Quelques remarques

PR 1 Soit u un vecteur non nul de E_p. Soit x un élément de E_p et soit x' sa projection orthogonale sur la droite vectorielle D_u engendrée par u. $x' = P_{D_u}(x)$

$\exists \gamma \in \mathbb{R}$, $x' = \gamma u$. De plus $x' - x \in D_u^{\perp}$ donc $\langle x' - x, u \rangle = 0$.

Alors $\langle x, u \rangle = \langle x', u \rangle = \langle \gamma u, u \rangle = \gamma \|u\|^2$; $\gamma = \dfrac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2}$; $x' = \dfrac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u$.

Notons que $\|x'\| = \dfrac{|\langle x, u \rangle|}{\|u\|^2} \|u\| = \dfrac{|\langle x, u \rangle|}{\|u\|}$.

Ainsi $\boxed{\forall x \in E_p,\ P_{D_u}(x) = \dfrac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u \text{ et } \|P_{D_u}(x)\|^2 = \dfrac{\langle x, u \rangle^2}{\|u\|^2}}$

PR 2 Soit $A \in \mathcal{M}_{m,\ell}(\mathbb{R})$. Soit $(h_1, h_2, \ldots, h_\ell)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{\ell,1}(\mathbb{R})$

$\forall j \in [\![1, \ell]\!]$, $\phi_A(h_j) = A h_j$ et pour tout $j \in [\![1, \ell]\!]$, $A h_j$ est la $j^{\text{ième}}$ colonne de A. La $j^{\text{ième}}$ colonne de A est donc la matrice des coordonnées de $A h_j$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. Ainsi

$\boxed{A \text{ est la matrice de } \phi_A \text{ relativement aux bases canoniques de } \mathcal{M}_{\ell,1}(\mathbb{R}) \text{ et } \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}).}$

En particulier $\underline{\underline{\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \phi_A}}$. Rappelons également que $\underline{\underline{\operatorname{rg} {}^t A = \operatorname{rg} A}}$

Notons encore que → $\operatorname{Ker} \phi_A = \{ h \in \mathcal{M}_{\ell,1}(\mathbb{R}) \mid A h = 0_{\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})} \}$

→ $\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} \phi_A$

→ Si $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ est le sous-espace propre de ϕ_A associé à la valeur propre λ !!

→ L'image de ϕ_A est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ engendré par les colonnes de A.

PR 3 Dans la suite $\|\cdot\|_n$ désignera la norme de $E_n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire canonique :

Partie I. Étude d'un exemple.

Q1 a) $\forall i \in [\![1,3]\!]$, $\|v'_i\|^2 \overset{PR1}{=} \dfrac{\langle v_i, u_1+mu_2\rangle^2}{\|u_1+mu_2\|^2} = \dfrac{1}{1+m^2}\langle v_i, u_1+mu_2\rangle^2$.

$v_1 = u_1+2u_2$ donc $\langle v_1, u_1+mu_2\rangle = 1+2m$. $v_2 = -3u_1-u_2$ donc $\langle v_2, u_1+mu_2\rangle = -3-m$.

$v_3 = 2u_1-u_2$ donc $\langle v_3, u_1+mu_2\rangle = 2-m$.

Alors $\|v'_1\|^2+\|v'_2\|^2+\|v'_3\|^2 = \dfrac{1}{1+m^2}\left[(1+2m)^2+(-3-m)^2+(2-m)^2\right]$

$\|v'_1\|^2+\|v'_2\|^2+\|v'_3\|^2 = \dfrac{1}{1+m^2}(1+4m+4m^2+9+6m+m^2+4-4m+m^2)$.

$$\|v'_1\|^2+\|v'_2\|^2+\|v'_3\|^2 = \frac{6m^2+6m+14}{m^2+1}.$$

b) Posons $\forall m\in\mathbb{R}$, $f(m) = \dfrac{3m^2+3m+7}{m^2+1}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall m\in\mathbb{R}$, $f'(m) = \dfrac{1}{(m^2+1)^2}\left[(6m+3)(m^2+1)-(3m^2+3m+7)(2m)\right] = \dfrac{1}{(m^2+1)^2}(-3m^2-8m+3)$

$\forall m\in\mathbb{R}$, $f'(m) = \dfrac{-3(m+3)(m-1/3)}{(m^2+1)^2}$. f' est du signe de $m\mapsto -3(m+3)(m-\frac{1}{3})$.

m	$-\infty$	-3	$+1/3$	$+\infty$
$f'(m)$	$-$	$+$	$-$	
$f(m)$	$3 \searrow$	$\frac{5}{2}$ $\nearrow$	$\frac{15}{2}$ $\searrow$	3

$\lim\limits_{m\to+\infty} f(m) = \lim\limits_{m\to-\infty} f(m) = 3$. $f(-3) = \frac{5}{2}$ et $f(\frac{1}{3}) = \frac{15}{2}$

f est décroissante sur $]-\infty,-3[$ et $\lim\limits_{m\to-\infty} f(m) = 3$ donc $\forall m\in\,]-\infty,-3[$, $f(m)\leq 3$.

f est strictement croissante sur $[-3,\frac{1}{3}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{3},+\infty[$.

Alors $\forall m\in[-3,\frac{1}{3}[\,\cup\,]\frac{1}{3},+\infty[$, $f(m) < f(\frac{1}{3}) = \frac{15}{2}$

Finalement $\forall m\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{3}\}$, $f(m) < f(\frac{1}{3})$.

Par conséquent f a un maximum qui vaut $\frac{15}{2}$ atteint en le seul point $m_0 = \frac{1}{3}$.

Rappelons que $\|V_1'\|^2+\|V_2'\|^2+\|V_3'\|^2 = 2f(m)$.

$\|V_1'\|^2+\|V_2'\|^2+\|V_3'\|^2$ possède un maximum lorsque m décrit $\mathbb{R}$ qui vaut $\lambda_1 = 15$ et qui est atteint en $m_0 = \frac{1}{3}$ uniquement.

(Q2) $X^tX = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Soit $x = x_1u_1 + x_2u_2$ un élément de E_2.

$\phi_{X^tX}(x) = \lambda_1 x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \underset{\lambda_1 = 15}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 14x_1 + 3x_2 = 15x_1 \\ 3x_1 + 6x_2 = 15x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 = 0 \end{cases}$

$\phi_{X^tX}(x) = \lambda_1 x \Leftrightarrow x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Vect}(3u_1 + u_2)$.

Ainsi $\lambda_1 = 15$ est un vecteur propre de ϕ_{X^tX} et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $3u_1 + u_2$.

b) La matrice de ϕ_{X^tX} dans la base orthonormale (u_1, u_2) de E_2 est X^tX et X^tX est une matrice symétrique. Ainsi ϕ_{X^tX} est un endomorphisme symétrique de E_2. ϕ_{X^tX} est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

$\lambda_1 = 15$ est une valeur propre de ϕ_{X^tX} dont le sous-espace propre associé est la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(3u_1+u_2)$. Rappelons que $\dim E_2 = 2$!

Alors ϕ_{X^tX} possède une seconde valeur propre dont le sous-espace propre est $(\mathrm{Vect}(3u_1+u_2))^\perp$ c'est à dire $\mathrm{Vect}(-u_1+3u_2)$.

$\phi_{X^tX}(-u_1+3u_2) = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ainsi 5 est la seconde valeur propre de ϕ_{X^tX}. $5 < 15$!

Le second sous-espace propre de ϕ_{X^tX} est la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(-u_1+3u_2)$ et il est associé à la valeur propre 5.

Partie II. Les axes principaux d'inertie d'un nuage.

