Question 4 D'apès HEC 2006

Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}$ (on pourra introduire une variable aléatoire usuelle).

Revient à prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} e^{-n} = \frac{1}{2}$.

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de va qui suivent une loi de Poisson de paramètre 1 et qui sont indépendantes.

Posons $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

$S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$. $E(S_n) = n$ et $V(S_n) = n$.

$S_n^* = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{loi}}$ vers $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right) = \phi(0) = \frac{1}{2}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} (P(S_n \leqslant n)) = \frac{1}{2}$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} e^{-n} = \frac{1}{2}$ cqfd.

Question 9 **HEC 2006** $\boxed{\textbf{F 2}}$ *élève*

On considéres deux suites $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$ X_n et Y_n suivent la loi exponentielle de paramètre λ. On suppose que X_1, X_2, ..., X_n, ..., Y_1, Y_2, ..., Y_n, ... sont mutuellement indépendantes.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, N_n est la variable alétoire égale au nombre d'indices i de $[\![1,n]\!]$ tels que lévénement $\{X_i \leqslant Y_i\}$ se réalise.

Montrer que la suite te terme général $\dfrac{N_n}{n}$ converge en probabilité vers $\dfrac{1}{2}$.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $B_i = \mathbb{1}_{\{X_i \leq Y_i\}}$.

$(B_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de var → indépendantes
→ ayant même loi
→ possédant une espérance et une variance.

La loi faible des grands nombres montre que $\dfrac{N_n}{n} = \dfrac{B_1+B_2+\cdots+B_n}{n}$ converge en probabilité vers $E(B_1) = P(X_1 \leq Y_1)$.

$Y_1 - X_1$ est une var à d (★ de convolution).

$P(Y_1 - X_1 = 0) = 0$. $Y_1 - X_1$ et $X_1 - Y_1$ ont même loi.

Alors $1 = P(X_1 - Y_1 > 0) + P(X_1 - Y_1 = 0) + P(X_1 - Y_1 < 0) = 2P(X_1 - Y_1 < 0) = 2P(X_1 - Y_1 \leq 0)$.

$P(X_1 - Y_1 \leq 0) = \frac{1}{2}$; $P(X_1 \leq Y_1) = \frac{1}{2}$.

Alors $\left(\frac{N_n}{n}\right)$ converge en probabilité vers $\frac{1}{2}$.

R

R.

Question 13 **HEC 07-13-S107** [F 1] Déterminer une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, chacune prenant deux valeurs, telle que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable nulle mais telle que la suite $\big(E(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1 et la suite $\big(V(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tende vers $+\infty$.

Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ posons $D_n=\{\frac{1}{n},n\}$ et considérons l'application f_n de D_n dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(\frac{1}{n})=\frac{n-1}{n}$ et $f_n(n)=\frac{1}{n}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: • D_n est fini • f_n prend ses valeurs dans $[0,1]$ et • $f_n(\frac{1}{n})+f_n(n)=1$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est la loi de probabilité d'une variable aléatoire X_n sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $E(X_n)=\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\times n=1+\frac{n-1}{n^2}$. Alors $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}E(X_n)=1}}$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $E(X_n^2)=\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\times n^2=\frac{n-1}{n^3}+n$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}E(X_n^2)=+\infty$; donc

$\lim\limits_{n\to+\infty}V(X_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(E(X_n^2)-(E(X_n))^2\right)=+\infty$. $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}V(X_n)=+\infty}}$.

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. $\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$.

Alors $\exists n_1\in\mathbb{N}^*$, $\forall n\in[\![n_1,+\infty[\![$, $n>\varepsilon$ et $\exists n_2\in\mathbb{N}^*$, $\forall n\in[\![n_2,+\infty[\![$, $\frac{1}{n}<\varepsilon$.

Posons $n_0=\max(n_1,n_2)$. $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $\frac{1}{n}<\varepsilon<n$.

$\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $0\leq P(|X_n-0|\geq\varepsilon)=P(|X_n|\geq\varepsilon)=P(X_n\geq\varepsilon)=P(X_n=n)=\frac{1}{n}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty}P(|X_n-0|\geq\varepsilon)=0$ et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $\underline{\underline{(X_n)_{n\geq1}\text{ converge en probabilité vers la variable certaine nulle.}}}$

R..

Question 1 HEC 2008 S1 $\boxed{\text{F1}}$

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit λ un réel strictement positif. Pour tout n strictement supérieur ou égal λ on considère la variable aléatoire $N_n = \dfrac{1}{n}\ \mathrm{Inf}\{i, X_{i,n} = 1\}$, où $(X_{i,n})_{i \geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telle que pour tout entier i $X_{i,n}$ suive une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}$.

Étudier la convergence en loi de la suite de terme général N_n.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Soit $n \in]\lambda, +\infty[\cap \mathbb{N}$. $n N_n = \mathrm{Inf}\{i\,;\, X_{i,n} = 1\}$. $(nN_n)(\Omega) = \mathbb{N}^*$. indépendance.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(nN_n = k) = P(\{X_{1,n}=0\} \cap \{X_{2,n}=0\} \cap \ldots \{X_{k-1,n}=0\} \cap \{X_{k,n}=1\}) = \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{k-1} \frac{\lambda}{n}$

$nN_n \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$. Notons F_n la fonction de répartition de N_n.

$\forall x \in]-\infty, \frac{1}{n}[$, $F_n(x) = 0$. Nous retiendrons que $\forall x \in]-\infty, 0]$, $F_n(x) = 0$.

Soit $x \in [\frac{1}{n}, +\infty[$, $F_n(x) = P(N_n \leqslant x) = P(nN_n \leqslant nx) = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant nx} P(nN_n = k) = \sum_{k=1}^{\mathrm{Ent}(nx)} P(nN_n = k)$

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{\mathrm{Ent}(nx)} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{k-1} \frac{\lambda}{n} = \frac{\lambda}{n}\, \frac{1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)}}{1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)} = 1 - \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)}$$

Notons que si $x \in]0, \frac{1}{n}[$, $\mathrm{Ent}(nx) = 0$ donc $F_n(x) = 0$ et $1 - \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)} = 0$.

Finalement $\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) =}} \begin{cases} 1 - \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$\forall x \in]-\infty, 0]$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$. Soit $x \in]0, +\infty[$.

$\mathrm{Ent}(nx) \ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} (nx)\left(-\frac{\lambda}{n}\right) = -\lambda x$; $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\mathrm{Ent}(nx) \ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\right) = -\lambda x$.

