PARTIE I

Q1 a) Soient x et y deux éléments de E de matrices X et Y dans $\mathcal{B}$.

$<u(x), y> = {}^t(AX)Y = {}^tX\,{}^tAY = <x, u^*(y)>$.

donc $\underline{\forall (x,y) \in E^2, \quad <u(x),y> = <x, u(y)>}$. (1)

b) Soit w un second endomorphisme de E tel que : $\forall (x,y) \in E^2$, $<u(x), y> = <x, w(y)>$.

Alors $\forall (x,y) \in E^2$, $<x, u^*(y)> = <u(x), y> = <x, w(y)>$.

$\forall (x,y) \in E^2$, $<x, u^*(y) - w(y)> = 0$.

$\forall y \in E$, $u^*(y) - w(y) \in E^\perp = \{0_E\}$.

$\forall y \in E$, $u^*(y) - w(y) = 0_E$. $\forall y \in E$, $w(y) = u^*(y)$. $w = u^*$

<u>u^* est l'unique endomorphisme de E vérifiant (1).</u>

<u>Remarque</u>.. Ceci montre que u^* ne dépend de la base orthonormale $\mathcal{B}$ choisie pour le construire.

c) • $\forall (x,y) \in E^2$, $<(\lambda u + v)(x), y> = <\lambda u(x) + v(x), y> = \lambda <u(x), y> + <v(x), y> = \lambda <x, u^*(y)> + <x, v^*(y)>$

$\forall (x,y) \in E^2$, $<(\lambda u + v)(x), y> = <x, (\lambda u^* + v^*)(y)>$ et $\lambda u^* + v^*$ est un endomorphisme de E.

Le b) permet alors de dire que : $\underline{(\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v^*}$.

• $\forall (x,y) \in E^2$, $<(u \circ v)(x), y> = <u(v(x)), y> = <v(x), u^*(y)> = <x, (v^* \circ u^*)(y)>$ et $v^* \circ u^*$ est un endomorphisme de E.

b) permet aussi de dire que : $\underline{(u \circ v)^* = v^* \circ u^*}$.

<u>Remarque</u>.. Il est aussi aisé de retrouver ces deux résultats matriciellement.

<u>Exercice</u> Q1.. Déterminer $(Id_E)^*$ Q2.. caractériser l'égalité $u = u^*$

Q3.. Déterminer $(u^*)^*$ Q4.. montrer que : $\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$ et $\operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^\perp$

Q2 a) . $u^* \circ u \in \mathcal{L}(E)$ car $u^* \in \mathcal{L}(E)$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

. $\forall (x,y) \in E^2$, $<(u^* \circ u)(x), y> = <u(x), u(y)> = <x, u^*(u(y))> = <x, (u^* \circ u)(y)>$

<u>$u^* \circ u$ est un endomorphisme symétrique.</u>

. Soit λ une valeur propre de $u^* \circ u$. $\exists x \in E$, $(u^* \circ u)(x) = \lambda x$ et $x \neq 0_E$.

$\lambda \|x\|^2 = \lambda <x, x> = <\lambda x, x> = <(u^* \circ u)(x), x> = <u(x), u(x)> = \|u(x)\|^2$. $\lambda = \dfrac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2} \geqslant 0$.

<u>Les valeurs propres de $u^* \circ u$ sont positives.</u>

b) Nous savons que : $\langle x,y\rangle = 0$, $x \neq 0_E$, $y \neq 0_E$ et $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $(u^* o u)(x) = \alpha x$ et $(u^* o u)(y) = \beta y$... c'est largement plus qu'il n'en faut.

$\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, (u^* o u)(y)\rangle = \langle x, \beta y\rangle = \beta\langle x,y\rangle = 0$.

$u(x)$ et $u(y)$ sont orthogonaux.