Q1 a) $V \in M_p(\mathbb{R})$. ${}^tV = {}^t(X\,{}^tX) = {}^t({}^tX)\,{}^tX = X\,{}^tX = V$.

V est une matrice réelle et symétrique donc V est diagonalisable.

Soit λ une valeur propre de V. $\exists v \in E_p$, $v \neq 0$ et $Vv = \lambda v$.

${}^tv V v = \lambda\, {}^tv v = \lambda \|v\|^2$. Or ${}^tv V v = {}^tv X\, {}^tX v = {}^t({}^tX v)\, {}^tX v = \|{}^tX v\|_n^2$

Ainsi $\|{}^tXv\|_n^2 = \lambda \|v\|^2$ et $\|v\|^2 \neq 0$ donc $\lambda = \dfrac{\|{}^tXv\|_n^2}{\|v\|^2} \geqslant 0$.

Les valeurs propres de V sont des réels (V est symétrique et réelle) positifs ou nuls.

V est symétrique et réelle donc il existe une base orthonormale $(e'_1, e'_2, \dots, e'_p)$ de E_p constituée de vecteurs propres de V respectivement associés aux valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$.

Or $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ étant les valeurs propres de V, comme le dit le sujet (!) il doit sans doute exister une bijection σ de $[\![1,p]\!]$ sur $[\![1,p]\!]$ telle que $\lambda_i = \alpha_{\sigma(i)}$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$.

Posons pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $e_i = e'_{\sigma(i)}$.

$(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est toujours une base orthonormale de E_p et elle est constituée de vecteurs propres de V respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$.

Ainsi il existe une base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ de E_p telle que : $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $Ve_i = \lambda_i e_i$.

b) • Soit $v \in \mathrm{Ker}\, \phi_V$. $\phi_V(v) = 0$. $Vv = 0$ $X\,{}^tX v = 0$.

Alors ${}^tv X\, {}^tX v = 0$, ${}^t({}^tXv)\,{}^tXv = 0$, $\|{}^tXv\|_n^2 = 0$, ${}^tXv = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Ainsi $\phi_{{}^tX}(v) = 0$ et $v \in \mathrm{Ker}\, \phi_{{}^tX}$.

Par conséquent $\mathrm{Ker}\, \phi_V \subset \mathrm{Ker}\, \phi_{{}^tX}$

Soit $v \in \mathrm{Ker}\, \phi_{{}^tX}$. ${}^tXv = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$, $X\,{}^tXv = X 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} = 0_{M_{p,1}(\mathbb{R})}$

Alors $Vv = 0_{M_{p,1}(\mathbb{R})}$ et $v \in \mathrm{Ker}\, \phi_V$. $\mathrm{Ker}\, \phi_{{}^tX} \subset \mathrm{Ker}\, \phi_V$.

Par conséquent $\underline{\underline{\operatorname{Ker} \phi_V = \operatorname{Ker} \phi_{{}^tX}}}$.

(*) $\operatorname{rg} \phi_V = p - \dim \operatorname{Ker}\phi_V = p - \dim \operatorname{Ker} \phi_{{}^tX} = \operatorname{rg} \phi_{{}^tX}$.
car $\phi_V \in \mathcal{L}(E_p)$ et $\phi_{{}^tX} \in \mathcal{L}(E_p, E_n)$.

- $\operatorname{rg} V = \operatorname{rg} \phi_V \overset{(*)}{=} \operatorname{rg} \phi_{{}^tX} = \operatorname{rg} {}^tX = \operatorname{rg} X$.

  Rappelons que r est la dimension du sous-espace vectoriel F engendré par les colonnes $c_1, c_2, \dots, c_n$ de X donc $r = \operatorname{rg} X$.

  Par conséquent : $\underline{\underline{\operatorname{rg} V = r}}$.

- $r < p$ donc $\dim \operatorname{Ker} \phi_V = p - r > 0$. 0 est donc valeur propre de ϕ_V.

  Comme $\lambda_1 \geqslant \dots \geqslant \lambda_p$ nécessairement $\lambda_p = 0$. Alors $\{i \in [\![1,p]\!] \mid \lambda_i = 0\} \neq \emptyset$

  Posons $s = \min \{i \in [\![1,p]\!] \mid \lambda_i = 0\}$.

  Si $s = 1$: $0 = \lambda_1 \geqslant \dots \geqslant \lambda_p = 0$. $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$. $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\phi_V(e_i) = \lambda_i e_i = 0$.

  Ainsi $\phi_V = 0_{\mathcal{L}(E_p)}$. $V = 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R})}$. $\operatorname{rg} V = 0$. $r = 0$!! Donc $s > 1$.

  Alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{s-1} > 0$ et $\lambda_s = \lambda_{s+1} = \dots = \lambda_p = 0$.

  $\forall i \in [\![1, s-1]\!]$, $e_i = \frac{1}{\lambda_i} \phi_V(e_i) = \phi_V(\frac{1}{\lambda_i} e_i) \in \operatorname{Im} \phi_V$.

  $(e_1, \dots, e_{s-1})$ est une famille libre de $\operatorname{Im} \phi_V$ donc $s - 1 \leqslant \dim \operatorname{Im} \phi_V = r$; $\underline{s-1 \leqslant r}$.

  $\forall i \in [\![s,p]\!]$, $e_i \in \operatorname{Ker} \phi_V$; $(e_s, e_{s+1}, \dots, e_p)$ est une famille libre de $\operatorname{Ker} \phi_V$.

  Alors $p - (s-1) \leqslant \dim \operatorname{Ker} \phi_V = p - r$ donc $\underline{r \leqslant s-1}$.

  Finalement $r = s - 1$; $s = r + 1$.

  Alors $\underline{\underline{\lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \dots = \lambda_p = 0}}$ et $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_r > 0$.

- $\underline{\underline{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \text{ sont des réels strictement positifs}}}$.

  $\underline{\underline{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \text{ sont les valeurs propres strictement positives de } V}}$.

• Pour montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ est une base de F il suffit de prouver que les éléments de cette famille sont dans F car $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ est une famille libre (sous-famille d'une famille libre) de r éléments et $\dim F = r$.

Nous venons de voir que : $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $e_i \in \operatorname{Im} \phi_V$ $\quad (e_i = \phi_V(\frac{1}{\lambda_i} e_i))$.

Montrons alors que $\operatorname{Im} \phi_V \subset F = \operatorname{Vect}(c_1, c_2, \dots, c_n) = \operatorname{Im} \phi_X$.

Soit $v' \in \operatorname{Im} \phi_V$. $\exists v \in E_p$, $v' = \phi_V(v) = Vv = X({}^tXv) = \phi_X({}^tXv) \in \operatorname{Im} \phi_X$.

Alors $\operatorname{Im} \phi_V \subset \operatorname{Im} \phi_X = F$. Par conséquent $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $e_i \in F$.

$(e_1, \dots, e_r)$ est une famille libre de cardinal r constituée d'éléments de F et F est de dimension r. $\underline{(e_1, e_2, \dots, e_r) \text{ est une base (orthonormale) de } F.}$

Q2 a) Soit v un élément de E_p de norme 1. $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ | \\ v_p \end{pmatrix}$.

D'après PR1 $\quad I(v) = \sum_{j=1}^{n} \| P_{D_v}(c_j) \|^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle c_j, v \rangle^2}{\|v\|^2} = \sum_{j=1}^{n} \langle c_j, v \rangle^2$.

