidt, construire, à partir de la base $(1, X, X^2)$, une base orthonormale de E_2 pour le produit scalaire Φ_2.

b) Pour tous (a_0, a_1, a_2) et (b_0, b_1, b_2), éléments de $\mathbb{R}^3$, vérifier l'égalité :

$$\Phi_2(a_2X^2 + a_1X + a_0, b_2X^2 + b_1X + b_0) = {}^tAMB$$

où $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$.

c) Déterminer une matrice T triangulaire telle que : ${}^tTMT = I_3$ (I_3 désignant la matrice identité d'ordre 3).

6) Jusqu'à la fin du problème, on considère un entier naturel n non nul, une suite $(s_0, s_1, \ldots, s_{2n})$, de premier terme $s_0 = 1$, telle que Φ_n soit un produit scalaire sur $E_n \times E_n$, et on note $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ la base orthonormale de E_n pour le produit scalaire Φ_n obtenue, par le procédé de Schmidt, à partir de la base $(1, X, \ldots, X^n)$, le polynôme P_i étant de degré i pour tout entier i compris entre 0 et n.

a) En considérant le nombre $\Phi_n(P_n, 1)$, prouver que le polynôme P_n ne peut pas garder un signe fixe sur $\mathbb{R}$. En déduire que P_n possède au moins une racine réelle de multiplicité impaire.

b) On note $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ les racines réelles de P_n de multiplicité impaire. Montrer que P_n s'écrit sous la forme, $P_n = \varepsilon Q \prod_{i=1}^{k}(X - \alpha_i)$, où ε est élément de $\{-1, 1\}$ et Q est un polynôme positif de E_n.

En considérant le nombre $\Phi_n\left(P_n, \varepsilon \prod_{i=1}^{k}(X - \alpha_i)\right)$, montrer que $k = n$.

7) On note $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les n racines du polynôme P_n, réelles et distinctes deux à deux selon la question précédente.

Pour tout élément k de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on note L_k le polynôme $L_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - \alpha_i}{\alpha_k - \alpha_i}$.

a) Montrer que $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ est une base de E_{n-1} et, pour tout polynôme R de E_{n-1}, justifier l'égalité : $R = \sum_{i=1}^{n} R(\alpha_i) L_i$. En déduire $\sum_{i=1}^{n} L_i$.

b) Soit A un polynôme, élément de E_{2n-1}.

i) Justifier l'existence d'un couple (Q, R) élément de $E_{n-1} \times E_{n-1}$ tel que $A = P_nQ + R$.

ii) Vérifier que $S_n(A) = S_n(R)$, puis que $S_n(A) = \sum_{i=1}^{n} A(\alpha_i) S_n(L_i)$.

c) Pour tout élément k de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on pose $p_k = S_n(L_k)$.

Vérifier que $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ et, en considérant $S_n(L_k^2)$, montrer que $p_k > 0$.

d) Déduire de ce qui précède qu'il existe une variable aléatoire discrète Y vérifiant, pour tout élément k de $\{0, 1, \ldots, 2n - 1\}$, $s_k = \mathbb{E}(Y^k)$.

e) Déterminer la loi d'une telle variable aléatoire, dans le cas où $n = 2$ et $(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right)$.

Q1 a) Soient $A=\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, $B=\sum_{i=0}^{n} b_i X^i$, $C=\sum_{i=0}^{n} c_i X^i$ trois éléments de E_n et soit λ un réel.

$$\phi_n(\lambda A+B,C)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(\lambda a_i+b_i)c_j s_{i+j}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(\lambda a_i c_j s_{i+j}+b_i c_j s_{i+j})$$

$$\phi_n(\lambda A+B,C)=\lambda\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}a_i c_j s_{i+j}+\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}b_i c_j s_{i+j}=\lambda\,\phi_n(A,C)+\phi_n(B,C)$$

$$\phi_n(B,A)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}b_i a_j s_{i+j}=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}a_j b_i s_{j+i}=\phi_n(A,B)$$

$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall(A,B,C)\in E_n^3,\ \phi_n(\lambda A+B,C)=\lambda\phi_n(A,C)+\phi_n(B,C)$ et $\phi_n(B,A)=\phi_n(A,B)$

ϕ_n est alors une application de $E_n\times E_n$ dans $\mathbb{R}$ linéaire à gauche et symétrique.

Cela suffit pour dire que ϕ_n est une forme bilinéaire symétrique sur E_n.

Remarque.. Dès lors ϕ_n est un produit scalaire sur E_n si $\forall A\in E_n,\ \phi_n(A,A)\geq 0$ et $\forall A\in E_n,\ \phi_n(A,A)=0\Rightarrow A=0_{E_n}$

b) • S_n est une application de E_{2n} dans $\mathbb{R}$.

• Soient $A=\sum_{i=0}^{2n}a_iX^i$, $B=\sum_{i=0}^{2n}b_iX^i$ deux éléments de E_{2n} et λ un réel.

$$S_n(\lambda A+B)=S_n\left(\sum_{i=0}^{2n}(\lambda a_i+b_i)X^i\right)=\sum_{i=0}^{2n}(\lambda a_i+b_i)s_i=\lambda\sum_{i=0}^{2n}a_i s_i+\sum_{i=0}^{2n}b_i s_i$$

$S_n(\lambda A+B)=\lambda S_n(A)+S_n(B)$.

S_n est une application de E_{2n} dans $\mathbb{R}$ et $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall(A,B)\in E_{2n}^2,\ S_n(\lambda A+B)=\lambda S_n(A)+S_n(B)$.

S_n est une forme linéaire sur E_{2n}.

Soit $(i,j)\in[\![0,n]\!]^2$.