<u>Si x et y sont deux vecteurs propres orthogonaux de $u^* o u$ alors $u(x)$ et $u(y)$ sont orthogonaux.</u>

c) Soit $x \in \mathrm{Ker}\, u$. $u(x) = 0_E$; $u^*(u(x)) = 0_E$; $x \in \mathrm{Ker}\,(u^* o u)$. Ainsi $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Ker}(u^* o u)$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(u^* o u)$.

$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x)\rangle = \langle x, (u^* o u)(x)\rangle = \langle x, 0_E\rangle = 0$; $\|u(x)\| = 0$.

donc $u(x) = 0_E$ et : $x \in \mathrm{Ker}\, u$. Ainsi $\mathrm{Ker}\,(u^* o u) \subset \mathrm{Ker}\, u$.

Finalement : <u>$\mathrm{Ker}\,(u^* o u) = \mathrm{Ker}\, u$.</u>

d) Supposons que $\mathrm{Ker}\,(u^* o u)$ n'est ni $\{0_E\}$ ni E. Il en est alors de même pour $(\mathrm{Ker}\,(u^* o u))^\perp$

$\mathrm{Ker}\,(u^* o u)$ est stable par l'endomorphisme symétrique $u^* o u$ donc $(\mathrm{Ker}\,(u^* o u))^\perp$ aussi. La restriction h de $u^* o u$ à $(\mathrm{Ker}\,(u^* o u))^\perp$ peut être considérée comme un endomorphisme symétrique de $(\mathrm{Ker}\,(u^* o u))^\perp$.

Ainsi il existe une base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ de $\mathrm{Ker}\,(u^* o u)^\perp$ constituée de vecteurs propres de h donc de $u^* o u$.

$r = \dim(\mathrm{Ker}\,(u^* o u))^\perp$ donc $\dim \mathrm{Ker}\,(u^* o u) = n - r$. Soit alors $(e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_n)$ une base orthonormale de $\mathrm{Ker}\,(u^* o u)$.

Comme $\mathrm{Ker}\,(u^* o u)^\perp$ et $\mathrm{Ker}\,(u^* o u)$ sont supplémentaires et orthogonaux :

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

Ne reste plus qu'à vérifier que $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r))$ est une base orthogonale de $\mathrm{Im}\, u$.

Observons que $e_1, e_2, \dots, e_r$ sont des vecteurs propres de $u^* o u$ deux à deux orthogonaux. D'après b) $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r)$ sont deux à deux orthogonaux.

Notons que ces vecteurs ne sont pas nuls.

Supposons : $i \in [\![1, r]\!]$ et $u(e_i) = 0_E$. Alors $e_i \in \mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\,(u^* o u)$. Comme e_i appartient aussi à $\mathrm{Ker}\,(u^* o u)^\perp$: $e_i = 0_E$! Gênant pour un vecteur propre !

$(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r))$ est une famille orthogonale d'éléments non nuls de $\mathrm{Im}\, u$.

Par conséquent $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r))$ est une famille libre et orthogonale de $\mathrm{Im}\, u$.

Observons alors que : $\dim \mathrm{Im}\, u = n - \dim \mathrm{Ker}\, u = n - (n - r) = r$.

$(u(e_1),\dots,u(e_r))$ est une famille orthogonale et libre de r vecteurs de $\mathrm{Im}\, u$ qui est de dimension r. Donc $(u(e_1),u(e_2),\dots,u(e_r))$ est une base orthogonale de $\mathrm{Im}\, u$.
La base $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est donc solution du problème posé.

- Supposons $\mathrm{Ker}(u^* \circ u) = E$.
  Alors $\mathrm{Ker}\, u = E$. $u = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Toute base orthonormale de E convient non ?
- Supposons $\mathrm{Ker}(u^* \circ u) = \{0_E\}$.
  Alors $\mathrm{Ker}(u^* \circ u)^{\perp} = E$. En prenant une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de $u^* \circ u$ on montre comme dans le premier cas que $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est solution.