D'autre part ${}^tv V v = {}^tv X {}^tX v = {}^t({}^tXv) {}^tX v = \| {}^tX v \|_n^2$. Posons ${}^tXv = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$.

$${}^tv V v = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \ \underset{\uparrow}{t_i} = \sum_{j=1}^{p} x_{ji} v_j = (x_{1i} \ x_{2i} \ \dots \ x_{pi}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix} = \underset{\uparrow}{{}^tc_i} v$$

$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = {}^tXv$

c_i est la $i^{\text{ème}}$ colonne de X

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $t_i = {}^tc_i v = \langle c_i, v \rangle$

Alors ${}^tv V v = \sum_{i=1}^{n} \langle c_i, v \rangle^2 \overset{!}{=} \sum_{j=1}^{n} \langle c_j, v \rangle^2 = I(v)$.

$$\underline{\underline{\forall v \in E_p, \ \|v\| = 1 \Rightarrow I(v) = {}^tv V v.}}$$

b) Soit $i \in [\![1, p]\!]$. $\|e_i\| = 1$ donc $I(e_i) = {}^te_i V e_i = {}^te_i (\lambda_i e_i) = \lambda_i {}^te_i e_i = \lambda_i \|e_i\|^2$

Ainsi $\underline{\underline{\forall i \in [\![1, p]\!], \ I(e_i) = \lambda_i.}}$

c) • Montrons par récurrence que : $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $F_i = \mathrm{Vect}(e_i,\dots,e_r)$.

→ c'est vrai pour $i=1$ car d'après II 1) b) $(e_1,e_2,\dots,e_r)$ est une base de F et $F_1=F$.

→ Supposons la propriété vraie pour $i \in [\![1,r-1]\!]$ et montrons-la pour $i+1$.

$F_i = \mathrm{Vect}(e_i,\dots,e_r)$ et $F_{i+1} = F_i \cap D_{e_i}^{\perp}$

Soit v un élément de F_i. $\exists (\lambda_i,\dots,\lambda_r) \in \mathbb{R}^{r-(i-1)}$, $v = \sum_{\ell=i}^{r} \lambda_\ell e_\ell$

$v \in D_{e_i}^{\perp} \iff \langle v, e_i \rangle = 0 \iff \lambda_i = 0$
$(e_1,\dots,e_r)$ est une base orthonormale.

Ainsi $F_i \cap D_{e_i}^{\perp} = \{ \sum_{\ell=i}^{r} \lambda_\ell e_\ell \ , (\lambda_i,\dots,\lambda_r) \in \mathbb{R}^{r-i+1} \text{ et } \lambda_i = 0 \} = \{ \sum_{\ell=i+1}^{r} \lambda_\ell e_\ell \ ; (\lambda_{i+1},\dots,\lambda_r) \in \mathbb{R}^{r-i} \}$

Alors $F_i \cap D_{e_i}^{\perp} = \mathrm{Vect}(e_{i+1},\dots,e_r)$. $F_{i+1} = \mathrm{Vect}(e_{i+1},\dots,e_r)$ et la récurrence s'achève.

$\forall i \in [\![1,r]\!]$, $F_i = \mathrm{Vect}(e_i,\dots,e_r)$.

• Soit v un élément de E_p de coordonnées $(t_1,t_2,\dots,t_p)$ dans la base orthonormale $(e_1,e_2,\dots,e_p)$ et de norme 1.

$I(v) = {}^t v V v = \langle Vv, v \rangle$. $v = \sum_{i=1}^{p} t_i e_i$ et $Vv = \sum_{i=1}^{p} t_i V e_i = \sum_{i=1}^{p} t_i \lambda_i e_i$

Comme $(e_1,e_2,\dots,e_p)$ est orthonormale : $\langle Vv, v \rangle = \sum_{i=1}^{p} (t_i\lambda_i)\, t_i = \sum_{i=1}^{p} t_i^2 \lambda_i$

Donc $I(v) = \sum_{i=1}^{p} t_i^2 \lambda_i \leq (\sum_{i=1}^{p} t_i^2)\lambda_1$ car $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\lambda_1 \geq \lambda_i$ et $t_i^2 \geq 0$.

$I(v) \leq \lambda_1 \sum_{i=1}^{p} t_i^2 = \lambda_1 \|v\|^2 = \lambda_1$. Or $\lambda_1 = I(e_1)$ et $\|e_1\| = 1$.

Donc $\forall v \in E_p$, $\|v\| = 1 \Rightarrow I(v) \leq I(e_1)$ et $\|e_1\| = 1$.

Alors $I(e_1) = \max\{ I(v) \ ; v \in E_p \text{ et } \|v\| = 1 \} = \lambda_1$

$e_1 \in F_1$, $\|e_1\| = 1$ et $\forall v \in F_1$, $\|v\| = 1 \Rightarrow I(v) \leq I(e_1)$
$F_1 \subset E_p$!

Ainsi $I(e_1) = \max\{ I(v) \ ; v \in F_1 \text{ et } \|v\| = 1 \}$.

- Soit $i \in [\![1,r]\!]$. Soit v un vecteur unitaire de F_i de coordonnées $(t_1, t_2, \dots, t_p)$ dans la base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ de E_p.
Nécessairement $t_1 = t_2 = \dots = t_{i-1} = 0$ car $v \in F_i$.
Nous venons de voir que $I(v) = {}^t v V v = \sum_{k=1}^{p} t_k^2 \lambda_k$

Ainsi $I(v) = \sum_{k=i}^{p} t_k^2 \lambda_k \leq \sum_{k=i}^{p} t_k^2 \lambda_i$ car $\forall k \in [\![i,p]\!]$, $\lambda_k \leq \lambda_i$ et $t_k^2 \geq 0$.

Par conséquent $I(v) \leq \left(\sum_{k=i}^{p} t_k^2\right) \lambda_i = \left(\sum_{k=1}^{p} t_k^2\right) \lambda_i = \|v\|^2 \lambda_i = \lambda_i = I(e_i)$.

Alors $e_i \in F_i$, $\|e_i\| = 1$ et $\forall v \in F_i$, $\|v\| = 1 \Rightarrow I(v) \leq I(e_i)$.

Ainsi $\underline{\underline{I(e_i) = \max\{I(v) ; v \in F_i \text{ et } \|v\| = 1\} \text{ et ce pour tout } i \text{ dans } [\![1,p]\!].}}$

Q3 Soit w un vecteur unitaire de E_p tel que $I(w) = \max\{I(v) ; v \in E_p \text{ et } \|v\| = 1\}$

$\exists (z_1, z_2, \dots, z_p) \in \mathbb{R}^p$, $w = \sum_{k=1}^{p} z_k e_k$. Supposons que $w \notin F$.

Alors $\exists k_0 \in [\![r+1, n]\!]$, $z_{k_0} \neq 0$. $z_{k_0}^2 > 0$ et $\lambda_1 > 0$

$$I(w) = \sum_{k=1}^{p} z_k^2 \lambda_k \underset{\lambda_k = 0 \text{ si } k > r}{=} \sum_{k=1}^{r} z_k^2 \lambda_k \underset{\forall k \in [\![1,r]\!],\ \lambda_k \leq \lambda_1 \text{ et } z_k^2 \geq 0}{\leq} \lambda_1 \sum_{k=1}^{r} z_k^2 < \lambda_1 \sum_{k=1}^{p} z_k^2 = \lambda_1 \|w\|^2 = \lambda_1.$$

Alors $w \in E_p$, $\|w\| = 1$, $I(w) < \lambda_1 = \max\{I(v) ; v \in E_p \text{ et } \|v\| = 1\}$.

Ceci contredit $I(w) = \max\{I(v) ; v \in E_p \text{ et } \|v\| = 1\}$.