$S_n(X^iX^j)=S_n(X^{i+j})=s_{i+j}$

Posons $\forall(k,\ell)\in[\![0,n]\!]^2,\ \delta_{k,\ell}=\begin{cases}1 \text{ si } k=\ell\\ 0 \text{ si } k\neq\ell\end{cases}$. $X^i=\sum_{k=0}^{n}\delta_{ik}X^k$ et $X^j=\sum_{\ell=0}^{n}\delta_{j\ell}X^\ell$

$\phi_n(X^i,X^j)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}\delta_{ik}\delta_{j\ell}s_{k+\ell}$. Notons que $\delta_{ik}\delta_{j\ell}=\begin{cases}1 \text{ si } k=i \text{ et } \ell=j\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$

Donc $\phi_n(X^i,X^j)=s_{i+j}=S_n(X^iX^j)$

$\forall(i,j)\in[\![0,n]\!]^2,\ \phi_n(X^i,X^j)=S_n(X^iX^j)$.

Soit $A = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et soit $B = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j$ deux éléments de E_n.

ϕ_n est bilinéaire

$\phi_n(A,B) = \phi_n\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i, \sum_{j=0}^{n} b_j X^j\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j \, \phi_n(X^i, X^j) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j \, S_n(X^i X^j)$

$\phi_n(A,B) = S_n\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j X^i X^j\right) = S_n(AB)$

S_n est linéaire

Donc $\underline{\forall (A,B) \in E_n^2, \ \phi_n(A,B) = S_n(AB).}$

Q2 a) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$\phi_1(aX+b, aX+b) = a^2\phi_1(X,X) + 2ab\,\phi_1(X,1) + b^2\phi_1(1,1)$

$\phi_1(aX+b, aX+b) = a^2 s_2 + 2ab\, s_1 + b^2 s_0 = a^2 s_2 + 2ab\, s_1 + b^2 \quad (s_0 = 1)$

$\phi_1(aX+b, aX+b) = (b + a s_1)^2 + a^2(s_2 - s_1^2).$

$\underline{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \ \phi_1(aX+b, aX+b) = (b + a s_1)^2 + a^2(s_2 - s_1^2).}$

* Supposons que ϕ_1 soit un produit scalaire. Posons $A = X - s_1$; $A \in E_1$.

A n'est pas nul donc $\phi_1(A,A) > 0$.

Ainsi $0 < \phi_1(A,A) = \phi_1(X - s_1, X - s_1) = (-s_1 + 1 \times s_1)^2 + 1^2(s_2 - s_1^2) = s_2 - s_1^2$

Donc $s_2 - s_1^2 > 0$

* Réciproquement supposons $s_2 - s_1^2 > 0$.

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \ \phi_1(aX+b, aX+b) = (b + a s_1)^2 + a^2(s_2 - s_1^2) \geq 0$,

$\forall A \in E_1, \ \phi_1(A,A) \geq 0$.

Soit $A = aX + b \in E_1$ tel que $\phi_1(A,A) = 0$. $(b + a s_1)^2 + a^2(s_2 - s_1^2) = 0$,

ainsi $b + a s_1 = a^2(s_2 - s_1^2) = 0$ car $s_2 - s_1^2 > 0$.

Donc $a = 0$ et $b + a s_1 = 0$, $a = b = 0$. $A = 0_{E_1}$.

$\forall A \in E_1, \ \phi_1(A,A) = 0 \Rightarrow A = 0_{E_1}$

Donc ϕ_1 est un produit scalaire sur E_1 (nous savions déjà que ϕ_1 était bilinéaire et symétrique).

Conclusion.. $\underline{\phi_1 \text{ est un produit scalaire sur } E_1 \text{ si et seulement si } s_2 - s_1^2 > 0 \ldots}$

$\underline{\text{lorsque } s_0 = 1.}$

b) Soit $A=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

$\varphi_2(aX^2+bX+c,aX^2+bX+c)=a^2\varphi_2(X^2,X^2)+b^2\varphi_2(X,X)+c^2\varphi_2(1,1)+2ab\,\varphi_2(X^2,X)+2ac\,\varphi_2(X^2,1)$
$+2bc\,\varphi_2(X,1)=a^2s_4+b^2s_2+c^2s_0+2ab\,s_3+2ac\,s_2+2bc\,s_1=a^2s_4+b^2s_2+c^2+2ac\,s_2$
$=(c+as_2)^2+b^2s_2+a^2(s_4-s_2^2)$.

$\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \varphi_2(aX^2+bX+c,aX^2+bX+c)=(c+as_2)^2+b^2s_2+a^2(s_4-s_2^2)$.

* Supposons que φ_2 soit un produit scalaire sur E_2.
Posons $A=X$ et $B=X^2-s_2$. $A\in E_2$, $B\in E_2$, $A\neq0$ et $B\neq0$ donc $\varphi_2(A,A)>0$ et
$\varphi_2(B,B)>0$.
$0<\varphi_2(A,A)=\varphi_2(X,X)=s_2$; $s_2>0$.
$0<\varphi_2(B,B)=\varphi_2(X^2-s_2,X^2-s_2)=(-s_2+1\times s_2)^2+0^2s_2+1^2(s_4-s_2^2)=s_4-s_2^2$; $s_4-s_2^2>0$.

* Réciproquement supposons que : $s_2>0$ et $s_4-s_2^2>0$.
Soit $A=aX^2+bX+c\in E_2$.
$\varphi_2(A,A)=(c+as_2)^2+b^2s_2+a^2(s_4-s_2^2)\geqslant0$ car $s_2>0$ et $s_4-s_2^2>0$.
Supposons $\varphi_2(A,A)=0$. Alors $(c+as_2)^2=b^2s_2=a^2(s_4-s_2^2)=0$ $(s_2>0$ et $s_4-s_2^2>0)$
Donc $a=0$, $b=0$ et $c+as_2=0$ $(s_2\neq0$ et $s_4-s_2^2\neq0)$
Ainsi $a=b=c=0$ et $A=0_{E_2}$.
$\forall A\in E_2,\ \varphi_2(A,A)\geqslant0$ et $\forall A\in E_2,\ \varphi_2(A,A)=0\Rightarrow A=0$. φ_2 est un produit scalaire sur E_2

Lorsque $s_0=1$ et $s_1=s_3=0$: φ_2 est un produit scalaire si et seulement si $s_2>0$ et $s_4-s_2^2>0$.

(Q3) a) i) Soit $Q=\sum_{k=0}^{2n}\lambda_kX^k\in E_{2n}$.

