Question 7 ESCP 2003 Soit (X_n) une suite de variables aléatoires qui converge en loi vers une variable aléatoire X. A-t-on $\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = E(X)$?

$X_n(\Omega) = \{\frac{1}{n}, n\}$. $P(X_n = \frac{1}{n}) = \frac{n}{n+1}$ et $P(X_n = n) = \frac{1}{n+1}$.

(*) (X_n) converge en loi vers la variable certaine nulle (et même en proba)

$\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = 1$!

(*) Détaillons ! Notons F_n la fonction de répartition de X_n

$\forall x \in]-\infty, \frac{1}{n}[$, $F_n(x) = 0$; $\forall x \in [\frac{1}{n}, n[$, $F_n(x) = P(X_n = \frac{1}{n}) = \frac{n}{n+1}$ et

$\forall x \in [n, +\infty[$, $F_n(x) = 1$.

1) $\forall x \in]-\infty, 0]$, $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$.

2) Soit $x \in]0, +\infty[$. $\exists n_1 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in [\![n_1, +\infty[\![$, $x \in [\frac{1}{n}, n[$ car

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$.

$\forall n \in [\![n_1, +\infty[\![$, $F_n(x) = \frac{n}{n+1}$; $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 1$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0] \\ 1 \text{ si } x \in]0, +\infty[\end{cases}.$$

Notons G la fonction de répartition d'une variable certaine nulle.

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 \text{ si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$
- G est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$ mais n'est pas continue en 0.
- $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = G(x)$.

Alors (X_n) converge en loi vers la variable certaine nulle.

Question 1 ESCP 2004 Soit (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et X une variable aléatoire définie également sur cet espace. On suppose que (X_n) converge en loi vers X, la suite $(X_n - X)$ converge-t-elle nécessairement en loi vers la variable certaine nulle ?

Non ! Prendre $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et poser $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = -X$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{X_n} = F_X$!

Ainsi (X_n) converge en loi vers X mais $(X_n - X)$ ne converge pas en loi vers la variable certaine nulle car $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n - X = -2X$.

Question 10 **ESCP 2005** Soit $(X_n)_n$ et X des variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé.

A-t'on : si la suite (X_n) converge en loi vers X, alors $(X_n - X)$ converge en loi vers 0 ?

Soit X, Y, Z des variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé.

A-t'on : [X, Y suivent la même loi] $\Rightarrow$ [XZ, YZ suivent la même loi] ?

- Prenons $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et posons $X_n = -X$

  Alors $X_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

  Donc (X_n) converge en loi vers X mais $(X_n - X)$ ne converge pas en loi vers 0.

- ① $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, \frac{1}{2})$ et $Y = 1 - X$.

  Alors X et Y suivent la même loi.

  Posons $Z = X$. $XZ = X^2$ et $YZ = (1-X)X$

  $XZ = X^2$ a la loi de X et YZ est nulle.

  ② $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, $Y = -X$, $Z = X$.

  Alors X et Y ont même loi.

  $XZ = X^2$ et $YZ = -X^2$ n'ont pas la même loi.

Question 5 **ESCP 2009** $\boxed{\textbf{F1}}$

Soit un réel $a > 0$. Pour tout entier $n > a$, on considère une variable aléatoire X_n suivant la loi géométrique de paramètre a/n.

Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires définies par $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

Ceci n'est pas une correction. vu en QSP à l'ESCP en 2011, 2018

Posons $n_0 = \mathrm{Ent}(a) + 1$. Soit $n \in [\![n_0, +\infty [\![$.

$Y_n(\Omega) = \left\{ \frac{k}{n} ; k \in \mathbb{N}^* \right\}$. Notons F_n la fonction de répartition de Y_n.

$\forall x \in]-\infty, \frac{1}{n}[$, $F_n(x) = 0$

$\forall x \in [\frac{1}{n}, +\infty[$, $F_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}^* \text{ et} \\ \frac{k}{n} \leqslant x}} P(Y_n = \frac{k}{n}) = \sum_{k=1}^{\mathrm{Ent}(nx)} P(X_n = k) = \sum_{k=1}^{\mathrm{Ent}(nx)} \frac{a}{n}\left(1 - \frac{a}{n}\right)^{k-1}$

$\forall x \in [\frac{1}{n}, +\infty[$, $F_n(x) = \frac{a}{n} \frac{1 - (1 - \frac{a}{n})^{\mathrm{Ent}(nx)}}{1 - (1 - \frac{a}{n})} = 1 - \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \begin{cases} 1 - (1 - \frac{a}{n})^{\mathrm{Ent}(nx)} & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

<u>Remarque</u>.. Soit $x \in]0, \frac{1}{n}[$. $\mathrm{Ent}(nx) = 0$. Alors $F_n(x) = 0 = 1 - \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)}$.