Ainsi $\underline{\underline{\text{si } w \text{ est un vecteur unitaire de } E_p \text{ tel que } I(w) = \max\{I(v) ; v \in E_p \text{ et } \|v\| = 1\} \text{ alors } w \in F.}}$

Q4 a) $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $\|\varepsilon_i\| = 1$. Soit $(i,j) \in [\![1,r]\!]^2$, $i < j$; $i+1 \leq j$

Remarquons que $\varepsilon_j \in G_j$ et que : $G_j \subset G_{i+1} = G_i \cap D_{\varepsilon_i}^{\perp}$

Ainsi $\varepsilon_j \in D_{\varepsilon_i}^{\perp}$; ε_i et ε_j sont orthogonaux.

$\forall i \in [\![1,r]\!]$, $\|\varepsilon_i\| = 1$ et $\forall (i,j) \in [\![1,r]\!]^2$, $i<j \Rightarrow \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = 0$.

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r)$ est une famille orthonormale de E_p.

De plus $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $\varepsilon_i \in G_i \subset G_1 = F$.

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r)$ est une famille orthonormale, donc libre, de F de cardinal r et $\dim F = r$. Alors $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r)$ est une base orthonormale de F.

$(e_1, e_2, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de E_p. Ainsi les sous-espaces vectoriels $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ et $H = \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_p)$ sont supplémentaires et orthogonaux.

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r)$ est une base orthonormale de F, $(e_{r+1}, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de H, F et H sont deux supplémentaires orthogonaux de E_p donc :

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de E_p.

b) Soit (v,w) deux éléments de E_p. Nous avons déjà vu que :

$$ {}^tX v = \begin{pmatrix} \langle c_1, v\rangle \\ \langle c_2, v\rangle \\ \vdots \\ \langle c_n, v\rangle \end{pmatrix}. \quad \text{De même :} \quad {}^tX w = \begin{pmatrix} \langle c_1, w\rangle \\ \langle c_2, w\rangle \\ \vdots \\ \langle c_n, w\rangle \end{pmatrix}. $$

Ainsi $J(v,w) = \sum_{j=1}^{n} \langle v, c_j \rangle \langle w, c_j \rangle = {}^t({}^tX v)\, {}^tX w = {}^tv\, {}^t({}^tX) {}^tX w = {}^tv\, X {}^tX w$

Donc $J(v,w) = {}^tv V w = \langle v, Vw \rangle = \langle v, \phi_V(w) \rangle$.

$\forall (v,w) \in E_p^2$, $J(v,w) = {}^tv Vw = \langle v, \phi_V(w) \rangle$.

c] • Soit $t \in \mathbb{R}$. $\varphi(t) = I(\cos t v_1 + \sin t v_2)$. Posons $w = \cos t v_1 + \sin t v_2$.

$\varphi(t) = I(w) = {}^t w V w = \langle w, \phi_V(w) \rangle = \langle \cos t v_1 + \sin t v_2, \cos t \phi_V(v_1) + \sin t \phi_V(v_2) \rangle$

$\varphi(t) = \cos^2 t \langle v_1, \phi_V(v_1) \rangle + \cos t \sin t \langle v_1, \phi_V(v_2) \rangle + \sin t \cos t \langle v_2, \phi_V(v_1) \rangle + \sin^2 t \langle v_2, \phi_V(v_2) \rangle$.

Notons que ϕ_V est un endomorphisme symétrique ; $\langle v_2, \phi_V(v_1) \rangle = \langle \phi_V(v_2), v_1 \rangle = \langle v_1, \phi_V(v_2) \rangle$.

Ainsi $\varphi(t) = \cos^2 t \, I(v_1) + 2 \cos t \sin t \langle v_1, \phi_V(v_2) \rangle + \sin^2 t \, I(v_2)$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \cos^2 t \, I(v_1) + \sin 2t \, J(v_1, v_2) + \sin^2 t \, I(v_2)$.

• φ est périodique de période π et φ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur le segment $[0, \pi]$.

Ainsi φ possède un maximum et un minimum sur $[0, \pi]$ donc sur $\mathbb{R}$.

En particulier φ est majorée sur $\mathbb{R}$. et elle admet un maximum sur $\mathbb{R}$!

• Supposons que φ atteint son maximum en 0.

φ étant dérivable sur $\mathbb{R}$: $\varphi'(0) = 0$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = -2 \sin t \cos t \, I(v_1) + 2 \cos(2t) J(v_1, v_2) + 2 \sin t \cos t \, I(v_2)$ donc $\varphi'(0) = 2 J(v_1, v_2)$.

Ainsi $J(v_1, v_2) = 0$.

Si φ atteint son maximum en 0 alors $J(v_1, v_2) = 0$.

d] • Soit $(i,j) \in [\![1, r]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Supposons même que $i < j$ (ce qui n'est pas restrictif car $J(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = J(\varepsilon_j, \varepsilon_i) \dots$).

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = I(\cos t \, \varepsilon_i + \sin t \, \varepsilon_j)$.

Observons que $G_j \subset G_i$ donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cos t \, \varepsilon_i + \sin t \, \varepsilon_j \in G_i$ car $\varepsilon_i \in G_i$ et $\varepsilon_j \in G_j$. De plus $\forall t \in \mathbb{R}$, $\| \cos t \, \varepsilon_i + \sin t \, \varepsilon_j \|^2 = \cos^2 t \| \varepsilon_i \|^2 + 2 \cos t \sin t \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle + \sin^2 t \| \varepsilon_j \|^2$

Or $\| \varepsilon_i \|^2 = \| \varepsilon_j \|^2 = 1$ et $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = 0$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $\| \cos t \, \varepsilon_i + \sin t \, \varepsilon_j \|^2 = 1$. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\| \cos t \, \varepsilon_i + \sin t \, \varepsilon_j \| = 1$ et $\cos t \, \varepsilon_i + \sin t \, \varepsilon_j \in G_i$

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = I(\cos t \, \varepsilon_i + \sin t \, \varepsilon_j) \leq \operatorname{Max} \{ I(v) ; v \in G_i \text{ et } \|v\| = 1 \} = I(\varepsilon_i) = \varphi(0)$.

D'après c) $J(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0$.

$\forall (i,j)\in [\![1,r]\!]^2,\ i<j \Rightarrow J(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0$ et $\forall (i,j)\in [\![1,r]\!]^2,\ J(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=J(\varepsilon_j,\varepsilon_i)$.

Alors $\underline{\forall (i,j)\in [\![1,r]\!]^2,\ i\neq j \Rightarrow J(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0}$.

- $\forall \ell\in [\![r+1,p]\!],\ \phi_V(e_\ell)=0$.

  Soit $i\in [\![1,r]\!]$. $\varepsilon_i\in F=\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_r)$ — $\lambda_i\neq 0$ pour $i\in[\![1,r]\!]$

  $\phi_V(\varepsilon_i)\in \phi_V(\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_r))=\mathrm{Vect}(\phi_V(e_1),\dots,\phi_V(e_r))=\mathrm{Vect}(\lambda_1 e_1,\dots,\lambda_r e_r)=\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_r)=F$

  $\phi_V(\varepsilon_i)\in F=\mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r)$. $\exists(\sigma_1,\dots,\sigma_r)\in\mathbb{R}^r$, $\phi_V(\varepsilon_i)=\sum_{\ell=1}^{r}\sigma_\ell\,\varepsilon_\ell$

  $\forall j\in[\![1,r]\!]$, $J(\varepsilon_j,\varepsilon_i)=\langle\varepsilon_j,\phi_V(\varepsilon_i)\rangle=\sum_{\ell=1}^{r}\sigma_\ell\langle\varepsilon_j,\varepsilon_\ell\rangle=\sigma_j$

  Alors $\forall j\in[\![1,r]\!]-\{i\}$, $\sigma_j=J(\varepsilon_j,\varepsilon_i)=0$ et $\sigma_i=J(\varepsilon_i,\varepsilon_i)=I(\varepsilon_i)$

  Donc $\phi_V(\varepsilon_i)=I(\varepsilon_i)\,\varepsilon_i$.