$S_n(Q)=\sum_{k=0}^{2n}\lambda_k s_k=\sum_{k=0}^{2n}\lambda_k\sum_{i=1}^{d}\alpha_i^k p_i=\sum_{i=1}^{d}p_i\sum_{k=0}^{2n}\lambda_k\alpha_i^k=\sum_{i=1}^{d}p_i\,Q(\alpha_i)$.

$\forall Q\in E_{2n},\ S_n(Q)=\sum_{i=1}^{d}Q(\alpha_i)p_i$.

ii) Supposons $d>n$. Soit $P\in E_n$.

$\varphi_n(P,P)=S_n(P\times P)=S_n(P^2)=\sum_{i=1}^{d}(P(\alpha_i))^2p_i\geqslant0$; $\varphi_n(P,P)\geqslant0$

Supposons $\varphi_n(P,P)=0$. $\sum_{i=1}^{d} P(\alpha_i)^2 p_i = 0$. $\forall i \in [\![1,d]\!]$, $(P(\alpha_i))^2 p_i = 0$.

$\forall i \in [\![1,d]\!]$, $P(\alpha_i)=0$ ($p_i \neq 0$...)

$P\in E_n$ et P admet au moins d zéros distincts $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$

donc $P\in E_n$ et P admet au moins $n+1$ zéros car $d>n$; ainsi $P=0_{E_n}$.

$\forall P\in E_n$, $\varphi_n(P,P)\geq 0$ et $\forall P\in E_n$, $\varphi_n(P,P)=0 \Rightarrow P=0_{E_n}$.

donc si $d>n$: φ_n est un produit scalaire

(ii) Supposons $d\leq n$. Posons $P=\prod_{i=1}^{d}(X-\alpha_i)$; $\forall i\in[\![1,d]\!]$, $P(\alpha_i)=0$.

$P\in E_n$, $P\neq 0_{E_n}$ et $\varphi_n(P,P)=\sum_{i=1}^{d}(P(\alpha_i))^2 p_i = 0$. φ_n n'est donc pas un produit scalaire.

Finalement $\underline{\underline{\varphi_n \text{ est un produit scalaire si et seulement si } d>n.}}$

b) Soit $P=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i X^i \in E_n$.

$$\varphi_n(P,P)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\lambda_i\lambda_j a_{i+j}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\lambda_i\lambda_j\int_0^1 t^{i+j}f(t)\,dt$$

$$\varphi_n(P,P)=\int_0^1\Big(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\lambda_i\lambda_j t^{i+j}\Big)f(t)\,dt=\int_0^1\Big(\sum_{i=0}^{n}\lambda_i t^i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n}\lambda_j t^j\Big)f(t)\,dt$$

$$\varphi_n(P,P)=\int_0^1 (P(t))^2 f(t)\,dt.$$

$\forall t\in[0,1]$, $f(t)\geq 0$ (f est une densité de probabilité).

$\forall t\in[0,1]$, $(P(t))^2 f(t)\geq 0$. Ainsi $\varphi_n(P,P)=\int_0^1 (P(t))^2 f(t)\,dt \geq 0$

Supposons $\varphi_n(P,P)=0$. $t\mapsto (P(t))^2 f(t)$ est positive et continue sur $[0,1]$ et

$\int_0^1 (P(t))^2 f(t)\,dt=0$. Par conséquent $\forall t\in[0,1]$, $(P(t))^2 f(t)=0$.

$\int_0^1 f(t)\,dt=1$ donc f n'est pas identiquement nulle sur $[0,1]$; $\exists a\in[0,1]$, $f(a)\neq 0$.

f est continue en a ; $\forall \varepsilon\in\mathbb{R}^*_+$, $\exists \eta\in\mathbb{R}^*_+$, $\forall x\in[0,1]$, $|x-a|<\eta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$

Posons $\varepsilon=\frac{|f(a)|}{2}$.

$\forall x\in[0,1]\cap]a-\eta,a+\eta[$, $|f(a)|-|f(x)| \leq \big||f(a)|-|f(x)|\big| \leq |f(a)-f(x)|=|f(x)-f(a)|<\frac{|f(a)|}{2}$.

donc $\forall x\in[0,1]\cap]a-\eta,a+\eta[,\quad |f(a)|-|f(x)|<\frac{|f(a)|}{2}$

$\forall x\in[0,1]\cap]a-\eta,a+\eta[,\quad |f(x)|>\frac{|f(a)|}{2}>0$

$\forall x\in[0,1]\cap]a-\eta,a+\eta[,\quad f(x)\neq 0$

$\forall x\in[0,1]\cap]a-\eta,a+\eta[,\quad f(x)\neq 0$ & $(P(x))^2f(x)=0$

$\forall x\in[0,1]\cap]a-\eta,a+\eta[,\quad P(x)=0$. Or $[0,1]\cap]a-\eta,a+\eta[$ contient une infinité de points. P admet alors une infinité de zéro ; $P=0_{E_n}$.

Ainsi $\forall P\in E_n,\ \phi_n(P,P)\geqslant 0$ et $\forall P\in E_n,\ \phi_n(P,P)=0\Rightarrow P=0_{E_n}$.

ϕ_n est un produit scalaire sur E_n.

ii) Posons $\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=\begin{cases}1 & \text{si } t\in[0,1]\\ 0 & \text{si } t\notin[0,1]\end{cases}$. f est une densité de probabilité

(associée a une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[0,1]$)

f est continue sur $[0,1]$ et nulle en dehors de $[0,1]$

$\forall k\in\mathbb{N},\ \int_0^1 t^k f(t)\,dt=\int_0^1 t^k dt=\frac{1}{k+1}$. $\forall k\in[\![0,2n]\!],\ s_k=\int_0^1 t^k f(t)\,dt$

d'après ce qui précède : ϕ_n est un produit scalaire sur E_n.

(Q4) a) Soit P un polynôme positif non nul à coefficient réel.