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - e^{\mathrm{Ent}(nx) \ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)}\right) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n \to +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>La suite de terme général N_n converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.</u>

R

Question 6 HEC 2008 S6 $\boxed{\text{F1}}$

Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit θ un réel strictement postif et pour tout n dans $\mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $n\,\theta$.

Q1. Montrer que la suite de terme général $\dfrac{X_n - n\,\theta}{n}$ converge en probabilité vers 0.

Q2. En désuire que pour x réel distinct de θ l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(e^{-n\,\theta}\sum_{k\leqslant n\,x}\frac{(n\,\theta)^k}{k!}\right)$.

Remarque : dans le texte initial il y avait un λ réel strictement positif à la place de n et on faisait tendre λ vers $+\infty$!!

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Q1 Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $T_n = \dfrac{X_n - n\theta}{n}$.

X_n possède une espérance et une variance qui valent $n\theta$.

Alors T_n possède une espérance et une variance. $E(T_n) = \frac{1}{n}\left(E(X_n) - n\theta\right) = 0$ et

$V(T_n) = \frac{1}{n^2}V(X_n) = \frac{\theta}{n}$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$0 \leqslant P(|T_n - 0| \geqslant \varepsilon) = P(|T_n - E(T_n)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V(T_n)}{\varepsilon^2} = \dfrac{\theta}{n\varepsilon^2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\theta}{n\varepsilon^2} = 0$.

Par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(P(|T_n - 0| \geqslant \varepsilon)\right) = 0$ et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi $\left(\dfrac{X_n - n\theta}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine nulle.

Q2 Si $x \in \mathbb{R}_-^*$, la somme est nulle et la suite converge vers 0. Supposons que $x \in]0, +\infty[- \{\theta\}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u_n = e^{-n\theta}\displaystyle\sum_{k\leqslant nx}\frac{(n\theta)^k}{k!}$.

$u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\mathrm{Ent}(nx)} P(X_n = k) = P(X_n \leqslant nx) = P\left(\frac{X_n - n\theta}{n} \leqslant x - \theta\right)$.

1er cas.. $x - \theta < 0$. Alors $\left\{\dfrac{X_n - n\theta}{n} \leqslant x - \theta\right\} \subset \left\{\left|\dfrac{X_n - n\theta}{n}\right| \geqslant \theta - x\right\}$.

Alors $0 \leqslant u_n \leqslant P\left(\left|\dfrac{X_n - n\theta}{n}\right| \geqslant \theta - x\right)$. Par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

2ème cas.. $x - \theta > 0$ $\left\{\dfrac{X_n - n\theta}{n} > x - \theta\right\} \subset \left\{\dfrac{X_n - n\theta}{n} \geqslant x - \theta\right\} \subset \left\{\left|\dfrac{X_n - n\theta}{n}\right| \geqslant x - \theta\right\}$.

$0 \leqslant P\left(\dfrac{X_n - n\theta}{n} > x - \theta\right) = 1 - u_n \leqslant P\left(\left|\dfrac{X_n - n\theta}{n}\right| \geqslant x - \theta\right)$.

Par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(e^{-n\theta}\sum_{k\leqslant nx}\frac{(n\theta)^k}{k!}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > \theta \\ 0 \text{ si } x < \theta\end{cases}$

Exercice.. Retrouver cela dans la convergence en loi de $\left(\frac{X_n}{n}\right)$ vers θ.

R.

Question 10 **HEC 2009** $\boxed{\text{F 2}}$ M. DESSUGES

a et b sont deux réels strictement positifs. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ayant même loi, prenant leurs valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X_n > x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{a}{x^b}.$$

Montrer que la suite de terme général $\dfrac{1}{n^{1/b}}\,\mathrm{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ converge en loi.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Notons F_n la fonction de répartition de $Y_n = \dfrac{1}{n^{1/b}}\,\mathrm{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Notons F la fonction de répartition des variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Soit $x\in\mathbb{R}$. $F_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = P(\mathrm{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leqslant n^{1/b}x)$

$F_n(x) = P(\{X_1 \leqslant n^{1/b}x\} \cap \ldots \cap \{X_n \leqslant n^{1/b}x\}) \underset{\substack{\uparrow \\ X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ sont indépendantes}}}{=} P(X_1 \leqslant n^{1/b}x)\cdots P(X_n \leqslant n^{1/b}x) = \left(F(n^{1/b}x)\right)^n.$

$\underline{\underline{\forall x\in\mathbb{R},\ F_n(x) = \left(F(n^{1/b}x)\right)^n.}}$

Notons que $1 - F(x) = P(X_1 > x) \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} \dfrac{a}{x^b}$. Cherchons $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} F_n(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

$\underline{\underline{1^{\text{er}}\text{ cas.-}}}$ $x\in\,]-\infty, 0[$. $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}(n^{1/b}x) = -\infty$. $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} F(n^{1/b}x) = 0$ car $\displaystyle\lim_{z\mapsto-\infty} F(z) = 0$.

$\exists n_0\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\in[\![n_0, +\infty[\![,\ 0 \leqslant F(n^{1/b}x) \leqslant \frac{1}{2}$.

Alors $\forall n\in[\![n_0, +\infty[\![,\ 0 \leqslant (F(n^{1/b}x))^n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$.

Par encadrement on obtient : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\left(F(n^{1/b}x)\right)^n = 0$. $\underline{\underline{\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} F_n(x) = 0}}$.

$\underline{\underline{2^{\text{ème}}\text{ cas.-}}}$ $x = 0$. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ F_n(x) = (F(0))^n$

Supposons que $F(0) = 1$. Alors $\forall x\in[0, +\infty[,\ F(x) = 1$.

Donc $\dfrac{a}{x^b} \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} P(X > x) = 1 - F(x)$ et $1 - F$ est nulle sur $[0, +\infty[$.

Donc $\dfrac{a}{x^b} \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} 0$ ou $0 \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} \dfrac{a}{x^b}$. Alors $1 = \displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{0}{\frac{a}{x^b}} = 0$!!

Alors $0 \leq F(0) < 1$. Donc $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} F_n(x) = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} (F(0))^n = 0$. $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} F_n(x) = 0$.

3ième cas.. $x \in]0, +\infty[$.

$$\lim_{n \mapsto +\infty} (n^{1/b} x) = +\infty \text{ donc } \lim_{n \mapsto +\infty} F(n^{1/b} x) = 1 \text{ car } \lim_{z \mapsto +\infty} F(z) = 1.$$

Alors $\exists n_1 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [\![n_1, +\infty [\![, \quad F(n^{1/b} x) > 0$.