La matrice de ϕ_V dans la base orthonormale $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r,e_{r+1},\dots,e_p)$ est la matrice

diagonale $\mathrm{Diag}(I(\varepsilon_1),I(\varepsilon_2),\dots,I(\varepsilon_r),0,0,\dots,0)$.

- La suite $(\sigma_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$ est décroissante donc $I(\varepsilon_1)\geq I(\varepsilon_2)\geq\dots\geq I(\varepsilon_r)\geq 0\geq 0\geq\dots\geq 0$!

  De plus $I(\varepsilon_1),I(\varepsilon_2),\dots,I(\varepsilon_r),0,0,\dots,0$ sont les valeurs propres de V. Alors nécessairement $\forall i\in[\![1,r]\!]$, $\lambda_i=I(\varepsilon_i)$. Remarquons que : $\forall i\in[\![1,r]\!]$, $\varepsilon_i\neq 0$.

  <u>Pour tout $i\in[\![1,r]\!]$, ε_i est un vecteur propre de V associé à λ_i.</u>

(Q5) Posons $V=(\beta_{ij})$. $V=X\,{}^tX$ donc $\forall(i,j)\in[\![1,p]\!]^2$, $\beta_{ij}=\sum_{\ell=1}^{n}x_{i\ell}\,x_{j\ell}$

  Ainsi $\forall(k,\ell)\in[\![1,p]\!]^2$, $\frac{1}{n}\beta_{k\ell}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ki}\,x_{\ell i}=E(x_k x_\ell)\underset{\uparrow}{=}E(x_k x_\ell)-E(x_k)E(x_\ell)$

  $E(x_k)=E(x_\ell)=0$

  Alors $\forall(k,\ell)\in[\![1,p]\!]^2$, $\frac{1}{n}\beta_{k\ell}=\mathrm{cov}(x_k,x_\ell)$.

  Ainsi $\underline{(\mathrm{cov}(x_k,x_\ell))_{(k,\ell)\in[\![1,p]\!]^2}=\frac{1}{n}V}$.

Partie III une décomposition de la matrice X.

Remarques. – Soit $i \in [\![1,p]\!]$. → Π_i est la matrice de $P_{D_{e_i}}$ dans la base canonique de E_p.

→ $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $P_{D_{e_i}}(e_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ e_i & \text{si } j = i \end{cases}$; $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $\Pi_i e_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ e_i & \text{si } j = i \end{cases}$.

→ $\operatorname{Im} P_{D_{e_i}} = \operatorname{Vect}(e_i)$ et $\operatorname{Ker} P_{D_{e_i}} = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p)$.

→ $\forall x \in E_p$, $P_{D_{e_i}}(x) = \langle e_i, x \rangle e_i$ et $\Pi_i x = \langle e_i, x \rangle e_i$.

Q1 $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $\left(\sum_{i=1}^{p} P_{D_{e_i}}\right)(e_j) = \sum_{i=1}^{p} P_{D_{e_i}}(e_j) = e_j = \mathrm{Id}_{E_p}(e_j)$. Alors les endomorphismes $\sum_{i=1}^{p} P_{D_{e_i}}$ et Id_{E_p}, de E_p, coïncident sur la base $(e_1, \dots, e_p)$ de E_p. Ils sont donc égaux.

Alors $\underline{\sum_{i=1}^{p} \Pi_i = I_p}$.

Q2 Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$. Supposons $i \neq j$.

$\forall x \in E_p$, $(\Pi_i \Pi_j)(x) = \Pi_i(\langle e_j, x \rangle e_j) = \langle e_j, x \rangle \Pi_i(e_j) = \langle e_j, x \rangle 0_{E_p} = 0_{E_p}$.

$\underline{\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow \Pi_i \Pi_j = 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R})}}$.

Q3 Soit $i \in [\![r+1, p]\!]$. $X \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $\Pi_i \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ donc $\Pi_i X \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

$\Pi_i X$ est la matrice, relativement aux bases canoniques de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, de $P_{D_{e_i}} \circ \phi_X$.

Rappelons que $\operatorname{Im} \phi_X = \operatorname{Vect}(c_1, c_2, \dots, c_n) = F = \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_r)$.

Remarquons que $\forall k \in [\![1,r]\!]$, $P_{D_{e_i}}(e_k) = 0$ ($i \in [\![r+1, p]\!]$) et ainsi $P_{D_{e_i}}$ est nulle sur F.

ϕ_X prend ses valeurs dans F et $P_{D_{e_i}}$ est nulle sur F donc $P_{D_{e_i}} \circ \phi_X$ est l'application linéaire nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. $\Pi_i X = 0_{\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})}$.

Ainsi $\underline{\forall i \in [\![r+1, p]\!],\ \Pi_i X = 0_{\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})}}$.

$X = I_p X = \left(\sum_{i=1}^{p} \Pi_i\right) X = \sum_{i=1}^{p} \Pi_i X = \sum_{i=1}^{r} \Pi_i X$ (d'après ce qui précède).

$$X = \sum_{i=1}^{r} \Pi_i X .$$

Q4 a) Soit $s \in [\![1, r]\!]$. $\phi_{X_s} = \sum_{i=1}^{s} \phi_{\Pi_i} \circ \phi_X$. $\phi_{X_s} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}))$.

$\operatorname{Im} \phi_{X_s} = \phi_{X_s}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) = \sum_{i=1}^{s} \phi_{\Pi_i}(\phi_X(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))) = \sum_{i=1}^{s} \phi_{\Pi_i}(\operatorname{Im} \phi_X) = \sum_{i=1}^{s} \phi_{\Pi_i}(F)$.

$\forall i \in [\![1, s]\!]$, $\phi_{\Pi_i}(F) = \phi_{\Pi_i}(\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_r)) = \operatorname{Vect}(\phi_{\Pi_i}(e_1), \dots, \phi_{\Pi_i}(e_r)) = \operatorname{Vect}(e_i)$

$\operatorname{Im} \phi_{X_s} = \sum_{i=1}^{s} \operatorname{Vect}(e_i) \subset \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_s)$ (en fait il y a égalité).

$\forall s \in [\![1, r]\!]$, $\operatorname{Im} \phi_{X_s} \subset \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_s)$ ... et même $\operatorname{Im} \phi_{X_s} = \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_s)$.

b) $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $X_s({}^tX e_j) = \sum_{i=1}^{s} (\Pi_i X {}^tX e_j) = \sum_{i=1}^{s} (\Pi_i V e_j) = \lambda_j \sum_{i=1}^{s} \Pi_i e_j$

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad X_s({}^tX e_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > s \\ \lambda_j e_j & \text{si } j \leq s \end{cases}$$

Ceci montre que $\forall j \in [\![1, s]\!]$, $\lambda_j e_j \in \operatorname{Im} \phi_{X_s}$ donc

$\forall j \in [\![1, s]\!]$, $e_j \in \operatorname{Im} \phi_{X_s}$ (car $\lambda_j \neq 0$ si $j \leq r$!)

Alors $\operatorname{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_s) \subset \operatorname{Im} \phi_{X_s} \subset \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_s)$.

Finalement $\operatorname{Im} \phi_{X_s} = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_s)$.

La famille $(e_1, e_2, \dots, e_s)$ étant libre : $\dim \operatorname{Im} \phi_{X_s} = s$; $\operatorname{rg} \phi_{X_s} = s$.

Alors $\operatorname{rg} X_s = s$.

Partie IV Une norme euclidienne de matrices carrées.

(Q1) Soient $(M,N,R) \in \mathcal{M}_{p,n}^3(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

→ Notons que ${}^tN \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ donc $M{}^tN \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$; ainsi $\Theta(M,N)$ est un élément de $\mathbb{R}$!