P peut s'écrire sous la forme $P=\lambda\prod_{i=1}^{r}(X-\xi_i)^{m_i}\prod_{j=1}^{\ell}(X^2+b_jX+c_j)$ avec

$r\in\mathbb{N}$, $\ell\in\mathbb{N}$, $\forall i\in[\![1,r]\!]$, $\xi_i\in\mathbb{R}$ et $m_i\in\mathbb{N}^*$, $\forall j\in[\![1,\ell]\!]$, $b_j\in\mathbb{R}$, $c_j\in\mathbb{R}$ et $b_j^2-4c_j<0$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$

$\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)\geqslant 0$ et $\forall j\in[\![1,\ell]\!],\ \forall x\in\mathbb{R},\ x^2+b_jx+c_j>0\quad (b_j^2-4c_j<0)$

donc $\forall x\in\mathbb{R},\ \lambda\prod_{i=1}^{r}(x-\xi_i)^{m_i}\geqslant 0$. Supposons $r\geqslant 1$.

Si x est un réel strictement supérieur à $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_r$ alors $\prod_{i=1}^{r}(x-\xi_i)>0$.

Ainsi $\lambda\geqslant 0$. Mieux $\lambda>0$ car $P\neq 0$.

Par conséquent : $\forall x\in\mathbb{R},\ \prod_{i=1}^{r}(x-\xi_i)^{m_i}\geqslant 0$.

Soit $k\in[\![1,r]\!]$. Il existe un réel strictement positif α tel que $[\xi_k-\alpha,\xi_k+\alpha]$ ne contienne pas $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{k-1},\xi_{k+1},\dots,\xi_r$. Sur cet intervalle $\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{r}(x-\xi_i)^{m_i}$ est soit strictement positif soit strictement négatif ; sur ce même intervalle $\prod_{i=1}^{r}(x-\xi_i)^{m_i}$ est positif, mieux

Récap : sur $[\xi_\ell-\alpha, \xi_\ell+\alpha]$ $\prod_{i=1}^{r}(X-\xi_i)^{m_i}$ est positif et ne s'annule qu'en ξ_ℓ

tout cela natié alors que sur $[\xi_\ell-\alpha, \xi_\ell+\alpha]$, $(X-\xi_\ell)^{m_\ell}$ garde un signe constant.

ceci exige alors que m_ℓ soit pair.

Ainsi si $r\in\mathbb{N}^*$, pour tout ℓ dans $[\![1,r]\!]$, m_ℓ est pair.

<u>La multiplicité d'une racine réelle d'un polynôme positif est paire.</u>

b) Soit P un polynôme positif de degré 2.

$\exists (a,b,c)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $P=aX^2+bX+c$.

$P=a\left[\left(X+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(X+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$

$b^2-4ac\leq 0$ car si $b^2-4a>0$ P admet deux zéros distincts et ne garde pas un signe constant sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\forall x\in\mathbb{R}-\{\frac{b}{2a}\}$, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}>0$.

Comme : $\forall x\in\mathbb{R}$, $P(x)\geq 0$: $a\geq 0$. Récap : $a>0$ $(a\in\mathbb{R}^*)$.

Finalement $P=(\sqrt{a})^2\left[\left(X+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^2\right]$ ou $P=\left(\sqrt{a}\left(X+\frac{b}{2a}\right)\right)^2+\left(\sqrt{a}\,\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^2$

Posons $A=\sqrt{a}\left(X+\frac{b}{2a}\right)$ et $B=\sqrt{a}\,\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4ac-b^2}{a}}$.

Alors A et B sont deux polynômes tels que : $P=A^2+B^2$.

<u>Tout polynôme positif de degré 2 est somme de deux carrés de polynômes.</u>

c) Vérifions d'abord l'égalité. Soient A, B, C et D quatre polynômes.

$(AC+BD)^2+(AD-BC)^2=A^2C^2+B^2D^2+2ACBD+A^2D^2+B^2C^2-2ADBC$

$(AC+BD)^2+(AD-BC)^2=A^2(C^2+D^2)+B^2(D^2+C^2)$

$(AC+BD)^2+(AD-BC)^2=(A^2+B^2)(C^2+D^2)$. <u>$(A^2+B^2)(C^2+D^2)=(AC+BD)^2+(AD-BC)^2$.</u>

Montrons alors par récurrence que le produit de ℓ polynômes positifs de degré 2 est somme de deux carrés de polynômes.

→ C'est vrai pour $\ell=1$ d'après b)

→ Supposons la propriété vraie pour $\ell\in\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $\ell+1$.

Soit P un polynôme produit de $\ell+1$ polynômes positifs de degré 2 $P_1, P_2, \dots, P_{\ell+1}$.

$P = Q P_{\ell+1}$ avec $Q = P_1 P_2 \cdots P_\ell$.

D'après l'hypothèse de récurrence il existe deux polynômes A et B tels que : $Q = A^2+B^2$

D'après c), il existe deux polynômes C et D tels que : $P_{\ell+1} = C^2+D^2$.

Ainsi $P = Q P_{\ell+1} = (A^2+B^2)(C^2+D^2) = (AC+BD)^2+(AD-BC)^2$.

$AC+BD$ et $AD-BC$ étant deux polynômes, P est encore la somme de deux carrés de polynômes.

Ainsi s'achève la récurrence.

On peut prendre un polynôme non nul P positif et prouver qu'il est somme de deux carrés de polynômes.

en particulier

P s'écrit $P = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X-\xi_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{\ell} (X^2+b_jX+c_j)$ avec $\forall j \in [\![1,\ell]\!]$, $b_j^2-4c_j<0$ si $\ell \in \mathbb{N}^*$

Nous avons déjà vu dans Q4 a) que $\lambda > 0$ et que si $r \in \mathbb{N}^*$, pour tout $i \in [\![1,r]\!]$ m_i est pair.

Si $r=0$: $\lambda \prod_{i=1}^{r} (X-\xi_i)^{m_i} = (\sqrt{\lambda})^2$

Si $r \in \mathbb{N}^*$: $\lambda \prod_{i=1}^{r} (X-\xi_i)^{m_i} = \left(\sqrt{\lambda} \prod_{i=1}^{r} (X-\xi_i)^{\frac{m_i}{2}}\right)^2$

Dans les deux cas $\lambda \prod_{i=1}^{r} (X-\xi_i)^{m_i} = U^2$ où U est un polynôme.