$\forall n \in [\![n_1, +\infty [\![, \quad F_n(x) = \left(F(n^{1/b} x)\right)^n = e^{n \ln F(n^{1/b} x)}$. $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} (n^{1/b} x) = +\infty$

$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} F(n^{1/b} x) = 1$ donc $n \ln F(n^{1/b} x) \underset{n \mapsto +\infty}{\sim} n \left(F(n^{1/b} x) - 1\right) \underset{n \mapsto +\infty}{\sim} -n \dfrac{a}{(n^{1/b} x)^b} = -\dfrac{a}{x^b}$.

$1 - F(z) \underset{z \mapsto +\infty}{\sim} \dfrac{a}{z^b}$

Alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} n \ln (F(n^{1/b} x)) = -\dfrac{a}{x^b}$.

Par continuité de la fonction exponentielle : $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} e^{n \ln (F(n^{1/b} x))} = e^{-\frac{a}{x^b}}$.

Donc $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} F_n(x) = e^{-\frac{a}{x^b}}$

Finalement $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ e^{-\frac{a}{x^b}} & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ e^{-\frac{a}{x^b}} & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$.

Montrons que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

* $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} G(x) = 0$. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} -\dfrac{a}{x^b} = 0$ donc $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} G(x) = 1$.

* Montrons que G est croissante sur $\mathbb{R}$.

Soient x et y deux réels tels que $x < y$.

1er cas.. $x < y \leq 0$. Alors $G(x) = G(y) = 0$ donc $G(x) \leq G(y)$.

2ième cas.. $x \leq 0 < y$. Alors $G(x) = 0 \leq e^{-\frac{a}{y^b}} = G(y)$; $G(x) \leq G(y)$.

3ème cas.- $0 < x < y$. Alors $0 < x^b < y^b$ car $b > 0$.

Donc $-\frac{1}{x^b} < -\frac{1}{y^b}$; $-\frac{a}{x^b} \overset{a>0}{<} -\frac{a}{y^b}$; $e^{-\frac{a}{x^b}} < e^{-\frac{a}{y^b}}$.

Alors $G(x) < G(y)$. Donc $G(x) \leq G(y)$.

Finalement $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x < y \Rightarrow G(x) \leq G(y)$. G est croissante sur IR.

Remarque.- La croissance de G sur IR et les deux limites du premier point montrent que G est bien une application de IR dans $[0,1]$... pour ceux qui en doutaient.

* $x \mapsto x^b$ est de classe C^1 et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
Alors $x \mapsto -\frac{a}{x^b}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition $x \mapsto e^{-\frac{a}{x^b}}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ car $x \mapsto e^x$ est de classe C^1 sur IR. Alors G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

G est nulle sur $]-\infty, 0]$ donc G est de classe C^1 sur $]-\infty, 0]$.

Alors → G est de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}^*$ donc sur IR privé d'un ensemble fini de points.

→ G est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$ et continue à gauche en 0

De plus $\lim_{x \mapsto 0^+} \frac{a}{x^b} = +\infty$ car $a > 0$ et $b > 0$ donc $\lim_{x \mapsto 0^+} G(x) = \lim_{x \mapsto 0^+} e^{-\frac{a}{x^b}} = 0 = G(0)$.

G est donc continue à droite en 0.
Alors G est continue en 0. Finalement G est continue en tout point de IR.

Ceci achève de montrer que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Ainsi la suite $\left(\frac{1}{n^{1/b}} \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité de fonction de répartition G.

Question 20 HEC 2010 J. DIAZ $\boxed{\text{F } 2^+}$

(Xn) est une suite de variable aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers 0 si et seulement si la suite de terme général $E\left(\dfrac{|X_n|}{1+|X_n|}\right)$ converge vers 0.

$*$ Supposons que la suite de terme général $E\left(\dfrac{|X_n|}{1+|X_n|}\right)$ converge vers 0.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in [\![n_0, +\infty[\![$.

$t \mapsto \dfrac{t}{1+t}$ est croissante sur $]0,+\infty[$ (sa dérivée est $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t)^2}$)

Alors $\{|X_n| \geqslant \varepsilon\} \subset \left\{\dfrac{|X_n|}{1+|X_n|} \geqslant \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right\}$

Donc $0 \leqslant P(|X_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant P\left(\dfrac{|X_n|}{1+|X_n|} \geqslant \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right) \leqslant \dfrac{E\left(\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right)}{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}$ d'après l'inégalité de Markov ($\dfrac{|X_n|}{1+|X_n|}$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et possède une espérance).

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{E\left(\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right)}{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right) = 0$ donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n| \geqslant \varepsilon) = 0$ et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi <u>$(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers 0.</u>

$*$ Supposons que $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers 0.

Posons $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $Y_n = \dfrac{|X_n|}{1+|X_n|}$. Montrons que $(Y_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers 0. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $0 \leqslant Y_n < 1$.

Donc $\forall \varepsilon \in [1, +\infty[$, $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $P(|Y_n| \geqslant \varepsilon) = P(Y_n \geqslant \varepsilon) = 0$.

- $\forall \varepsilon \in [1, +\infty[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|Y_n| \geqslant \varepsilon) = 0$.

- Soit $\varepsilon \in]0, 1[$.

$\{|Y_n|\geq\varepsilon\}=\{Y_n\geq\varepsilon\}=\left\{\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\geq\varepsilon\right\}=\{|X_n|\geq\varepsilon+\varepsilon|X_n|\}=\left\{|X_n|\geq\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right\}$ pour tout n dans $[\![n_0,+\infty[\![$.

$(X_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers 0 et $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\in\mathbb{R}_+^*$.

Alors $\lim_{n\to+\infty}P(|Y_n|\geq\varepsilon)=\lim_{n\to+\infty}P\left(|X_n|\geq\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)=0$

$(Y_n)_{n\geq n_0}$ converge en probabilité vers 0.

Montrons alors que $\lim_{n\to+\infty}E(Y_n)=0$ en utilisant la définition.

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. Soit $n\in[\![n_0,+\infty[\![$. Posons $A_n=\{Y_n\geq\frac{\varepsilon}{2}\}$.

Notons que $0\leq Y_n=1\!\!1_{A_n}Y_n+1\!\!1_{\bar{A}_n}Y_n\overset{Y_n\leq 1}{\leq}1\!\!1_{A_n}+1\!\!1_{\bar{A}_n}Y_n$.