→ $\Theta(\lambda M+N, R) = Tr((\lambda M+N){}^tR) = Tr(\lambda M{}^tR+N{}^tR) = \lambda\, Tr(M{}^tR) + Tr(N{}^tR) = \lambda\Theta(M,R)+\Theta(N,R)$.

$\underline{\Theta(\lambda M+N,R) = \lambda\,\Theta(M,R)+\Theta(N,R).}$ une matrice et sa transposée ont même trace.

→ $\Theta(M,N) = Tr(M{}^tN) \overset{!}{=} Tr({}^t(M{}^tN)) = Tr(N{}^tM) = \Theta(N,M)$. $\underline{\Theta(M,N)=\Theta(N,M).}$

→ Posons $M = (m_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}}$ et $M{}^tM = (c_{ij})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}$.

$$\Theta(M,M) = Tr(M{}^tM) = \sum_{i=1}^{p} c_{ii} = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\, m_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}^2$$

Ainsi $\underline{\Theta(M,M) \geq 0}$.

Supposons que $\Theta(M,M)=0$. Alors $\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}^2 = 0$.

Comme $\forall (i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!],\ m_{ij}^2 \geq 0$: $\forall (i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!],\ m_{ij}^2 = 0$.

donc $\forall (i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!],\ m_{ij}=0$; $M=0$. $\underline{\Theta(M,M)=0 \Rightarrow M=0.}$

Ainsi $\underline{\underline{\Theta \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}).}}$

(Q2) Soit $(i,j)\in[\![1,p]\!]^2$. $\Theta(M_iX, M_jX) = Tr((M_iX){}^t(M_jX)) = Tr(M_iX{}^tX{}^tM_j)$

$\Theta(M_iX, M_jX) = Tr(M_iV{}^tM_j)$

La matrice de ϕ_{M_j} dans la base <u>orthonormale</u> $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est diagonale donc symétrique.

donc ϕ_{M_j} est un endomorphisme symétrique de E_p (normal pour un projecteur orthogonal) donc sa matrice M_j dans la base canonique de E_p, qui est une base orthonormale, est symétrique. Alors ${}^tM_j = M_j$. Alors $\Theta(M_iX, M_jX) = Tr(M_iVM_j)$

Intéressons nous à $\ell = \phi_{\Pi_i} \circ \phi_V \circ \phi_{\Pi_j}$.

$\forall k \in [\![1,p]\!] - \{j\}$, $\ell(e_k) = 0$ (car $\phi_{\Pi_j}(e_k) = 0$ si $k \neq j$).

$$\ell(e_j) = \phi_{\Pi_i}(\phi_V(\phi_{\Pi_j}(e_j))) = \phi_{\Pi_i}(\phi_V(e_j)) = \phi_{\Pi_i}(\lambda_j e_j) = \lambda_j \phi_{\Pi_i}(e_j) = \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq i \\ \lambda_i e_i \text{ si } j = i \end{cases}$$

Ainsi si $i \neq j$: $\ell = 0_{\mathcal{L}(E_p)}$ car $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\ell(e_k) = 0_{E_p}$.

Si $i = j$: $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\ell(e_k) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq i \\ \lambda_i e_i \text{ si } k = i \end{cases}$; alors ℓ coïncide avec

$\lambda_i \phi_{\Pi_i}$ sur la base $(e_1, \dots, e_p)$ de E_p. Donc $\ell = \lambda_i \phi_{\Pi_i}$.

$$\phi_{\Pi_i} \circ \phi_V \circ \phi_{\Pi_j} = \begin{cases} 0_{\mathcal{L}(E_p)} \text{ si } i \neq j \\ \lambda_i \phi_{\Pi_i} \text{ si } i = j \end{cases}. \text{ Alors } \underline{\Pi_i V \Pi_j = \begin{cases} 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R})} \text{ si } i \neq j \\ \lambda_i \Pi_i \text{ si } i = j \end{cases}}.$$

$$\Theta(\Pi_i X, \Pi_j X) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ \mathrm{Tr}(\lambda_i \Pi_i) \text{ si } i = j \end{cases}.$$

$\mathrm{Tr}(\lambda_i \Pi_i) = \lambda_i \mathrm{Tr}(\Pi_i)$. Π_i est la matrice de ϕ_{Π_i} dans la base canonique

de E_p, elle est donc semblable à la matrice Π'_i de ϕ_{Π_i} dans $(e_1, e_2, \dots, e_p)$.

Donc $\mathrm{Tr}(\Pi_i) = \mathrm{Tr}(\Pi'_i)$.

Or $\forall \ell \in [\![1,p]\!]$, $\phi_{\Pi_i}(e_\ell) = \begin{cases} 0 \text{ si } \ell \neq i \\ e_i \text{ si } \ell = i \end{cases}$. Π'_i est donc la matrice diagonale

dont tous les coefficients diagonaux sont nuls sauf le $i^{\text{ème}}$ qui vaut 1.

Alors $\mathrm{Tr}(\Pi_i) = \mathrm{Tr}(\Pi'_i) = 1$. Finalement :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad \Theta(\Pi_i X, \Pi_j X) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ \lambda_i \text{ si } i = j \end{cases}.$$

Q3) Soit $s \in [\![1,r]\!]$.

$|||X - X_s|||^2 = \Theta(X - X_s, X - X_s)$. Or $X - X_s = \sum_{i=1}^{r} \Pi_i X - \sum_{i=1}^{s} \Pi_i X$

Si $s = r$: $X = X_s$ et $|||X - X_s|||^2 = 0$.

Supposons $s < r$. $X - X_s = \sum_{i=s+1}^{r} \Pi_i X$.

$$\Theta(X-X_s, X-X_s) = \Theta\left(\sum_{i=s+1}^{r} \Pi_i X, \sum_{j=s+1}^{r} \Pi_j X\right) = \sum_{i=s+1}^{r}\sum_{j=s+1}^{r} \Theta(\Pi_i X, \Pi_j X) = \sum_{i=s+1}^{r} \Theta(\Pi_i X, \Pi_i X).$$

$\Theta(\Pi_i X, \Pi_j X) = 0$ si $j \neq i$

$$|||X - X_s|||^2 = \sum_{i=s+1}^{r} \lambda_i .$$

Ainsi $\forall s \in [\![1, r]\!]$, $|||X-X_s|||^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } s = r \\ \sum_{i=s+1}^{r} \lambda_i & \text{si } s < r \end{cases}$.

Partie V. La meilleure approximation du nuage.

Q1 $X \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $N \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ donc $X - N \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et ${}^t(X-N) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Ainsi $(X-N)\,{}^t(X-N) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. De plus ${}^t\left((X-N)\,{}^t(X-N)\right) = {}^t\left({}^t(X-N)\right){}^t(X-N) = (X-N)\,{}^t(X-N)$.

Donc $(X-N)\,{}^t(X-N)$ est une matrice symétrique et réelle de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ (!) donc

il existe une base orthonormale $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ de E_p constituée de vecteurs propres de $(X-N)\,{}^t(X-N)$ respectivement associée aux valeurs propres $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p$ avec $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_p$.

Q2 Reprenons deux sous-espaces vectoriels H_1 et H_2 de E_p.

$\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 + H_2)$ et $\dim(H_1 + H_2) \leq p$ car $H_1 + H_2$ est un sous-espace vectoriel de E_p. Alors :

$\dim(H_1 \cap H_2) \geq \dim H_1 + \dim H_2 - p$.