Supposons $\ell \in \mathbb{N}^*$. $\forall j \in [\![1,\ell]\!]$, $X^2+b_jX+c_j$ est un polynôme positif ($b_j^2-4c_j<0$) de degré 2.

Ainsi $\prod_{j=1}^{\ell} (X^2+b_jX+c_j)$ est un produit de ℓ polynômes positifs de degré 2.

Par conséquent on peut trouver deux polynômes V et W tels que $\prod_{j=1}^{\ell} (X^2+b_jX+c_j) = V^2+W^2$

Notons que ceci vaut encore pour $\ell = 1$ (prendre $V=1$ et $W=0$).

Finalement : $P = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X-\xi_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{\ell} (X^2+b_jX+c_j) = U^2(V^2+W^2) = (UV)^2+(UW)^2$.

Posons $A = UV$ et $B = UW$. A et B sont deux polynômes tels que : $P = A^2+B^2$.

Donc <u>tout polynôme positif est somme de deux carrés de polynômes.</u>

<u>d)</u> Rappelons que φ_n est un produit scalaire sur E_n si et seulement si $\begin{cases} \forall P \in E_n,\ \varphi_n(P,P) \geq 0 \\ (\forall P \in E_n,\ \varphi_n(P,P) = 0 \Rightarrow P = 0) \end{cases}$

montrer alors que φ_n est un produit scalaire si et seulement si, pour tout polynôme P positif, élément de E_{2n}, on a : $S_n(P)>0$... ce qui sous-entend qu'un polynôme positif n'est pas nul.

• **C.N.** Supposons que φ_n est un produit scalaire. Soit P un polynôme positif de E_{2n}.

Il existe deux polynômes A et B tels que $P=A^2+B^2$.

Notons que $\deg A \leq n$ et $\deg B \leq n$ car $P=A^2+B^2$ et $\deg P \leq 2n$ (ceci n'est pas tout à fait une évidence).

$S_n(P)=S_n(A^2+B^2)=S_n(A^2)+S_n(B^2)=\varphi_n(A,A)+\varphi_n(B,B)$.

$\varphi_n(A,A)\geq 0$ et $\varphi_n(B,B)\geq 0$ donc $S_n(P)\geq 0$.

Si $S_n(P)=0$ alors $\varphi_n(A,A)=\varphi_n(B,B)=0$ d'où $A=B=0$ car φ_n est un produit scalaire.

Ainsi $S_n(P)\geq 0$ et $S_n(P)=0 \Rightarrow P=0$!

Donc si P est un polynôme positif de E_{2n} : $S_n(P)>0$.

• **C.S.** Supposons que pour tout polynôme positif P de E_{2n} : $S_n(P)>0$. Montrons que φ_n est un produit scalaire.

φ_n est déjà bilinéaire symétrique.

Soit P un élément de E_n. Si $P=0$: $\varphi_n(P,P)=0$. Supposons $P\neq 0$.

Alors P^2 est un polynôme positif de E_{2n} donc $S_n(P^2)>0$. Ainsi $\varphi_n(P,P)>0$.

Finalement si $P\in E_n$: $\varphi_n(P,P)=0$ lorsque $P=0$ et $\varphi_n(P,P)>0$ lorsque $P\neq 0$

ceci achève de montrer que φ_n est un produit scalaire sur E_n.

<u>φ_n est un produit scalaire sur E_n si et seulement si, pour tout polynôme P positif, élément de E_{2n}, on a : $S_n(P)>0$.</u>

Q5 Posons $T_0=1$, $T_1=X$ et $T_2=X^2$.

Posons $Q_0=T_0=1$ et $Q_1=T_1+\alpha Q_0$. Cherchons α pour que Q_0 et Q_1 soient orthogonaux.

$\langle Q_0,Q_1\rangle=0 \Leftrightarrow \langle Q_0,T_1\rangle+\alpha\langle Q_0,Q_0\rangle=0 \Leftrightarrow \alpha=-\dfrac{\langle Q_0,T_1\rangle}{\langle Q_0,Q_0\rangle}$

$\langle Q_0,Q_0\rangle=A_0=1$; $\langle Q_0,T_1\rangle=\langle 1,X\rangle=A_1=1/2$

Donc $\langle Q_0,Q_1\rangle=0 \Leftrightarrow \alpha=-1/2$.

Désormais $Q_0=T_0=1$ et $Q_1=T_1-\frac{1}{2}Q_0=X-\frac{1}{2}$.

Posons $Q_2=T_2+\beta Q_1+\delta Q_0$ $((\beta,\delta)\in\mathbb{R}^2)$ et cherchons β et δ pour que Q_2 soit orthogonal à Q_0 et Q_1. $\langle Q_0,Q_2\rangle=0 \Leftrightarrow \langle Q_0,T_2\rangle+\beta\langle Q_0,Q_1\rangle+\delta\langle Q_0,Q_0\rangle=0 \Leftrightarrow \delta=-\langle Q_0,T_2\rangle$

$\langle Q_0,Q_0\rangle=1$ et $\langle Q_0,Q_1\rangle=0$

$\langle \varphi_0, T_2\rangle = \langle 1, X^2\rangle = s_2 = \frac{1}{3}$. $\langle \varphi_0, \varphi_2\rangle = 0 \Leftrightarrow \delta = -\frac{1}{3}$.

$\langle \varphi_1, \varphi_2\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \varphi_1, T_2\rangle + \beta \langle \varphi_1, \varphi_1\rangle + \delta \underbrace{\langle \varphi_1, \varphi_0\rangle}_{\langle \varphi_1, \varphi_0\rangle = 0} = 0 \Leftrightarrow \beta = -\dfrac{\langle \varphi_1, T_2\rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1\rangle}$.