Finalement : il existe une base orthonormale $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ de E telle que :
→ $(u(e_1),u(e_2),\dots,u(e_r))$ soit une base orthogonale de $\mathrm{Im}\, u$
→ $(e_{r+1},\dots,e_n)$ soit une base orthonormale de $\mathrm{Ker}\, u$.

(Q3) Notons que $(f_1,f_2,\dots,f_r)$ est une famille orthonormale de E donc on peut la compléter en une base orthonormale $(f_1,f_2,\dots,f_n)$ de E.

Soit $x\in E$. $x = \sum_{k=1}^{n} \langle x,e_k\rangle e_k$ car $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est une base orthonormale de E.

$u(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x,e_k\rangle u(e_k)$.

Si $k\in [\![r+1,n]\!]$, $u(e_k) = 0_E$ car $e_k\in \mathrm{Ker}\, u$.
Si $k\in [\![1,r]\!]$, $u(e_k) = \sigma_k f_k$.

Ainsi $u(x) = \sum_{k=1}^{r} \langle x,e_k\rangle \sigma_k f_k = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k \langle x,e_k\rangle f_k$.

$$\forall x\in E,\ u(x) = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k \langle x,e_k\rangle f_k.$$

$\forall i\in [\![1,n]\!], \forall k\in [\![1,r]\!],\quad \langle e_i,e_k\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i\neq k \\ 1 & \text{si } i=k \end{cases}$

Donc $\forall i\in [\![r+1,n]\!]$, $u(e_i) = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k \langle e_i,e_k\rangle f_k = 0_E$

$\forall i\in [\![1,r]\!]$, $u(e_i) = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k \langle e_i,e_k\rangle f_k = \sigma_i f_i$

Finalement $M(u,\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & & (0) \\ & \sigma_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sigma_r & & \\ & & & & 0 & \\ (0) & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$.

(Q4) Rappel.- Soit f une application linéaire de E dans $\hat{E}$ ($\dim E = p \in \mathbb{N}^*$, $\dim \hat{E} = q \in \mathbb{N}^*$)

$\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ (resp. $\hat{\mathcal{B}}_1$ et $\hat{\mathcal{B}}_2$) deux bases de E (resp. $\hat{E}$).

$$M(f,\mathcal{B}_2,\hat{\mathcal{B}}_2) = \mathrm{Pass}(\hat{\mathcal{B}}_2,\hat{\mathcal{B}}_1)\, M(f,\mathcal{B}_1,\hat{\mathcal{B}}_1)\, \mathrm{Pass}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$$

$$M(f,\mathcal{B}_2,\hat{\mathcal{B}}_2) = \left(\mathrm{Pass}(\hat{\mathcal{B}}_1,\hat{\mathcal{B}}_2)\right)^{-1} M(f,\mathcal{B}_1,\hat{\mathcal{B}}_1)\, \mathrm{Pass}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2).$$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. $\mathcal{B}_0$ est une base orthonormale de E.

Soit u l'endomorphisme de E tel que $M_{\mathcal{B}_0}(u) = M(\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_0,u) = M$.

Soient $\mathcal{B} = (e_1,e_2,\dots,e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1,f_2,\dots,f_n)$ les bases orthonormales de E obtenues au Q3.

Posons $D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & (0) \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_r & \\ (0) & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} = M(u,\mathcal{B},\mathcal{B}')$.

D'après le rappel : $D = M(u,\mathcal{B},\mathcal{B}') = \left(\mathrm{Pass}(\mathcal{B}_0,\mathcal{B}')\right)^{-1} M(u,\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_0)\, \mathrm{Pass}(\mathcal{B}_0,\mathcal{B})$

Posons $P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}_0,\mathcal{B}')$ et $Q = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}_0,\mathcal{B})$.

P et Q sont deux matrices orthogonales car $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases orthonormales.

De plus $D = P^{-1} M Q$.

Ainsi $M = PDQ^{-1}$ et $D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & (0) \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_r & \\ (0) & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$ avec $\sigma_i \geq 0$ pour tout $i \in [\![1,r]\!]$.