$(a_i, \dots, a_p)$ libre

$\dim G_i \geq i$

$\dim \mathrm{Vect}(a_i, \dots, a_p) = p - (i-1)$

a) Ainsi $\dim(G_i \cap \mathrm{Vect}(a_i, \dots, a_p)) \geq \dim G_i + \dim \mathrm{Vect}(a_i, \dots, a_p) - p \geq i + p - (i-1) - p = 1$

$\dim(G_i \cap \mathrm{Vect}(a_i, \dots, a_p)) \geq 1$.

b) Alors $G \cap \mathrm{Vect}(a_i, \dots, a_p)$ est un sous-espace vectoriel distinct de $\{0_{E_p}\}$.

Ce sous-espace contient donc au moins un vecteur unitaire u.

$u \in G$ et $u \in \mathrm{Vect}(a_i, \dots, a_p)$. $\exists (z_i, \dots, z_p) \in \mathbb{R}^{p-i+1}$, $u = \sum_{k=i}^{p} z_k a_k$.

$\| {}^t(X-N)u \|_n^2 = \langle {}^t(X-N)u, {}^t(X-N)u \rangle_n = {}^t u (X-N) {}^t(X-N) u = \langle u, (X-N){}^t(X-N)u \rangle$

$$\text{or } (X-N){}^t(N-X)u = (X-N){}^t(N-X)\left(\sum_{k=i}^{p} z_k a_k\right) \overset{\text{ok!}}{=} \sum_{k=i}^{p} z_k \sigma_k a_k$$

comme $(a_1, \dots, a_p)$ est une base orthonormale de E_p : $\langle u, (X-N){}^t(N-N)u \rangle = \sum_{k=i}^{p} z_k (z_k \sigma_k)$

et $\|u\|^2 = \sum_{k=i}^{p} z_k^2$.

$\sigma_p \leq \sigma_{p-1} \leq \dots \leq \sigma_i$ et $z_k^2 \geq 0$

Alors $\| {}^t(X-N)u \|_n^2 = \sum_{k=i}^{p} z_k^2 \sigma_k \leq \left(\sum_{k=i}^{p} z_k^2\right) \sigma_i = \|u\|^2 \sigma_i = \sigma_i$.

<u>Il existe un vecteur unitaire u de G tel que $\| {}^t(X-N)u \|_n^2 \leq \sigma_i$.</u>

<u>c)</u> • $\dim H \geq \dim \mathrm{Ker}\, \phi_{{}^tN} + \dim \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{s+i}) - p = \dim \mathrm{Ker}\, \phi_{{}^tN} + s + i - p$.

Rappelons que $\mathrm{rg}\, {}^tN = \mathrm{rg}\, N = s$. Alors $\dim \mathrm{Im}\, \phi_{{}^tN} = s$.

$\phi_{{}^tN}$ est une application linéaire de E_p dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. La relation du rang

donne $\mathrm{Ker}\, \phi_{{}^tN} = \dim E_p - \dim \mathrm{Im}\, \phi_{{}^tN} = p - s$.

Alors $\dim H \geq p - s + s + i - p = i$. <u>$\dim H \geq i$</u>.

Appliquons alors <u>b)</u> avec $G = H$. On peut donc trouver un vecteur

unitaire u de H tel que : $\| {}^t(X-N)u \|_n^2 \leq \sigma_i$.

$H = \mathrm{Ker}\, \phi_{{}^tN} \cap \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{s+i})$ donc ${}^tNu = 0$.

Alors $\| {}^t(X-N)u \|_n^2 = \| {}^tXu \|_n^2 = {}^t({}^tXu){}^tXu = {}^tuX{}^tXu = {}^tuVu$. <u>${}^tuVu \leq \sigma_i$</u>

$\exists (\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_{s+i}) \in \mathbb{R}^{s+i}$; $u = \sum_{k=1}^{s+i} \hat{z}_k e_k$. $Vu = \sum_{k=1}^{s+i} \hat{z}_k \lambda_k e_k$

Alors ${}^tuVu = \langle u, Vu \rangle = \sum_{k=1}^{s+i} \hat{z}_k^2 \lambda_k$ et $\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{s+i} \hat{z}_k^2$

Donc $\sigma_i \geq {}^tuVu = \sum_{k=1}^{s+i} \hat{z}_k^2 \lambda_k \geq \left(\sum_{k=1}^{s+i} \hat{z}_k^2\right) \lambda_{s+i}$ car $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{s+i}$ (et $\hat{z}_k^2 \geq 0$).

Alors $\sigma_i \geq \left(\sum_{\ell=1}^{s+i} \hat{z}_\ell^2\right) \lambda_{s+i} = \lambda_{s+i} \|u\|^2 = \lambda_{s+i}$. Finalement $\underline{\underline{\lambda_{s+i} \leq \sigma_i}}$.

(Q3) a) La matrice de $\phi_{{}^t(X-N)(X-N)}$ dans la base $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$

donc ${}^t(X-N)(X-N)$ est semblable à $\mathrm{Diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$.

Alors $\mathrm{Tr}({}^t(X-N)(X-N)) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)) = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i$

donc $\theta(X-N, X-N) = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i$. Ainsi $\underline{\underline{|||X-N|||^2 = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i}}$.

b) $\forall i \in [\![1, r-s]\!]$, $\lambda_{s+i} \leq \sigma_i$.

$\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\|{}^t(X-N)a_i\|_n^2 = {}^ta_i\,{}^t(X-N)(X-N)a_i = \sigma_i\,{}^ta_i a_i = \sigma_i \|a_i\|^2 = \sigma_i$.

Donc $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\sigma_i \geq 0$.

Alors $|||X-N|||^2 = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i \geq \sum_{i=1}^{r-s} \sigma_i \geq \sum_{i=1}^{r-s} \lambda_{s+i} = \sum_{i=s+1}^{r} \lambda_i$.

c) Rappelons que pour $s \in [\![1, r-1]\!]$, $|||X-X_s|||^2 = \sum_{i=s+1}^{r} \lambda_i$. (IV Q3)

Ainsi
1) $X_s \in M_{p,n}(\mathbb{R})$
2) $\mathrm{rg}\, X_s = s$ (III Q4 b)
3) $\forall N \in M_{p,n}(\mathbb{R})$, $\mathrm{rg}\, N \leq s \Rightarrow |||X-X_s|||^2 = \sum_{i=s+1}^{r} \lambda_i \leq |||X-N|||^2$.

<u>Ainsi X_s réalise la meilleure approximation de X par des matrices de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang inférieur ou égal à s au sens de la norme $|||\cdot|||$.</u>

(Q4) a) Notons $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Si $j \in [\![1, n]\!]$, $X\omega_j$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne de X c'est dire c_j.

Alors $K(G) = \sum_{j=1}^{n} \|P_G(c_j)\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|\Pi_G c_j\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|\Pi_G X \omega_j\|^2$

Donc $K(G) = \sum_{j=1}^{n} \| \Pi_G X \omega_j \|^2 = \sum_{j=1}^{n} \left({}^t\omega_j \, {}^t(\Pi_G X) \Pi_G X \omega_j \right)$.

Posons $A = {}^t(\Pi_G X) \Pi_G X$. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $j \in [\![1, n]\!]$.

$A\omega_j$ est la $j^{ème}$ colonne de A donc ${}^t\omega_j A \omega_j$ n'est autre que le $j^{ème}$ coefficient de la diagonale de A. Ainsi $\sum_{j=1}^{n} {}^t\omega_j A \omega_j = Tr(A)$.

Alors $K(G) = Tr\left({}^t(\Pi_G X) \Pi_G X\right) = Tr\left(\Pi_G X \, {}^t(\Pi_G X)\right) = \Theta(\Pi_G X, \Pi_G X)$

Par conséquent $K(G) = |||\Pi_G X|||^2$.

b) $X = (X - \Pi_G X) + \Pi_G X$. Montrons que les matrices $X - \Pi_G X$ et $\Pi_G X$ sont orthogonales pour Θ.