$\langle \varphi_1, \varphi_1\rangle = \langle \varphi_1, X - \frac{1}{2}\varphi_0\rangle = \langle \varphi_1, X\rangle - \frac{1}{2}\langle \varphi_1, \varphi_0\rangle = \langle \varphi_1, X\rangle = \langle X - \frac{1}{2}, X\rangle = \langle X, X\rangle - \frac{1}{2}\langle 1, X\rangle = s_2 - \frac{1}{2}s_1$

$\langle \varphi_1, \varphi_1\rangle = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

$\langle \varphi_1, T_2\rangle = \langle X - \frac{1}{2}, X^2\rangle = \langle X, X^2\rangle - \frac{1}{2}\langle 1, X^2\rangle = s_3 - \frac{1}{2}s_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.

$\langle \varphi_1, \varphi_2\rangle = 0 \Leftrightarrow \beta = -\dfrac{\langle \varphi_1, T_2\rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1\rangle} = -\dfrac{1/12}{1/12} = -1$.

Dès lors posons $\beta = -1$ et $\delta = -\frac{1}{3}$. $\varphi_2 = T_2 - \varphi_1 - \frac{1}{3}\varphi_0 = X^2 - (X - \frac{1}{2}) - \frac{1}{3} = X^2 - X + \frac{1}{6}$.

$(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) = (1, X - \frac{1}{2}, X^2 - X + \frac{1}{6})$ est une famille orthogonale d'éléments non nuls de E_2;

$(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) = (1, X - \frac{1}{2}, X^2 - X + \frac{1}{6})$ est alors une famille libre de trois éléments de E_2 qui est de dimension 3. $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) = (1, X - \frac{1}{2}, X^2 - X + \frac{1}{6})$ est donc une base orthogonale de E_2.

$\left(\frac{1}{\|\varphi_0\|}\varphi_0, \frac{1}{\|\varphi_1\|}\varphi_1, \frac{1}{\|\varphi_2\|}\varphi_2\right)$ est une base orthonormale de E_2.

Rappelons que $\|\varphi_0\| = 1$ et $\|\varphi_1\| = \sqrt{\langle \varphi_1, \varphi_1\rangle} = \sqrt{1/12} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Calculons $\|\varphi_2\|$

$\langle \varphi_2, \varphi_2\rangle = \langle \varphi_2, X^2 - \varphi_1 - \frac{1}{3}\varphi_0\rangle = \langle \varphi_2, X^2\rangle - \langle \varphi_2, \varphi_1\rangle - \frac{1}{3}\langle \varphi_2, \varphi_0\rangle = \langle \varphi_2, X^2\rangle$.

$\langle \varphi_2, \varphi_2\rangle = \langle X^2 - X + \frac{1}{6}, X^2\rangle = \langle X^2, X^2\rangle - \langle X, X^2\rangle + \frac{1}{6}\langle 1, X^2\rangle = s_4 - s_3 + \frac{1}{6}s_2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{18} = \frac{1}{180}$

$\|\varphi_2\| = \sqrt{1/180} = 1/6\sqrt{5}$

Ainsi $\underline{(1, 2\sqrt{3}(X - \frac{1}{2}), 6\sqrt{5}(X^2 - X + \frac{1}{6}))}$ est une base orthonormale de E_2.

Q2 b) Observons que : $M = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{pmatrix}$. $M = (s_{i+j})_{\substack{0 \le i \le 2 \\ 0 \le j \le 2}}$

Soit (a_0, a_1, a_2) et (b_0, b_1, b_2) deux éléments de $\mathbb{R}^3$

Posons $\alpha = \Phi_2(a_2X^2 + a_1X + a_0, b_2X^2 + b_1X + b_0)$. $\alpha = \Phi_2\left(\sum_{i=0}^{2} a_i X^i, \sum_{j=0}^{2} b_j X^j\right) = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} a_i b_j \Phi_2(X^i, X^j)$

$\alpha = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} a_i b_j \, \varphi_2(X^i, X^j) = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} a_i b_j \, s_{i+j}$.

Posons $B' = \begin{pmatrix} b'_0 \\ b'_1 \\ b'_2 \end{pmatrix} = \Pi B$. $\forall i \in [\![0,2]\!]$, $b'_i = \sum_{j=0}^{2} s_{i+j}\, b_j$.

donc ${}^tA\Pi B = {}^tAB' = \sum_{i=0}^{2} a_i b'_i = \sum_{i=0}^{2} a_i\left(\sum_{j=0}^{2} s_{i+j} b_j\right) = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} a_i b_j \, s_{i+j} = \alpha$.

Ainsi si $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ et si $(b_0, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^3$ alors :

$$\varphi_2(a_2X^2 + a_1X + a_0, \; b_2X^2 + b_1X + b_0) = {}^tA\Pi B \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

c) Posons $P_0 = 1$, $P_1 = 2\sqrt{3}(X - \frac{1}{2})$ et $P_2 = 6\sqrt{5}(X^2 - X + \frac{1}{6})$.

Notons encore T la matrice de passage de la base $(1, X, X^2)$ de E_2 à la base orthonormale $(1, 2\sqrt{3}(X-\frac{1}{2}), 6\sqrt{5}(X^2 - X + \frac{1}{6})) = (P_0, P_1, P_2)$.

$T = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{5} \\ 0 & 2\sqrt{3} & -6\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 6\sqrt{5} \end{pmatrix}$. T est triangulaire supérieure.

Montrons dès lors que ${}^tT\Pi T = I_3$.

Notons U_0, U_1, U_2 les matrices de P_0, P_1 et P_2 dans la base $(1, X, X^2)$

Notons U'_0, U'_1, U'_2 les matrices de P_0, P_1 et P_2 dans la base (P_0, P_1, P_2) !

Alors $U'_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\forall i \in [\![0,2]\!]$, $TU'_i = U_i$.