<u>Si $M \in M_n(\mathbb{R})$, il existe deux matrices P et Q orthogonales et une matrice diagonale D à éléments diagonaux positifs ou nuls telles que : $M = PDQ^{-1}$.</u>

(Q5) $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est une base orthonormale de E donc :

$$\forall y \in E,\ u^*(y) = \sum_{k=1}^{n} \langle u^*(y), e_k\rangle e_k = \sum_{k=1}^{n} \langle y, u(e_k)\rangle e_k = \sum_{k=1}^{r} \langle y, \sigma_k f_k\rangle e_k$$

$u(e_k) = \begin{cases} 0_E & \text{si } k > r \\ \sigma_k f_k & \text{si } k \leq r \end{cases}$

$$\forall y \in E,\ u^*(y) = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k \langle y, f_k\rangle e_k.$$

PARTIE II

Q1 Soient $(x,y)\in E^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\hat{u}(\lambda x+y)=\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\sigma_k}\langle\lambda x+y,f_k\rangle e_k=\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\sigma_k}(\lambda\langle x,f_k\rangle+\langle y,f_k\rangle)e_k$$

$$\hat{u}(\lambda x+y)=\lambda\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\sigma_k}\langle x,f_k\rangle e_k+\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\sigma_k}\langle y,f_k\rangle e_k=\lambda\hat{u}(x)+\hat{u}(y).$$

$\forall\lambda\in\mathbb{R},\forall(x,y)\in E^2$, $\hat{u}(\lambda x+y)=\lambda\hat{u}(x)+\hat{u}(y)$; $\hat{u}$ étant clairement une application de E dans E : $\hat{u}$ est un endomorphisme de E.

Q2 $\forall x\in E$, $\hat{u}(x)=\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{\sigma_k}\langle x,f_k\rangle e_k\in\mathrm{Vect}(e_1,e_2,\dots,e_r)$; donc $\mathrm{Im}\,\hat{u}\subset\mathrm{Vect}(e_1,e_2,\dots,e_r)$

$B=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est une base orthonormale de E et $\mathrm{Ker}\,u=\mathrm{Vect}(e_{r+1},\dots,e_n)$ par conséquent : $(\mathrm{Ker}\,u)^\perp=\mathrm{Vect}(e_1,e_2,\dots,e_r)$.

Nous avons donc $\mathrm{Im}\,\hat{u}\subset(\mathrm{Ker}\,u)^\perp=\mathrm{Vect}(e_1,e_2,\dots,e_r)$. Montrons l'inclusion inverse.

Il suffit de prouver que : $\forall i\in[\![1,r]\!]$, $e_i\in\mathrm{Im}\,\hat{u}$.

Or $\forall i\in[\![1,r]\!]$, $\hat{u}(f_i)=\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\sigma_k}\langle f_i,f_k\rangle e_k=\frac{1}{\sigma_i}e_i$. $\forall i\in[\![1,r]\!]$, $e_i=\hat{u}(\sigma_i f_i)$

donc $\forall i\in[\![1,r]\!]$, $e_i\in\mathrm{Im}\,\hat{u}$.

Finalement : $\underline{\mathrm{Im}\,\hat{u}=(\mathrm{Ker}\,u)^\perp=\mathrm{Vect}(e_1,e_2,\dots,e_r)}$.

<u>Remarque</u>.. On pouvait aussi remarquer que : $\mathrm{Im}\,\hat{u}=\mathrm{Vect}(\hat{u}(f_1),\hat{u}(f_2),\dots,\hat{u}(f_n))$
$=\mathrm{Vect}(\hat{u}(f_1),\dots,\hat{u}(f_r))=\mathrm{Vect}(\frac{1}{\sigma_1}e_1,\dots,\frac{1}{\sigma_r}e_r)$
$=\mathrm{Vect}(e_1,e_2,\dots,e_r)$.