Montrons que $1\!\!1_{\bar{A}_n}Y_n<\varepsilon/2$

$\forall\omega\in A_n,\ (1\!\!1_{\bar{A}_n}Y_n)(\omega)=1\!\!1_{\bar{A}_n}(\omega)Y_n(\omega)=0<\frac{\varepsilon}{2}$.

$\forall\omega\in\bar{A}_n,\ (1\!\!1_{\bar{A}_n}Y_n)(\omega)=Y_n(\omega)<\frac{\varepsilon}{2}$.

Donc $\forall\omega\in\Omega,\ 1\!\!1_{\bar{A}_n}Y_n<\frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi $0\leq Y_n\leq 1\!\!1_{A_n}+\frac{\varepsilon}{2}$.

Par croissance de l'espérance $0\leq E(Y_n)\leq E(1\!\!1_{A_n})+\frac{\varepsilon}{2}=P(A_n)+\frac{\varepsilon}{2}$.

Donc $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![,\ 0\leq E(Y_n)<P(A_n)+\frac{\varepsilon}{2}=P(Y_n\geq\frac{\varepsilon}{2})+\varepsilon/2=P(|Y_n|\geq\frac{\varepsilon}{2})+\frac{\varepsilon}{2}$

$\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![,\ |E(Y_n)|<P(|Y_n|\geq\frac{\varepsilon}{2})+\frac{\varepsilon}{2}$.

Or $\lim_{n\to+\infty}P(|Y_n|\geq\frac{\varepsilon}{2})=0$. Alors $\exists n_1\in[\![n_0,+\infty[\![,\ \forall n\in[\![n_1,+\infty[\![,\ P(|Y_n|\geq\frac{\varepsilon}{2})<\frac{\varepsilon}{2}$.

Donc $\forall n\in[\![n_1,+\infty[\![,\ |E(Y_n)|<\varepsilon$.

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists n_1\in[\![n_0,+\infty[\![,\ \forall n\in[\![n_0,+\infty[\![,\ n\geq n_1\Rightarrow|E(Y_n)|<\varepsilon$.

Donc $\lim_{n\to+\infty}E(Y_n)=0$. $\lim_{n\to+\infty}E\left(\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right)=0$. cqfd.

R...

Question 2 HEC 2011 S 1152

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ i.i.d..

On suppose que, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, la variable alétoire X_k suit une loi uniforme sur le segment $[0,1]$.

On pose $Y_n = \text{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Étudier la convergence de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Cours *Théorème de d'Alembert-Gauss* ?!

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons F_{Y_n} la fonction de répartition de Y_n.

Y_n prend ses valeurs dans $[0,1]$. Ainsi $\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_{Y_n}(x) = 0$ et $\forall x \in [1, +\infty[$, $F_{Y_n}(x) = 1$.

Soit $x \in [0,1[$, $F_{Y_n}(x) = P(Y_n \leqslant x) = P(\text{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leqslant x)$.

$F_{Y_n}(x) = P(\{X_1 \leqslant x\} \cap \{X_2 \leqslant x\} \cap \ldots \cap \{X_n \leqslant x\}) = P(X_1 \leqslant x)\, P(X_2 \leqslant x) \ldots P(X_n \leqslant x)$.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes

Or $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(X_k \leqslant x) = x$ car $x \in [0,1[$ et X_k suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

Donc $F_{Y_n}(x) = x^n$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ x^n & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$ et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $$\lim_{n \to +\infty} F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $$\lim_{n \to +\infty} F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}.$$

Soit Y la variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ constante égale à 1. Soit F_Y sa fonction répartition. $\forall x \in \mathbb{R}$, $$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}.$$

Si $x \in \mathbb{R}$, F_Y est continue en x si et seulement si $x \neq 1$.

De plus $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $\lim_{n \to +\infty} F_{Y_n}(x) = F_Y(x)$.

Alors $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers Y c'est à dire vers la variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ constante et égale à 1.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|Y_n - 1| \geqslant \varepsilon) = P(\{Y_n - 1 \geqslant \varepsilon\} \cup \{Y_n - 1 \leqslant -\varepsilon\}) = P(Y_n - 1 \geqslant \varepsilon) + P(Y_n - 1 \leqslant -\varepsilon)$.

↑ Incompatibilité.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|Y_n - 1| \geqslant \varepsilon) = P(Y_n \geqslant 1 + \varepsilon) + P(Y_n \leqslant 1 - \varepsilon) = 0 + P(Y_n \leqslant 1 - \varepsilon) = P(Y_n \leqslant 1 - \varepsilon)$.

Y_n prend ses valeurs dans $[0, 1]$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(|Y_n - 1| \geqslant \varepsilon) = \begin{cases} 0 \text{ si } 1 - \varepsilon < 0 \\ (1-\varepsilon)^n \text{ si } 1 - \varepsilon \geqslant 0 \quad (\text{dans ce cas } 1 - \varepsilon \in [0, 1[) \end{cases}$$

Si $1 - \varepsilon < 0$: $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|Y_n - 1| \geqslant \varepsilon) = 0$

Si $1 - \varepsilon \geqslant 0$: $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|Y_n - 1| \geqslant \varepsilon) = \lim\limits_{n \to +\infty} (1 - \varepsilon)^n = 0$ ($1 - \varepsilon \in [0, 1[$)

Donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|Y_n - 1| \geqslant \varepsilon) = 0$. $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 1.

<u>Remarque</u>.. On aurait du commencer par le second point car la convergence en probabilité donne la convergence en loi !

Notons que lorsque la limite est une variable certaine il y a équivalence entre les deux convergences.

Cela étant je tenais à opposer les deux convergences !

R ..

Question 6 HEC 2011 S 1175

On considère une suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant toutes une loi uniforme sur le segment $[0, \theta]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = \text{Max}(U_1, U_2, \dots, U_n)$.

Q1. Prouver que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers θ.

Q2. Étudier la convergence en loi de $Y_n = n\,(\theta - X_n)$.

Question de cours : Caractériser les isomorphismes d'espaces vectoriels de dimensions finies.

Q1 Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$P(|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = P(X_n - \theta \geqslant \varepsilon) + P(X_n - \theta \leqslant -\varepsilon) = P(X_n \geqslant \theta + \varepsilon) + P(X_n \leqslant \theta - \varepsilon)$

X_n prend ses valeurs dans $[0, \theta]$ donc $P(X_n \geqslant \theta + \varepsilon) = 0$.