$\forall (i,j) \in [\![0,2]\!]^2$, $\varphi_2(P_i, P_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

De plus $\forall (i,j) \in [\![0,2]\!]^2$, $\varphi_2(P_i, P_j) = {}^tU_i \Pi U_j = {}^t(TU'_i)\Pi TU'_j = {}^tU'_i({}^tT\Pi T)U'_j$

Ainsi $\forall (i,j) \in [\![0,2]\!]^2$, ${}^tU'_i({}^tT\Pi T)U'_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

Posons ${}^tT\Pi T = (c_{ij})_{\substack{0\le i\le 2 \\ 0 \le j \le 2}}$. Rappelons que $U'_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\forall (i,j) \in [\![0,2]\!]^2$, ${}^tU'_i({}^tT\Pi T)U'_j = {}^tU'_i \begin{pmatrix} c_{0j} \\ c_{1j} \\ c_{2j} \end{pmatrix} = c_{ij}$. Ainsi $\forall (i,j) \in [\![0,2]\!]^2$, $c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

Ceci prouve alors que : ${}^tT\Pi T = I_3$ où $T = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{5} \\ 0 & 2\sqrt{3} & -6\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 6\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

<u>Exercice de contrôle..</u> $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est une base d'un espace vectoriel euclidien (E,φ).
$M=(\varphi(e_i,e_j))_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$. Montrer que si u et v sont deux éléments de E de matrices X et Y dans $\mathcal{B}$: $\varphi(u,v)={}^tXMY$.

$\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,\dots,e'_n)$ est une seconde base de E et $M'=(\varphi(e'_i,e'_j))_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$. Montrer que $M'={}^tTMT$ où T est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Q6 <u>a)</u> $n\in\mathbb{N}^*$ donc P_n est orthogonal à P_0. Or $\text{Vect}(P_0)=\text{Vect}(1)$ donc P_n est orthogonal à 1.
Ainsi $S_n(P_n)=S_n(P_n\,1)=\varphi_n(P_n,1)=0$.
Supposons que P_n garde un signe constant. Alors ou P_n est un polynôme positif et : $S_n(P_n)>0$ (φ_n est un produit scalaire...) ou P_n est toujours négatif et $-P_n$ est alors un polynôme positif et on a : $S_n(P_n)=-S_n(-P_n)<0$!
Ainsi <u>P_n ne garde pas un signe constant.</u>

en particulier

On peut alors écrire P_n sous la forme : $P_n=\lambda\prod_{i=1}^{r}(X-\beta_i)^{m_i}\prod_{j=1}^{\ell}(X^2+b_jX+c_j)$ avec $b_j^2-4c_j<0$...

Comme P_n n'est pas constant (si P_n est constant alors $P_n\in\text{Vect}(1)\cap(\text{Vect}(1))^{\perp}=\{0_{E_n}\}$ donc $P_n=0$!)
λ est différent de zéro et r et ℓ ne sont pas simultanément nuls.
→ Si $r=0$: $P_n=\lambda\prod_{j=1}^{\ell}(X^2+b_jX+c_j)$ garde un signe constant ($\forall j\in[\![1,\ell]\!]$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $x^2+b_jx+c_j>0$).

Donc $r\geq 1$. Si pour tout $i\in[\![1,r]\!]$, m_i est pair : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\prod_{i=1}^{r}(x-\beta_i)^{m_i}\prod_{j=1}^{\ell}(x^2+b_jx+c_j)\geq 0$ et

alors P_n garde un signe constant.

Ainsi $r\geq 1$ et $\exists i\in[\![1,r]\!]$, tel que m_i soit impair.
Donc <u>P_n possède au moins une racine réelle de multiplicité impaire.</u>

<u>b)</u> Soit S le quotient de P_n par $\prod_{i=1}^{k}(X-\alpha_i)$. $P_n=\prod_{i=1}^{k}(X-\alpha_i)\,S$.

Supposons que S possède une racine réelle γ de multiplicité impaire $2\ell+1$.
1er cas.. $\gamma\notin\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k\}$ alors γ est une racine réelle de P_n d'ordre de multiplicité impaire. Ceci est contradictoire.

2ème cas.. $\gamma\in\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k\}$ alors γ est une racine réelle de P_n d'ordre de multiplicité paire ($2\ell+1+1=2(\ell+1)$). Ceci est encore contradictoire.

Ainsi si S possède une racine réelle elle est nécessairement d'ordre pair.

En écrivant une fois encore S sous la forme analogue à celle proposée en Q4 on montre aisément que S garde un signe constant sur $\mathbb{R}$.

Posons $\varepsilon = 1$ si $\forall x \in \mathbb{R},\ S(x) \geq 0$ et $\varepsilon = -1$ si $\forall x \in \mathbb{R},\ S(x) \leq 0$.

Posons encore $\varphi = \frac{1}{\varepsilon} S$

Alors $P_n = \varepsilon \varphi \prod_{i=1}^{k}(X-\alpha_i)$, $\varepsilon \in \{-1,1\}$, $\varphi \neq 0$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) \geq 0$.

Donc $P_n = \varepsilon \varphi \prod_{i=1}^{k}(X-\alpha_i)$ où $\varepsilon \in \{-1,1\}$ et où φ est un polynôme positif.

Supposons $k < n$. Alors P_n et $\varepsilon \prod_{i=1}^{k}(X-\alpha_i)$ sont orthogonaux car P_n est orthogonal à $P_0, P_1, \dots, P_k$ donc à tout élément de $\mathrm{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_k)$ ou de $\mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^k)$.

On a alors $0 = \varphi_n\left(P_n, \varepsilon \prod_{i=1}^{k}(X-\alpha_i)\right) = S_n\left(P_n\, \varepsilon \prod_{i=1}^{k}(X-\alpha_i)\right) = S_n\left(\varepsilon \varphi \prod_{i=1}^{k}(X-\alpha_i)\, \varepsilon \prod_{i=1}^{k}(X-\alpha_i)\right)$

or $\varepsilon^2 = 1$ donc $0 = S_n\left(\varphi \prod_{i=1}^{k}(X-\alpha_i)^2\right) > 0$ car φ étant un polynôme positif il en est de même pour $\varphi \prod_{i=1}^{k}(X-\alpha_i)^2$. Ainsi $0 > 0$!

Finalement $k = n$. Or $P_n = \varepsilon \varphi \prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$ et $\deg P_n \leq n$.