Nous pouvons alors écrire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 1 - (1 - \frac{a}{n})^{\mathrm{Ent}(nx)} & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$.

$\forall x \in]-\infty, 0]$, $\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$

Soit $x \in]0, +\infty[$. $\mathrm{Ent}(nx) \ln(1 - \frac{a}{n}) \underset{n \to +\infty}{\sim} (nx)(-\frac{a}{n}) = -ax$.

Alors $\lim_{n \to +\infty} \left(\mathrm{Ent}(nx) \ln(1 - \frac{a}{n})\right) = -ax$.

Alors $\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - e^{\mathrm{Ent}(nx) \ln(1 - \frac{a}{n})}\right) = 1 - e^{-ax}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

(Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre a.

R

Question 15 **ESCP 2010** E. JARDIN $\boxed{\textbf{F1}}$

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $P(X_n = 1) = p$ et $P(X_n = -1) = q = 1 - p$ $(0 < p < 1)$.

Trouver la loi de $Y_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} X_k$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que la suite Y_n converge en loi.

$\boxed{\text{V1}}$ $Y_n(\Omega) = \{-1, 1\}$. $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathcal{S}_k$ est l'ensemble des parties de $[\![1, n]\!]$ ayant k éléments.

$$\{Y_n = 1\} = \bigcup_{0\leqslant 2k\leqslant n}\ \bigcup_{J\in\mathcal{S}_{2k}} \Big[\Big(\bigcap_{j\in J}\{X_j=-1\}\Big)\cap\Big(\bigcap_{j\in\overline{J}}\{X_j=1\}\Big)\Big] \quad !!!$$

En effet $\{Y_n = 1\}$ se réalise si et seulement si un nombre pair de variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ prennent la valeur -1.

Par incompatibilité :

$$P(Y_n=1) = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\ \sum_{J\in\mathcal{S}_{2k}} P\Big(\Big(\bigcap_{j\in J}\{X_j=-1\}\Big)\cap\Big(\bigcap_{j\in\overline{J}}\{X_j=1\}\Big)\Big)$$

par indépendance

$$P(Y_n=1) = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\ \sum_{J\in\mathcal{S}_{2k}} \Big(\prod_{j\in J} P(X_j=-1)\Big)\Big(\prod_{j\in\overline{J}} P(X_j=1)\Big)$$

$$P(Y_n=1) = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\ \sum_{J\in\mathcal{S}_{2k}} q^{\operatorname{card} J}\times p^{\operatorname{card}\overline{J}} = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\ \sum_{J\in\mathcal{S}_{2k}} q^{2k}\, p^{n-2k}.$$

$\forall k' \in [\![0, n]\!]$, $\operatorname{card} \mathcal{S}_{k'} = \binom{n}{k'}$.

$$\underline{\underline{P(Y_n=1) = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \binom{n}{2k} q^{2k} p^{n-2k}}}$$

$$1 = (p+q)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} q^k p^{n-k} = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k} q^{2k} p^{n-2k} + \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1} q^{2k+1} p^{n-(2k+1)}$$

$$(p-q)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-q)^k p^{n-k} = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k} q^{2k} p^{n-2k} - \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1} q^{2k+1} p^{n-(2k+1)}$$

En ajoutant il vient : $1 + (p-q)^n = 2\,P(Y_n=1)$. $\underline{\underline{P(Y_n=1) = \frac{1}{2}\big(1+(p-q)^n\big)}}$.

$P(Y_n=-1) = 1 - P(Y_n=1) = 1 - \frac{1}{2}\big(1+(p-q)^n\big)$. $\underline{\underline{P(Y_n=-1) = \frac{1}{2}\big(1-(p-q)^n\big)}}$.

$\boxed{V2}$ Même chose en plus simple. Soit N la variable aléatoire qui compte le nombre de variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ prenant -1. $X_1, X_2, \dots, X_n$ étant indépendantes, N suit la loi binomiale de paramètres n et q.