$P(X_n \leqslant \theta - \varepsilon) = P(\text{Max}(U_1, U_2, \dots, U_n) \leqslant \theta - \varepsilon) = P(\{U_1 \leqslant \theta - \varepsilon\} \cap \{U_2 \leqslant \theta - \varepsilon\} \cap \dots \cap \{U_n \leqslant \theta - \varepsilon\})$

Par indépendance on obtient : $P(X_n \leqslant \theta - \varepsilon) = P(U_1 \leqslant \theta - \varepsilon)\, P(U_2 \leqslant \theta - \varepsilon) \cdots P(U_n \leqslant \theta - \varepsilon)$.

$U_1, U_2, \dots, U_n$ ayant même loi il vient : $P(X_n \leqslant \theta - \varepsilon) = (P(U_1 \leqslant \theta - \varepsilon))^n$.

$\underline{P(|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = (P(U_1 \leqslant \theta - \varepsilon))^n}$.

<u>1er cas..</u> $\theta - \varepsilon < 0$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = 0^n = 0$. $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = 0$!

<u>2ème cas..</u> $\theta - \varepsilon \geqslant 0$. Alors $\theta - \varepsilon \in [0, \theta]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = (P(U_1 \leqslant \theta - \varepsilon))^n = \left(\dfrac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n = \left(1 - \dfrac{\varepsilon}{\theta}\right)^n$

Or $1 - \dfrac{\varepsilon}{\theta} \in [0, 1[$ (car $0 < \dfrac{\varepsilon}{\theta} \leqslant 1$) donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{\varepsilon}{\theta}\right)^n = 0$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = 0$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = 0$. <u>$(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à θ.</u>

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons F_n la fonction de répartition de Y_n.

Y_n prend ses valeurs dans $[0, n\theta]$. Alors $\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_n(x) = 0$ et $\forall x \in [n\theta, +\infty[$, $F_n(x) = 1$.

Soit $x \in [0, n\theta[$. $F_n(x) = P(Y_n \leq x) = P(n(\theta - X_n) \leq x) = P(\theta - X_n \leq \frac{x}{n}) = P(\theta - \frac{x}{n} \leq X_n)$.

$F_n(x) = 1 - P(X_n < \theta - \frac{x}{n}) = 1 - P(\{U_1 < \theta - \frac{x}{n}\} \cap \{U_2 < \theta - \frac{x}{n}\} \cap \dots \cap \{U_n < \theta - \frac{x}{n}\})$.

Par indépendance de $U_1, U_2, \dots, U_n$ il vient : $F_n(x) = 1 - P(U_1 < \theta - \frac{x}{n}) P(U_2 < \theta - \frac{x}{n}) \dots P(U_n < \theta - \frac{x}{n})$.

Or $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $U_k \hookrightarrow \mathcal{U}([0,\theta])$ donc $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(U_k < \theta - \frac{x}{n}) = P(U_k \leq \theta - \frac{x}{n}) \underset{\uparrow}{=} \frac{\theta - \frac{x}{n} - 0}{\theta - 0} = 1 - \frac{x}{n\theta}$

$\theta - \frac{x}{n} \in [0, \theta]$

Alors $F_n(x) = 1 - (1 - \frac{x}{n\theta})^n$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - (1 - \frac{x}{n\theta})^n & \text{si } x \in [0, n\theta[\\ 1 & \text{si } x \in [n\theta, +\infty[. \end{cases}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(0) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(0) = 0$.

Soit $x \in]0, +\infty[$. Posons $n_0 = \text{Ent}(\frac{x}{\theta}) + 1$. $n_0 > \frac{x}{\theta}$; $x < n_0 \theta$.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $n \geqslant n_0$! $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $n\theta \geqslant n_0\theta > x$.

Alors $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $F_n(x) = 1 - (1 - \frac{x}{n\theta})^n \underset{\uparrow}{=} 1 - e^{n \ln(1 - \frac{x}{n\theta})}$.

$1 - \frac{x}{n\theta} > 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x}{n\theta} = 0$

$n \ln(1 - \frac{x}{n\theta}) \underset{n \to +\infty}{\sim} n(-\frac{x}{n\theta}) = -\frac{x}{\theta}$. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (n \ln(1 - \frac{x}{n\theta})) = -\frac{x}{\theta}$. Par continuité de la fonction exponentielle en $-\frac{x}{\theta}$ il vient $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{n \ln(1 - \frac{x}{n\theta})} = e^{-\frac{x}{\theta}}$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 - e^{-x/\theta} \end{cases}$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - e^{-x/\theta} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$

Ainsi $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$.

Question 11 **S 113** On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant chacune la loi exponentielle de paramètre 1.

Q1 Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

a) Quelle est la loi de S_n ?

b) Quelle est la limite, quand n tend vers l'infini, de la probabilité $P(S_n \geqslant n + \sqrt{n})$?

Q2. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire N_n sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendante des X_k et dont la loi est donnée par :

$N_n(\Omega) = \{n, n+1\}$ et $P(N_n = n) = P(N_n = n+1) = \dfrac{1}{2}$.

a) $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver l'espérance et la variance de la variable aléatoire T_n définie par : $\forall \omega \in \Omega,\ T_n(\omega) = S_{N_n(\omega)}$.

b) Quelle est la limite, quand n tend vers l'infini, de la probabilité $P(T_n \geqslant n + \sqrt{n})$?

Cours *Rappeler la définition du rang d'une matrice. Une matrice carrée et sa transposée ont-elles nécessairement le même rang ?*

Q1 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ ou $X_k \hookrightarrow \Gamma(1,1)$ ou $X_k \hookrightarrow \gamma(1)$.

Le cours montre alors que : $X_1 + X_2 + \cdots + X_n \hookrightarrow \Gamma(1,n)$ ou $X_1 + X_2 + \cdots + X_n \hookrightarrow \gamma(n)$.

Donc S_n suit la loi gamma de paramètres 1 et n ou la loi gamma de paramètre n.

b) $(X_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, ayant même loi, d'espérance 1 et de variance 1.