$\mathrm{rg}\,\hat{u}=\dim(\mathrm{Im}\,\hat{u})=\dim(\mathrm{Ker}\,u)^\perp=n-\dim\mathrm{Ker}\,u=\dim\mathrm{Im}\,u=\mathrm{rg}\,u$. $\underline{\mathrm{rg}\,\hat{u}=\mathrm{rg}\,u}$.

Q3 Soit x un élément de E.

$$x\in\mathrm{Ker}\,\hat{u}\Leftrightarrow\hat{u}(x)=0_E\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{\sigma_k}\langle x,f_k\rangle e_k=0_E\Leftrightarrow\forall k\in[\![1,r]\!],\ \langle x,f_k\rangle=0.$$

donc $\mathrm{Ker}\,\hat{u}=\left(\mathrm{Vect}(f_1,f_2,\dots,f_r)\right)^\perp=\left(\mathrm{Vect}(\frac{1}{\sigma_1}u(e_1),\frac{1}{\sigma_2}u(e_2),\dots,\frac{1}{\sigma_3}u(e_r)\right)^\perp=\left(\mathrm{Vect}(u(e_1),u(e_2),\dots,u(e_r))\right)^\perp$

$(u(e_1),u(e_2),\dots,u(e_r))$ étant une base (orthogonale) de $\mathrm{Im}\,u$: $\mathrm{Ker}\,\hat{u}=(\mathrm{Im}\,u)^\perp$

Remarquons aussi que : $\mathrm{Ker}\,\hat{u}=(\mathrm{Vect}(f_1,f_2,\dots,f_r))^\perp=\mathrm{Vect}(f_{r+1},f_{r+2},\dots,f_n)$.

$\underline{\underline{\mathrm{Ker}\,\hat{u}=(\mathrm{Im}\,u)^\perp=\mathrm{Vect}(f_{r+1},\dots,f_n)}}$.

Q4 $u \circ \hat{u}$ et $\hat{u} \circ u$ sont des endomorphismes de E comme composées d'endomorphismes de E.

$\forall i \in [\![1,r]\!], (u \circ \hat{u})(f_i) = u\left(\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\sigma_k} \langle f_i, f_k \rangle e_k\right) = u\left(\frac{1}{\sigma_i} e_i\right) = \frac{1}{\sigma_i} u(e_i) = f_i$.

Ainsi $\forall x \in \mathrm{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_r) = \mathrm{Im}\, u$, $(u \circ \hat{u})(x) = x$ ($u \circ \hat{u}$ est linéaire ...).

$\forall i \in [\![r+1,n]\!], (u \circ \hat{u})(f_i) = u\left(\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\sigma_k} \langle f_i, f_k \rangle e_k\right) = u(0_E) = 0_E$.

Donc $\forall x \in \mathrm{Vect}(f_{r+1}, \dots, f_n) = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$, $(u \circ \hat{u})(x) = 0_E$.

Soit $x \in E$. $\exists ! (x_1, x_2) \in \mathrm{Im}\, u \times (\mathrm{Im}\, u)^\perp$, $x = x_1 + x_2$.

$(u \circ \hat{u})(x) = (u \circ \hat{u})(x_1) + (u \circ \hat{u})(x_2) = x_1 + 0_E = x_1$.

Ainsi <u>$u \circ \hat{u}$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\, u$.</u>

$\forall i \in [\![1,n]\!], (\hat{u} \circ u)(e_i) = \hat{u}(u(e_i)) = \hat{u}(\sigma_i f_i) = \sigma_i \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\sigma_k} \langle f_i, f_k \rangle e_k = \begin{cases} 0_E & \text{si } i \geq r+1 \\ e_i & \text{si } i \leq r \end{cases}$

$\forall i \in [\![1,r]\!], (\hat{u} \circ u)(e_i) = e_i$ et $\forall i \in [\![r+1,n]\!], (\hat{u} \circ u)(e_i) = 0_E$.