Nécessairement $\varepsilon \varphi$ est un polynôme constant.

Donc $\exists \gamma \in \mathbb{R},\ P_n = \gamma \prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$. Mieux $\exists \gamma \in \mathbb{R}^*,\ P_n = \gamma \prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$

Remarque. P_n admet donc n racines d'ordre 1 dans $\mathbb{R}$ et P_n est de degré n.

Q7 Base de Lagrange.

a) Observons que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\deg L_k = n-1$. Donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $L_k \in E_{n-1}$.

Montrons que $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une base de E_{n-1}. Il suffit de montrer que cette famille libre car elle est constituée de n éléments et $\dim E_{n-1} = n$.

Soit $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \gamma_k L_k = 0_{E_{n-1}}$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{k=1}^{n} \gamma_k L_k(i) = 0$. Or $\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2$, $L_k(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$

Donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\gamma_i = 0$. Ainsi $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une base de E_{n-1}.

Soit $R \in E_{n-1}$. Notons $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ les coordonnées de R dans la base $(L_1, L_2, \dots, L_n)$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $R(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} r_k L_k(\alpha_i) = r_i$.

Ainsi $\forall R \in E_{n-1}$, $R = \sum_{i=1}^{n} R(\alpha_i) L_i$.

Pour $R = 1$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $R(\alpha_i) = 1$. Or $R = \sum_{i=1}^{n} R(\alpha_i) L_i$ ainsi $\sum_{i=1}^{n} L_i = 1$.

b) Soit $A \in E_{2n-1}$. La division euclidienne de A par P_n fournit deux polynômes Q et R tels que : $A = QP_n + R$ avec $\deg R < \deg P_n = n$

$A \in E_{2n-1}$ et $R \in E_{n-1}$ donc $\deg Q + \deg P_n = \deg(Q P_n) = \deg(A-R) \leq 2n-1$.

Donc $\deg Q \leq 2n-1-\deg P_n = 2n-1-n = n-1$.

Ainsi $\exists (Q,R) \in E_{n-1} \times E_{n-1}$ tel que $A = P_n Q + R$.

$S_n(A) = S_n(P_n Q + R) = S_n(P_n Q) + S_n(R) = \varphi_n(P_n, Q) + S_n(R)$.

Or $Q \in E_{n-1} = \text{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_{n-1})$ et P_n est orthogonal à $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$; ainsi P_n et Q sont orthogonaux et donc : $\varphi_n(P_n, Q) = 0$.

Par conséquent $S_n(A) = S_n(R)$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $A(\alpha_i) = P_n(\alpha_i) Q(\alpha_i) + R(\alpha_i) = R(\alpha_i)$.

$R \in E_{n-1}$ donc $R = \sum_{i=1}^{n} R(\alpha_i) L_i = \sum_{i=1}^{n} A(\alpha_i) L_i$.

$S_n(A) = S_n(R) = S_n\left(\sum_{i=1}^{n} A(\alpha_i) L_i\right) = \sum_{i=1}^{n} A(\alpha_i) S_n(L_i)$. $S_n(A) = \sum_{i=1}^{n} A(\alpha_i) S_n(L_i)$.

c) $\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} S_n(L_k) = S_n\left(\sum_{i=1}^{n} L_i\right) = S_n(1) = S_n(1 \times 1) = \varphi_n(1,1) = s_0 = 1$

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $L_k^2 \neq 0$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $L_k^2(x) \geq 0$

donc pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, L_k^2 est un polynôme positif de E_{2n}.

Comme φ_n est un produit scalaire : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $S_n(L_k^2) > 0$.

Ainsi $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $0 < S_n(L_k^2) \underset{L_k^2 \in E_{2n-1}}{=} \sum_{i=1}^{n} L_k^2(\alpha_i) S_n(L_i) = L_k^2(\alpha_k) S_n(L_k) = 1 \times p_k = p_k$.

Donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $p_k > 0$.

d] Soit $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$.

$(p_1, p_2, \dots, p_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ donc il existe une unique probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(\{\alpha_i\}) = p_i$.

Notons Y l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $Y(\alpha_i) = \alpha_i$!

Y est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(Y = \alpha_i) = P(\{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) = \alpha_i\}) = P(\{\alpha_i\}) = p_i$.

$\forall k \in [\![0, 2n-1]\!]$, $E(Y^k) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k p_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k S_n(L_i) = S_n(X^k)$ d'après b) ii)

Or $\forall k \in [\![0, 2n-1]\!]$, $S_n(X^k) = s_k$

Ainsi $\underline{\forall k \in [\![0, 2n-1]\!], \quad E(Y^k) = s_k}$.

c] Trouver la loi de Y c'est trouver p_1 et p_2.

Notons que $\frac{1}{2} = s_1 = E(Y) = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2$ (*)

$\frac{1}{3} = s_2 = E(Y^2) = \alpha_1^2 p_1 + \alpha_2^2 p_2$

α_1 et α_2 sont les zéros de $P_2 = 6\sqrt{5}\left(X^2 - X + \frac{1}{6}\right)$. Nous posons $\alpha_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ et $\alpha_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$

Alors $\begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{3-\sqrt{3}}{6} p_1 + \frac{3+\sqrt{3}}{6} p_2 \\ \frac{1}{3} = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2 p_1 + \left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)^2 p_2 = \frac{2-\sqrt{3}}{6} p_1 + \frac{2+\sqrt{3}}{6} p_2 \end{cases}$ $\begin{cases} 3(p_1+p_2) + \sqrt{3}(p_2 - p_1) = 3 \\ 2(p_1+p_2) + \sqrt{3}(p_2-p_1) = 2 \end{cases}$

$p_1 + p_2 = 1$ et $\sqrt{3}(p_1 - p_2) = 0$. $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$.

$\underline{P(Y = \alpha_1) = P(Y = \alpha_2) = \frac{1}{2}}$. $Y \hookrightarrow \mathcal{U}_{[\![1,2]\!]}$.

(*) On pouvait plus simplement utiliser $\begin{cases} p_1 + p_2 = 1 \\ \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$.