Le théorème de la limite centrée montre alors que $\left(\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}\right)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Soit ϕ la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} \leqslant x\right) = \phi(x)$. Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

$S_n \hookrightarrow \Gamma(1,n)$

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant 1\right) = \phi(1)$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(S_n \leqslant n + \sqrt{n}) = \phi(1)$.

$$\lim_{n\to+\infty} P(S_n \geq n+\sqrt{n}) = \lim_{n\to+\infty} P(S_n > n+\sqrt{n}) = \lim_{n\to+\infty} (1 - P(S_n \leq n+\sqrt{n})) = 1-\phi(1)$$

S_n est à densité.

$$\lim_{n\to+\infty} P(S_n \geq n+\sqrt{n}) = 1-\phi(1) = \phi(-1) \simeq 0{,}1507$$

Q2 a] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F_{T_n} la fonction de répartition de T_n. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$(\{N_n = n\}, \{N_n = n+1\})$ est un système complet d'événements

Alors $P(T_n \leq x) = P(\{T_n \leq x\} \cap \{N_n = n\}) + P(\{T_n \leq x\} \cap \{N_n = n+1\})$

$P(T_n \leq x) = P(\{S_n \leq x\} \cap \{N_n = n\}) + P(\{S_{n+1} \leq x\} \cap \{N_n = n+1\})$.

$X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$ et N_n sont indépendantes donc S_n et N_n (resp. S_{n+1} et N_n) sont indépendantes.

Alors $F_{T_n}(x) = P(T_n \leq x) = P(S_n \leq x) P(N_n = n) + P(S_{n+1} \leq x) P(N_n = n+1)$.

$$F_{T_n}(x) = \frac{1}{2} [P(S_n \leq x) + P(S_{n+1} \leq x)].$$

Notons F_n et F_{n+1} les fonctions de répartition de S_n et S_{n+1}.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{T_n}(x) = \frac{1}{2} [F_{S_n}(x) + F_{S_{n+1}}(x)].$$

F_{S_n} et $F_{S_{n+1}}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc F_{T_n} est continue sur $\mathbb{R}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{S_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x} x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{S_{n+1}}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x} x^{n}}{n!} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

f_{S_n} (resp. $f_{S_{n+1}}$) est une densité continue sur $\mathbb{R}^*$ de S_n (resp. S_{n+1}). Alors F_{S_n} (resp. $F_{S_{n+1}}$) est au moins de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

De plus $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F'_{S_n}(x) = f_{S_n}(x)$ et $F'_{S_{n+1}}(x) = f_{S_{n+1}}(x)$.

$F_{T_n} = \frac{1}{2}[F_{S_n} + F_{S_{n+1}}]$.

Alors <u>F_{T_n} est au moins de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.</u>

ceci achève de montrer que T_n est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F'_{T_n}(x) = \frac{1}{2}(F'_{S_n}(x) + F'_{S_{n+1}}(x)) = \frac{1}{2}(f_{S_n}(x) + f_{S_{n+1}}(x))$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_{T_n}(x) = \frac{1}{2}(f_{S_n}(x) + f_{S_{n+1}}(x))$.

g_{T_n} est positive sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_{T_n} sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

Alors <u>g_{T_n} est une densité de T_n.</u>

$E(S_n)$ (resp. $E(S_{n+1})$) existe et vaut n (resp. $n+1$).

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{S_n}(t)\,dt$ (resp. $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{S_{n+1}}(t)\,dt$) converge et vaut n (resp. $n+1$).

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\left(\frac{1}{2}(f_{S_n}(t) + f_{S_{n+1}}(t))\right)dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}(n+(n+1))$.

donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, g_{T_n}(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{2n+1}{2}$.

<u>$E(T_n)$ existe et vaut $\frac{2n+1}{2}$.</u>

S_n et S_{n+1} possèdent un moment d'ordre 2 donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{S_n}(t)\,dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{S_{n+1}}(t)\,dt$ convergent.

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\left(\frac{1}{2}(f_{S_n}(t) + f_{S_{n+1}}(t))\right)dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{S_n}(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{S_{n+1}}(t)\,dt$

donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 g_{T_n}(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}(E(S_n^2) + E(S_{n+1}^2))$.

Alors T_n possède un moment d'ordre 2 qui vaut $\frac{1}{2}\left[E(S_n^2)+E(S_{n+1}^2)\right]$

Ainsi <u>T_n possède une variance</u>.

$V(T_n)=E(T_n^2)-(E(T_n))^2=\frac{1}{2}\left[E(S_n^2)+E(S_{n+1}^2)\right]-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2.$

$V(T_n)=\frac{1}{2}\left[V(S_n)+(E(S_n))^2+V(S_{n+1})+(E(S_{n+1}))^2\right]-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2.$

$V(T_n)=\frac{1}{2}\left[n+n^2+(n+1)+(n+1)^2\right]-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$

$V(T_n)=\frac{1}{2}(n+1)(n+1+(n+1))-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2=(n+1)^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2=\left(n+1+n+\frac{1}{2}\right)\left(n+1-n-\frac{1}{2}\right).$

$V(T_n)=(2n+3/2)(1/2)=n+\frac{3}{4}.$

$\underline{\underline{V(T_n)=n+\frac{3}{4}.}}$

T_n est une variable aléatoire à densité.

<u>b)</u> Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $P(T_n\geq n+\sqrt{n})=1-P(T_n<n+\sqrt{n})\overset{\downarrow}{=}1-P(T_n\leq n+\sqrt{n})$

$P(T_n\geq n+\sqrt{n})=1-F_{T_n}(n+\sqrt{n})=1-\frac{1}{2}\left[F_{S_n}(n+\sqrt{n})+F_{S_{n+1}}(n+\sqrt{n})\right]$

$P(T_n\geq n+\sqrt{n})=1-\frac{1}{2}P(S_n\leq n+\sqrt{n})-\frac{1}{2}P(S_{n+1}\leq n+\sqrt{n}).$

$P(T_n\geq n+\sqrt{n})\underset{\uparrow}{=}1-\frac{1}{2}P(S_n^*\leq 1)-\frac{1}{2}P\left(S_{n+1}^*\leq\frac{n+\sqrt{n}-(n+1)}{\sqrt{n+1}}\right)=1-\frac{1}{2}P(S_n^*\leq 1)-\frac{1}{2}P\left(S_{n+1}^*\leq\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right)$

$$\begin{cases} S_n^*=\dfrac{S_n-n}{\sqrt{n}} \\ S_{n+1}^*=\dfrac{S_{n+1}-(n+1)}{\sqrt{n+1}} \end{cases}$$

Rappelons que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}P(S_n^*\leq x)=\lim\limits_{n\to+\infty}P(S_{n+1}^*\leq x)=\phi(x).$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}P(S_n^*\leq 1)=\phi(1)$. Ne reste plus qu'à trouver $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left(S_{n+1}^*\leq\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right).$

Notons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}=1$ car $\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=1$ ... et que $\lim\limits_{n\to+\infty}P(S_{n+1}^*\leq 1)=\phi(1)$

R.

