SUJET 14

Dans ce qui suit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $<.,.>$ est le produit scalaire canonique de E et $\|.\|_2$ la norme euclidienne associée. $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ est la base canonique de E. $\mathcal{S}_n$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques.

L'objet de ce problème est d'étudier un algorithme permettant d'approcher l'inverse d'une matrice symétrique.

Rappelons que la borne supérieure d'une partie non vide H de $\mathbb{R}$ est le plus petit élément, s'il existe, de l'ensemble des majorants de H et que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

PARTIE I

Q1 U est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Retrouver rapidement que :

$$U \in \mathcal{S}_n \iff \forall (X,Y) \in E^2,\ <UX, Y> = <X, UY>.$$

On pourra se servir de la base canonique $\mathcal{B} = (E_1, E_2, \ldots, E_n)$ de E.

Q2 Montrer que le produit de deux éléments U et V de $\mathcal{S}_n$ est un élément de $\mathcal{S}_n$ si et seulement si $UV = VU$.

Dans les questions 3, 4 et 5 de la partie I, $U = (u_{ij})$ est un élément de $\mathcal{S}_n$. $\mathcal{B}' = (E'_1, E'_2, \ldots, E'_n)$ est une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de U respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n.

$\rho(U) = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\mathrm{Max}} |\lambda_i|$ *($\rho(U)$ est le rayon spectral de U).*

Q3 Soit X un élément de coordonnées $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ dans la base orthonormale $\mathcal{B}' = (E'_1, E'_2, \ldots, E'_n)$. Montrer que :

$$<UX, X> = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, \alpha_k^2$$

Q4 Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $\forall X \in E,\ X \neq 0 \Rightarrow <UX, X> > 0$.

ii) Les valeurs propres de U sont strictement positives.

Si U vérifie i) ou ii) on dira que la matrice symétrique U est définie positive.

Q5 a) U est un élément de $\mathcal{S}_n$. Montrer que $\{|<UX, X>|;\ X \in E \text{ et } \|X\|_2 \leqslant 1\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée par $\rho(U)$.

On pose alors : $\|U\| = \mathrm{Sup}\{|<UX, X>|;\ X \in E \text{ et } \|X\|_2 \leqslant 1\}$.

b) Montrer que $\|U\| = \rho(U)$.

c) Montrer que $\forall X \in E,\ \|UX\|_2 \leqslant \|U\| \|X\|_2$. Montrer que $\|U\| = \mathrm{Sup}\{\|UX\|_2;\ X \in E \text{ et } \|X\|_2 \leqslant 1\}$.

Q6 a) U est un élément de $\mathcal{S}_n$ tel que $\|U\| = 0$. Montrer que U est nulle.

b) Montrer que l'application de $\mathcal{S}_n$ dans $\mathbb{R}$ qui à U associe $\|U\|$ est une norme sur $\mathcal{S}_n$.

c) Soit V un élément de $\mathcal{S}_n$ qui commute avec U. Montrer que $\|UV\| \leqslant \|U\|\, \|V\|$.

PARTIE II Un premier algorithme

Dans la suite I est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et T est un élément de $\mathcal{S}_n$ tel que : $\exists k \in]0,1[,\ \|I-T\| \leqslant k$

Q1 Encadrer les valeurs propres de T et en déduire que T est définie positive.

Montrer que T est inversible et en utilisant les valeurs propres de T^{-1}, montrer que

$$\|T^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-k} \quad \text{et} \quad \|T^{-1}-I\| \leqslant \frac{k}{1-k}$$

Q2 On considère la suite $(U_p)_{p\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$U_0 = I \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N},\ U_{p+1} = U_p + I - TU_p.$$

a) Montrer que pour tout élément p de $\mathbb{N}$, U_p est symétrique et commute avec T.

b) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N},\ \|U_{p+1} - T^{-1}\| \leqslant \|I-T\|\|U_p - T^{-1}\|$.

En déduire que : $\forall p \in \mathbb{N},\ \|U_p - T^{-1}\| \leqslant \dfrac{k^{p+1}}{1-k}$ et que la suite $(U_p)_{p\geqslant 0}$ converge vers T^{-1}.

c) On suppose que $T = \beta I$ avec $\beta \in]0,1[$ et on pose $k = \|I-T\|$.

Montrer que T a les bonnes qualités et que : $\forall p \in \mathbb{N},\ \|U_p - T^{-1}\| = \dfrac{k^{p+1}}{1-k}$.

Q3 A est une matrice symétrique définie positive de valeur propre minimum λ et de valeur propre maximum μ. On se propose d'appliquer l'algorithme précédent à la matrice $T = \alpha A$ où α est un réel strictement positif choisi de façon à obtenir la meilleure valeur possible pour k. On pose $c = \|A\|\,\|A^{-1}\|$.

a) Que dire de A si $\lambda = \mu$? On suppose désormais que $\lambda \neq \mu$.

b) Montrer que $\forall t \in [0,+\infty[,\ \|I - tA\| = \text{Max}(f(t), g(t))$ où $f : t \to |1-\lambda t|$ et $g : t \to |1-\mu t|$.

Représenter graphiquement f, g et $h = \text{Max}(f,g)$. Comparer f et g (on distinguera au départ trois intervalles). Préciser $h(t)$ pour tout élément t de $[0,+\infty[$.

Montrer que h est minimum en un point α et un seul et exprimer la valeur k de ce minimum en fonction de λ et μ, puis de c.

c) Les nombres λ et k étant ainsi déterminés prouver que l'on peut appliquer l'algorithme précédent à la matrice $T = \alpha A$ et que l'on peut ainsi obtenir une valeur approchée de A^{-1}.

PARTIE III Un second algorithme

T est un élément de $\mathcal{S}_n$ tel que : $\exists k \in]0,1[,\ \|I-T\| \leqslant k$.

On considère la suite $(V_p)_{p\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$V_0 = I \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N}, V_{p+1} = V_p(2I - TV_p).$$

Q1 Montrer que pour tout p élément de $\mathbb{N}$, V_p est symétrique et commute avec T.

Q2 On pose pour tout élément p de $\mathbb{N}$, $Z_p = I - TV_p$.

a) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N},\ Z_{p+1} = Z_p^2$.

b) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N},\ \|V_p - T^{-1}\| \leqslant \dfrac{k^{2^p}}{1-k}$. En déduire que la suite $(V_p)_{p\geqslant 0}$ converge vers T^{-1}.

c) Trouver un exemple de matrice T où l'inégalité précédente devient une égalité.

Q3 Comparaison des deux algorithmes.

Si r est un élément de $\mathbb{N}^*$, $N(r)$ (resp. $N^*(r)$) est le plus petit entier p tel que $\dfrac{k^{p+1}}{1-k} < 10^{-r}$ (resp. $\dfrac{k^{2^p}}{1-k} < 10^{-r}$).

a) Trouver un équivalent simple de $N(r)$ (resp. $N^*(r)$) lorsque r tend vers $+\infty$.

b) $k = 1/2$. Calculer $N(r)$ et $N^*(r)$ pour $r \in \{3, 6, 10\}$.

c) Moralité ?

Q4 Facultatif. Programmer les deux algorithmes.