$\{Y_n = 1\}$ se réalise si et seulement si N prend pour valeur un entier pair de l'intervalle $[\![0, n]\!]$.

Alors $P(Y_n=1) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} P(N = 2k) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} q^{2k} p^{n-2k} = \dots = \frac{1}{2}\left(1 + (p-q)^n\right)$.

voir V1.

$\boxed{V3}$ $Y_n(\Omega) = \{-1, 1\}$. Posons $\alpha = P(Y_n = 1)$.

$E(Y_n) = 1 \times \alpha + (-1)(1-\alpha) = 2\alpha - 1$.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $E(X_i) = 1 \times p + (-1) \times q = p - q$.

Alors $2\alpha - 1 = E(Y_n) = E(X_1 X_2 \cdots X_n) = E(X_1) E(X_2) \cdots E(X_n) = (p-q)^n$.

Ainsi $P(Y_n = 1) = \alpha = \frac{1}{2}\left(1 + (p-q)^n\right)$.

$p \in]0,1[$. $q = 1-p \in]0,1[$. $p - q \in]-1,1[$. $|p-q| < 1$.

Alors $\lim_{n \to +\infty} (p-q)^n = 0$

donc $\lim_{n \to +\infty} P(Y_n = 1) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n \to +\infty} P(Y_n = -1) = \frac{1}{2}$.

Alors $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

Vu en 2011

Question 24 **ESCP 2010** D. ATTIAS $\boxed{\textbf{F1}}$

On lance une pièce qui donne face avec la probabilité p (où p appartient $]0,1[$). n est entier supérieur ou égal 1. On note : P_n (resp. F_n) la variable aléatoire égale au nombre de piles (resp. faces) obtenus au cours des n premiers lancers. ε est un réel strictement positif.

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{F_n-P_n}{n}-(1-2p)\right|\leqslant \varepsilon\right)=1.$

- Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $X_n=\dfrac{F_n-P_n}{n}$. $X_n=\dfrac{(n-P_n)-P_n}{n}=1-\dfrac{2P_n}{n}$. Posons $q=1-p$.

$P_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. $E(P_n)$ (resp. $V(P_n)$) existe et vaut np (resp. npq)

Alors $E(X_n)$ existe et vaut $1-\dfrac{2}{n}\times np$ donc $1-2p$ et $V(X_n)$ existe et vaut $\left(-\dfrac{2}{n}\right)^2\times npq$ donc $\dfrac{4pq}{n}$.

- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leqslant P(|X_n-E(X_n)|>\varepsilon)\leqslant \dfrac{V(X_n)}{\varepsilon^2}$. Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{V(X_n)}{\varepsilon^2}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4pq}{n\varepsilon^2}\right)=0$.

Par encadrement on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(|X_n-E(X_n)|>\varepsilon)=0$.

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(|X_n-E(X_n)|\leqslant\varepsilon)=\lim_{n\to+\infty}\big(1-P(|X_n-E(X_n)|>\varepsilon)\big)=1$.

Finalement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{F_n-P_n}{n}-(1-2p)\right|\leqslant\varepsilon\right)=1.$

R.

Question 5 **ESCP 2011** E. PHILIP

α est un élément de $]0,1]$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, X_n suit la loi binômiale de paramètres n et $\dfrac{\alpha}{n}$.

Montrer que la suite (X_n) converge en loi et trouver la loi limite.

Notons que ceci est une question de cours (Programme VI 5) b).

Notons que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{\alpha}{n})$ suppose $\frac{\alpha}{n} \leqslant 1$ donc $n \geqslant \alpha$.

Posons alors $n_0 = \text{Ent}(\alpha)+1$. $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $n \geqslant n_0 = \text{Ent}(\alpha)+1 > \alpha$.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $\frac{\alpha}{n} \in [0, 1[$.

Alors $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(X_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^k \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{n-k}$.

Fixons k dans $\mathbb{N}$.

$\forall n \in [\![\max(k, n_0), +\infty[\![$, $P(X_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^k \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{n-k} \underset{1-\frac{\alpha}{n}>0}{=} \binom{n}{k}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^k e^{(n-k)\ln\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)}$.

$\binom{n}{k}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^k \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{k!}\,\dfrac{\alpha^k}{n^k} = \dfrac{\alpha^k}{k!}$.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\binom{n}{k}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^k\right) = \frac{\alpha^k}{k!}$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{\alpha}{n}\right) = 0$ donc $\ln\left(1-\frac{\alpha}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\alpha}{n}$. $(n-k)\ln\left(1-\frac{\alpha}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\left(-\frac{\alpha}{n}\right) = -\alpha$.