Montrons alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S^*_{n+1} \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) = \phi(1)$ en utilisant la définition.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$. Montrons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_0 \Rightarrow |P(S^*_{n+1} \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) - \phi(1)| < \varepsilon$.

ϕ est continue en 1 donc $\exists \eta \in \mathbb{R}^*_+$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x-1| < \eta \Rightarrow |\phi(x) - \phi(1)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $\alpha = \frac{\eta}{2}$. $1-\alpha \in \mathbb{R}$ et $|(1-\alpha)-1| = |\alpha| \underset{\alpha \in \mathbb{R}^*_+}{=} \alpha < \eta$. Alors $|\phi(1-\alpha) - \phi(1)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

donc $-\frac{\varepsilon}{2} < \phi(1-\alpha) - \phi(1) < \frac{\varepsilon}{2}$. Nous retiendrons que $\boxed{(1)}$ $-\frac{\varepsilon}{2} + \phi(1) < \phi(1-\alpha)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons que $\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}} \leq 1$ $\left(\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \leq 1\right)$.

Alors $\{S^*_{n+1} \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\} \subset \{S^*_{n+1} \leq 1\}$ donc $P(S^*_{n+1} \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) \leq P(S^*_{n+1} \leq 1)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1$ donc $\exists n_1 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_1 \Rightarrow \left|\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}} - 1\right| < \alpha$ car $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$.

Alors $\forall n \in [\![n_1, +\infty[\![$, $1-\alpha < \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}} < 1+\alpha$.

donc $\forall n \in [\![n_1, +\infty[\![$, $\{S^*_{n+1} \leq 1-\alpha\} \subset \{S^*_{n+1} \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\}$ et $P(S^*_{n+1} \leq 1-\alpha) \leq P(S^*_{n+1} \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}})$.

Ainsi $\forall n \in [\![n_1, +\infty[\![$, $P(S^*_{n+1} \leq 1-\alpha) \leq P(S^*_{n+1} \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) \leq P(S^*_{n+1} \leq 1)$. $\boxed{(2)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} P(S^*_{n+1} \leq 1-\alpha) = \phi(1-\alpha)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S^*_{n+1} \leq 1) = \phi(1)$.

Alors $\exists n_2 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_2 \Rightarrow |P(S^*_{n+1} \leq 1-\alpha) - \phi(1-\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\exists n_3 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_3 \Rightarrow |P(S^*_{n+1} \leq 1) - \phi(1)| < \varepsilon$.

Alors :

$\forall n \in [\![n_2, +\infty[\![$, $\phi(1-\alpha) - \frac{\varepsilon}{2} \overset{\boxed{(3)}}{<} P(S^*_{n+1} \leq 1-\alpha)$ et $\forall n \in [\![n_3, +\infty[\![$, $P(S^*_{n+1} \leq 1) \overset{\boxed{(4)}}{<} \phi(1) + \varepsilon$

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2, n_3)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq n_0$.

$$\phi(1) - \varepsilon = -\frac{\varepsilon}{2} + \phi(1) - \frac{\varepsilon}{2} \underset{(1)}{<} \phi(1-\alpha) - \frac{\varepsilon}{2} \underset{(3)}{<} P(S^*_{n+1} \leq 1-\alpha) \underset{(2)}{\leq} P(S^*_{n+1} \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) \underset{(2)}{\leq} P(S^*_{n+1} \leq 1) \underset{(4)}{<} \phi(1) + \varepsilon$$

donc $\phi(1) - \varepsilon < P(S^*_{n+1} \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) < \phi(1) + \varepsilon$ ou $|P(S^*_{n+1} \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) - \phi(1)| < \varepsilon$.

Nous avons donc prouvé que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant n_0 \Rightarrow \left|P\left(S_{n+1}^* \leqslant \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right) - \phi(1)\right| < \varepsilon$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(S_{n+1}^* \leqslant \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right) = \phi(1)$ ▲

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P(T_n \geqslant n+\sqrt{n}) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{2} P(S_n^* \leqslant 1) - \frac{1}{2} P\left(S_{n+1}^* \leqslant \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right)\right) = 1 - \frac{1}{2}\phi(1) - \frac{1}{2}\phi(1)$.

$$\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} P(T_n \geqslant n+\sqrt{n}) = 1 - \phi(1) = \phi(-1).}}$$

▲ On retrouve ce type de preuve dans HEC$^{\text{V}}$ 2001 III Q6 ou dans HEC m^{II} 2011 Q13

Remarque.- dans Q2 a) on pouvait penser à utiliser les espérances conditionnelles sauf que le résultat du cours porte sur les variables aléatoires discrètes.

R.

Question 6 **HEC 2011** C. DAUDET

Soit n un entier naturel non nul.

Q1. Trouver un réel C_n pour que la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_n(t) = \begin{cases} C_n\, e^{-4n\,t}\, t^{n-1} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ soit une densité de probabilité.

Q2. $(X_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de variables indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 4.

Trouver, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la loi de $Z_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Montrer que la suite $(Z_n)_{n \geqslant 1}$ converge en probabilité.

Question de cours : Définition d'une forme linéaire. Noyau et image d'une forme linéaire.

Q1 Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $g_n(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{t}{1/4n}}\, t^{n-1}}{(1/4n)^n\, \Gamma(n)} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

g_n est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi gamma de paramètres $\frac{1}{4n}$ et n

Notons que $f_n = \dfrac{C_n\, \Gamma(n)}{(4n)^n}\, g_n$. Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,dt$ existe et vaut 1.

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt$ existe et vaut $\dfrac{C_n\, \Gamma(n)}{(4n)^n}$.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt = 1 \iff C_n = \dfrac{(4n)^n}{\Gamma(n)}$.

* donc si f_n est une densité de probabilité : $C_n = \dfrac{(4n)^n}{\Gamma(n)}$.

* Réciproquement supposons que $C_n = \dfrac{(4n)^n}{\Gamma(n)}$.

1°) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt$ existe et vaut 1.

2°) $C_n > 0$. Ainsi $\forall t \in]-\infty, 0[$, $f_n(t) = 0 \geqslant 0$ et

$\forall t \in [0, +\infty[$, $f_n(t) = C_n\, e^{-4nt}\, t^{n-1} \geqslant 0$.

Donc f_n est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

3°) $\forall t \in]-\infty, 0[$, $f_n(t) = 0$ donc f_n est continue sur $]-\infty, 0[$

$\forall t \in [0, +\infty[$, $f_n(t) = C_n\, e^{-4nt}\, t^{n-1}$ donc f_n est continue sur $[0, +\infty[$.