$\Theta(X - \Pi_G X, \Pi_G X) = Tr\left((X - \Pi_G X) \, {}^t(\Pi_G X)\right) = Tr\left({}^t(\Pi_G X)(X - \Pi_G X)\right)$.

$\Theta(X - \Pi_G X, \Pi_G X) = Tr\left({}^tX \, {}^t\Pi_G (X - \Pi_G X)\right) = Tr\left({}^tX \, {}^t\Pi_G X - {}^tX \, {}^t\Pi_G \Pi_G X\right)$.

Π_G est la matrice dans une base orthonormale de la projection orthogonale P_G.

Si $\mathcal{B}_1$ est une base orthonormale de G et $\mathcal{B}_2$ est une base orthonormale de $G^\perp$

1°. $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base orthonormale de E_p

2°) La matrice de P_G dans $\mathcal{B}$ est diagonale ($\forall u \in G$, $P_G(u) = u$ et $\forall u \in G^\perp$, $P_G(u) = 0$) donc symétrique.

Ainsi P_G est un endomorphisme symétrique de E_p. Sa matrice Π_G dans la base canonique, et donc orthonormale, est alors symétrique. ${}^t\Pi_G = \Pi_G$.

De plus $P_G \circ P_G = P_G$ alors ${}^t\Pi_G \Pi_G = \Pi_G^2 = \Pi_G$.

Par conséquent $\Theta(X - \Pi_G, X - \Pi_G) = Tr({}^tX \, {}^t\Pi_G X - {}^tX \, {}^t\Pi_G \Pi_G X) = Tr({}^tX \, \Pi_G X - {}^tX \, \Pi_G X) = 0$!

$X = (X - \Pi_G X) + \Pi_G X$ et, $X - \Pi_G X$ et $\Pi_G X$ sont orthogonaux pour Θ.

Alors, Pythagore, donne : $|||X|||^2 = |||X - \Pi_G X|||^2 + |||\Pi_G X|||^2$

Ainsi $|||\Pi_G X|||^2 = |||X|||^2 - |||X - \Pi_G X|||^2$; $\underline{\underline{K(G) = |||X|||^2 - |||X - \Pi_G X|||^2}}$.

c) • Pour montrer que $K(G) \leq \sum_{i=1}^{s} \lambda_i$ il suffit de montrer que $|||X|||^2 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i$ et que $|||X - \Pi_G X|||^2 \geq \sum_{i=s+1}^{r} \lambda_i$. Commençons par le second point.

Il sera prouvé, grace à V § 3 b) si nous montrons que $\operatorname{rg}(\Pi_G X) \leq s$.

$\operatorname{rg} \Pi_G X = \dim \operatorname{Im} P_G \circ \phi_X = \dim P_G(\phi_X(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})))$

$\phi_X(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) \subset E_p$ donc $P_G(\phi_X(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))) \subset P_G(E_p) = \operatorname{Im} P_G = G$

Ainsi $\operatorname{rg}(\Pi_G X) = \dim P_G(\phi_X(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))) \leq \dim G = s$

Alors $|||X - \Pi_G X|||^3 \geq \sum_{i=s+1}^{r} \lambda_i$.

$|||X|||^2 = \Theta(X,X) = Tr(X^t X) = Tr(V) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$ car V est semblable à la matrice diagonale $\operatorname{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ (qui n'est autre que la matrice de Π_V dans $(e_1, e_2, \dots, e_p)$).

Ainsi $K(G) = |||X|||^2 - |||X - \Pi_G X|||^2 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i - |||X - \Pi_G X|||^2 \leq \sum_{i=1} \lambda_i - \sum_{i=s+1}^{r} \lambda_i = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i$

$\underline{\underline{K(G) \leq \sum_{i=1}^{s} \lambda_i}}$.

• Posons $G' = \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_s)$. Montrons que $P_{G'} = \sum_{i=1}^{s} \phi_{\Pi_i}$.

$\forall k \in [\![1, s]\!]$, $\sum_{i=1}^{s} \phi_{\Pi_i}(e_k) = \phi_{\Pi_k}(e_k) = e_k = P_{G'}(e_k)$

$\forall k \in [\![s+1, p]\!]$, $\sum_{i=1}^{s} \phi_{\Pi_i}(e_k) = 0_{E_p} = P_{G'}(e_k)$ ($\forall k \in [\![s+1, p]\!]$, $e_k \in G'^{\perp}$)

Ainsi $\sum_{i=1}^{s} \phi_{\Pi_i}$ et $P_{G'}$ sont deux endomorphismes de E_p qui coïncident sur la base $(e_1, \dots, e_p)$ de E_p. $\sum_{i=1}^{s} \phi_{\Pi_i} = P_{G'}$ donc $\sum_{i=1}^{s} \Pi_i = \Pi_{G'}$

Alors $\Pi_{G'}X = \sum_{i=1}^{s} \Pi_i X = X_s$. IV §3

Par conséquent $K(G') = |||X|||^2 - |||X-\Pi_{G'}X|||^2 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i - |||X - X_s|||^2 = \sum_{i=1}^{r}\lambda_i - \sum_{i=s+1}^{r}\lambda_i = \sum_{i=1}^{s}\lambda_i$

1°/ si G est un sous-espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à s : $K(G) \le \sum_{i=1}^{s}\lambda_i$

2°/ $G' = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_s)$ est de dimension s donc inférieure ou égale à s et $K(G') = \sum_{i=1}^{s}\lambda_i$

Alors $K(\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_s)) = \sum_{i=1}^{s}\lambda_i$ est le maximum des $K(G)$, lorsque G parcourt l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E_p dont la dimension est inférieure ou égale à s

d) 1er Cas.. $s \le r-1$. Nous venons de prouver le résultat.

2ème Cas.. $s \ge r$. Soit G un sous-espace vectoriel de E_p de dimension au plus s. $K(G) = |||X|||^2 - |||X-\Pi_G X|||^2 \le |||X|||^2$.

Posons ici encore $G' = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_s)$ et montrons que $K(G') = |||X|||^2 = \sum_{i=1}^{r}\lambda_i$

une démonstration analogue à celle de c) montre sans difficulté que :

$P_{G'} = \sum_{i=1}^{s} \phi_{\Pi_i}$. Donc $\Pi_{G'} = \sum_{i=1}^{s} \Pi_i$.

Alors $\Pi_{G'}X = \sum_{i=1}^{s} \Pi_i X = \sum_{i=1}^{r} \Pi_i X = X$. Alors $K(G') = |||X|||^2 - |||X-\Pi_{G'}X|||^2 = |||X|||^2$

$\Pi_i X = 0$ pour $i > r$ (III §3)

G' est donc un sous-espace vectoriel de E_p de dimension s, donc au plus s et $K(G') = |||X|||^2$

Rappelons que si G est un sous-espace vectoriel de E_p de dimension au plus s alors $K(G) \le |||X|||^2$.

On retrouve ainsi le résultat de c) avec $s \ge r$.

Finalement si $s \in [\![1, p]\!]$, $K(\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_s)) = \sum_{i=1}^{\min(s,r)} \lambda_i$ est le maximum des nombres $K(G)$ lorsque G parcourt l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E_p dont la dimension est inférieure ou égale à s.

Partie VI. Non multa, sed mutum.

Q1 $K(\mathrm{Vect}(e_1, e_2)) = \lambda_1 + \lambda_2 = 90$

Q2 le nuage du dessin est le nuage des projections orthogonales des points du nuage initial sur le plan engendré par e_1 et e_2.

ce plan est celui qui donne la meilleure représentation en deux dimensions du nuage initial.