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left((n-k)\ln\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\right) = -\alpha$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{(n-k)\ln\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)} = e^{-\alpha}$.

Le tout donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}$ et ceci pour tout k dans $\mathbb{N}$.

Donc (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre α.

R

Question 24 **ESCP 2012** $\boxed{\text{F 1}}$ Obtenue par **S. TEIAR**

Q1. Montrer que la fonction $F : x \to \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ vérifie les propriétés d'une fonction de répartition.

Q2. Déterminer la loi de la borne supérieure M_n de n variables aléatoires indépendantes de même fonction de répartition F.

Q3. Étudier la convergence en loi de la suite $(M_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Déja vu en 2011.

Q1 • $\forall x \in \mathbb{R}$, $1+e^{-x} \geqslant 1 > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \dfrac{1}{1+e^{-x}} \leqslant 1$.

F est une application de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$

• $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} F(x) = 0$ car $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} (1+e^{-x}) = +\infty$

$\lim\limits_{x\mapsto +\infty} F(x) = 1$ car $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} (1+e^{-x}) = 1$

• F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = -\dfrac{(-e^{-x})}{(1+e^{-x})^2} = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \geqslant 0$.

F est croissante sur $\mathbb{R}$.

__Remarque__.. le premier point est contenu dans les deux suivants.

• $x \mapsto 1+e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et ne s'y annule pas.

Ainsi F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Les quatre points précédents montrent que F est la fonction d'une variable aléatoire à densité

__Ainsi F a concernant ses propriétés (caractéristiques) d'une fonction de répartition.__

__Remarque__.. Au point quatre on pouvait se contenter de montrer que F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant toutes pour fonction de répartition F. Posons $M_n = \operatorname{Sup}(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Notons F_n la fonction de répartition de M_n... __Exercice__.. montrer que M_n est une variable aléatoire.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = P(M_n \leqslant x) = P(\{X_1 \leqslant x\} \cap \{X_2 \leqslant x\} \cap \dots \cap \{X_n \leqslant x\})$.

Par indépendance on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = P(X_1 \leqslant x) P(X_2 \leqslant x) \cdots P(X_n \leqslant x) = (F(x))^n$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \left(\dfrac{1}{1+e^{-x}}\right)^n$.

R

F_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi M_n est une variable aléatoire à densité et F'_n en est une densité.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'_n(x) = n \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)^{n-1} = \frac{n e^{-x}}{(1+e^{-x})^{n+1}}$$

(Q3) Notons G_n la fonction de répartition de $M_n - \ln n$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = P(M_n - \ln n \leq x) = P(M_n \leq x + \ln n) = F_n(x + \ln n) = \left(\frac{1}{1 + e^{-x-\ln n}}\right)^n$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n} e^{-x}\right)^{-n} = e^{-n \ln(1 + \frac{1}{n} e^{-x})}.$$ Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} e^{-x}\right) = 0$ donc $-n \ln(1 + \frac{1}{n} e^{-x}) \underset{n \to +\infty}{\sim} -n\left(\frac{1}{n}\right)e^{-x} = -e^{-x}$.

$\lim_{n \to +\infty} \left(-n \ln(1 + \frac{1}{n})e^{-x}\right) = -e^{-x}$. Alors $\lim_{n \to +\infty} G_n(x) = e^{-e^{-x}}$. Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = e^{-e^{-x}}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n \to +\infty} G_n(x) = G(x)$. Montrons que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire.

- $\forall x \in \mathbb{R},\ -e^{-x} < 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = e^{-e^{-x}} \in [0,1]$. G est une application de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$.
- $\lim_{x \to -\infty} (-e^{-x}) = -\infty$ donc $\lim_{x \to -\infty} G(x) = 0$. $\lim_{x \to +\infty} (-e^{-x}) = 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} G(x) = 1$.
- $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. $x \mapsto -e^{-x}$ est croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $t \mapsto e^t$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

  Par composition G est croissante sur $\mathbb{R}$.
- $x \mapsto -e^{-x}$ et $t \mapsto e^t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par composition G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Le tout suffit pour dire que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Ainsi la suite $(M_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité de fonction de répartition G ... et de densité $x \mapsto e^{-x} e^{-e^{-x}}$.