Alors f_n est au moins continue sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

ceci achève de montrer que f_n est une densité de probabilité.

f_n est une densité de probabilité si et seulement si $c_n = \frac{(4n)^n}{\Gamma(n)} = \frac{(4n)^n}{(n-1)!}$.

(Q2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent la loi exponentielle de paramètre 4 donc la loi gamma de paramètres $\frac{1}{4}$ et 1.

Le cours indique que $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit la loi gamma de paramètres $\frac{1}{4}$ et n.

Toujours d'après le cours $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$ suit la loi gamma de paramètres $\frac{1}{4n}$ et n.

Remarque. Si $c_n = \frac{(4n)^n}{\Gamma(n)}$, $f_n = g_n$ donc f_n est une densité de Z_n.

1) $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

2) les variables aléatoires de cette suite ont même espérance $\frac{1}{4}$ et même variance $1/16$.

La loi faible des grands nombres montre alors que la suite $\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \right)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $\frac{1}{4}$.

$(Z_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $\frac{1}{4}$.

R..

Question 1 **HEC 2012-1-S7** $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi uniforme sur $]0,1]$.

On pose pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $X_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} U_i^{\frac{1}{n}}$ et $Y_n = (e\,X_n)^{\sqrt{n}}$.

Montrer que la suite de variables aléatoires $\big(\ln Y_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Question de cours. Définition et proppriétés des fonctions indicatrices des parties d'un ensemble.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\ln Y_n = \ln\left((eX_n)^{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n}\,[\ln e + \ln X_n] = \sqrt{n}\,[1 + \ln \prod_{i=1}^{n} U_i^{1/n}]$

$\ln Y_n = \sqrt{n}\left[1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln U_i\right] = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\sum_{i=1}^{n} \ln U_i + n\right] = \frac{S_n + n}{\sqrt{n}}$ où $S_n = \sum_{i=1}^{n} \ln U_i$.

Posons $T = \ln U_1$. Utilisons le théorème de transfert pour montrer l'existence de $E(T)$ et $V(T)$ et les calculer.

Posons $\forall t \in]0,1]$, $f(t) = 1$ et $\forall t \in \mathbb{R} -]0,1]$, $f(t) = 0$.

. f est une densité de U_1 ;

. U_1 prend ses valeurs dans $]0,1]$;

. $\ln$ est continue sur $]0,1]$;

Alors $E(\ln U_1)$ existe si et seulement si $\int_0^1 \ln t\, f(t)\,dt$ est absolument convergente.

$t \mapsto \ln t\, f(t)$ est continue sur $]0,1]$.

$\forall \varepsilon \in]0,1]$, $\int_\varepsilon^1 \ln t\, f(t)\,dt = \int_\varepsilon^1 \ln t\, dt = [t\ln t - t]_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon\ln\varepsilon + \varepsilon$.

$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \ln t\, f(t)\,dt = -1$. Donc $\int_0^1 \ln t\, f(t)\,dt$ converge et vaut -1

Alors $\int_0^1 -\ln t\, f(t)\,dt$ converge également donc $\int_0^1 |\ln t\, f(t)|\,dt$ converge.

$\int_0^1 \ln t\, f(t)\,dt$ converge absolument donc $E(\ln U_1)$ existe.

$E(T)$ existe et $E(T) = E(\ln U_1) = \int_0^1 \ln t\, f(t)\,dt = -1$.

$T^2 = (\ln U_1)^2 = \ln^2 U_1$.

- f est une densité de U_1
- U_1 prend ses valeurs dans $]0,1]$
- $\ln^2$ est continue sur $]0,1]$.

Alors $E(\ln^2 U_1)$ existe si et seulement si $\int_0^1 \ln^2 t\, f(t)\,dt$ est absolument convergente.

$\forall t \in]0,1]$, $\ln^2 t\, f(t) = \ln^2 t \geq 0$.

Donc $E(\ln^2 U_1)$ existe si et seulement si $\int_0^1 \ln^2 t\, dt$ converge.

Soit $\varepsilon \in]0,1]$. $\int_\varepsilon^1 \ln^2 t\, dt = [t \ln^2 t]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 t \times 2 \times \frac{1}{t} \times \ln t\, dt = -\varepsilon \ln^2 \varepsilon - 2\int_\varepsilon^1 \ln t\, dt$.

$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \ln^2 t\, dt = 0 - 2\int_0^1 \ln t\, dt = 2$. $\int_0^1 \ln^2 t\, dt$ existe et vaut 2.

Alors $E((\ln U_1)^2)$ existe et $E((\ln U_1)^2) = \int_0^1 \ln^2 t\, f(t)\,dt = \int_0^1 \ln^2 t\, dt = 2$.

$E(T^2)$ existe et vaut 2 donc $V(T)$ existe et vaut $2 - 1^2$ c'est à dire 1.

Appliquons alors le théorème de la limite centrée.

1) $(\ln U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes car $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes

2) Toutes les variables aléatoires de la suite $(\ln U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ont même loi.

3) Les variables aléatoires de cette suite ont pour espérance -1 et pour variance 1 ($1 > 0$!).

Alors la suite de terme général $\dfrac{\sum_{i=1}^n \ln U_i - E(\sum_{i=1}^n \ln U_i)}{\sqrt{V(\sum_{i=1}^n \ln U_i)}}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\sum_{i=1}^n \ln U_i = S_n$. $E(\sum_{i=1}^n \ln U_i) = \sum_{i=1}^n E(\ln U_i) = \sum_{i=1}^n (-1) = -n$.

$V(\sum_{i=1}^n \ln U_i) = \sum_{i=1}^n V(\ln U_i) = \sum_{i=1}^n 1 = n$.

$\uparrow$ par indépendance

Alors $$\frac{\sum_{i=1}^{n} \ln U_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} \ln U_i\right)}{\sqrt{V\left(\sum_{i=1}^{n} \ln U_i\right)}} = \frac{S_n - (-n)}{\sqrt{n}} = \frac{S_n + n}{\sqrt{n}} = \ln Y_n .$$

Ainsi la suite $(\ln Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

__Remarque__.. Pour calculer l'espérance et la variance de $\ln U_1$ on aurait pu remarquer que $-\ln U_1$ suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Ainsi $E(-\ln U_1) = \frac{1}{1}$ et $V(-\ln U_1) = \frac{1}{1^2}$.

Alors $E(\ln U_1) = -1$ et $V(\ln U_1) = 1$.

Notons qu'alors $-S_n$ suit la loi gamma de paramètre n ou la loi gamma de paramètres 1 et n...