Donc $\forall x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$, $(\hat{u} \circ u)(x) = x$ et $\forall x \in \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$, $(\hat{u} \circ u)(x) = 0_E$.

Ou $\forall x \in (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$, $(\hat{u} \circ u)(x) = x$ et $\forall x \in \mathrm{Ker}\, u = ((\mathrm{Ker}\, u)^\perp)^\perp$, $(\hat{u} \circ u)(x) = 0_E$.

<u>$\hat{u} \circ u$ est la projection orthogonale sur $(\mathrm{Ker}\, u)^\perp$.</u>

Supposons $r = n$. Alors $\mathrm{Ker}\, u = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im}\, u = E$. On a encore $(\mathrm{Ker}\, u)^\perp = E$.

$u \circ \hat{u}$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\, u = E$ et $\hat{u} \circ u$ est la projection orthogonale sur $(\mathrm{Ker}\, u)^\perp = E$.

Par conséquent $u \circ \hat{u} = \hat{u} \circ u = \mathrm{Id}_E$.

<u>Si $r = n$, u est un automorphisme de E et $u^{-1} = \hat{u}$.</u>

Q5 Soit donc v un endomorphisme de E tel que : $\begin{cases} \bullet\ \mathrm{Im}\, v = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp \\ \bullet\ \mathrm{Ker}\, v = (\mathrm{Im}\, u)^\perp \\ \bullet\ u \circ v \text{ (resp. } v \circ u \text{) est la projection} \\ \text{orthogonale sur } \mathrm{Im}\, u \text{ (resp. } (\mathrm{Ker}\, u)^\perp) \end{cases}$

Montrons alors que : $\begin{cases} (v \circ u) \circ \hat{u} = \hat{u} \\ v \circ (u \circ \hat{u}) = v \end{cases}$

Soit $x \in E$. $\hat{u}(x) \in \mathrm{Im}\, \hat{u} = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$.

Comme $v \circ u$ est la projection orthogonale sur $(\mathrm{Ker}\, u)^\perp$: $(v \circ u)(\hat{u}(x)) = \hat{u}(x)$.

Donc $\forall x \in E$, $((v \circ u) \circ \hat{u})(x) = (v \circ u)(\hat{u}(x)) = \hat{u}(x)$. <u>$(v \circ u) \circ \hat{u} = \hat{u}$.</u>

Pour montrer que les deux endomorphismes $v\circ(u\circ\hat{u})$ et v sont égaux il suffit de prouver qu'ils coïncident sur les deux sous-espaces supplémentaires $\mathrm{Im}\,u$ et $(\mathrm{Im}\,u)^\perp$.

Soit $x\in\mathrm{Im}\,u$. $(u\circ\hat{u})(x)=x$ car $u\circ\hat{u}$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,u$

Ainsi $v((u\circ\hat{u})(x))=v(x)$ ou $(v\circ(u\circ\hat{u}))(x)=v(x)$.

Soit $x\in(\mathrm{Im}\,u)^\perp$. $(u\circ\hat{u})(x)=0_E$ car $u\circ\hat{u}$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,u$ et $v(x)=0_E$ car $\mathrm{Ker}\,v=(\mathrm{Im}\,u)^\perp$, donc $v((u\circ\hat{u})(x))=v(0_E)=0_E=v(x)$; ici encore $(v\circ(u\circ\hat{u}))(x)=v(x)$.

Finalement : $\underline{\underline{v\circ(u\circ\hat{u})=v}}$.

Par associativité de $\circ$ on obtient alors : $v=v\circ(u\circ\hat{u})=(v\circ u)\circ\hat{u}=\hat{u}$.

Donc $v=\hat{u}$.

Ceci montre alors que $\hat{u}$ est le seul endomorphisme de E tel que :

1.. $\mathrm{Im}\,\hat{u}=(\mathrm{Ker}\,u)^\perp$

2.. $\mathrm{Ker}\,\hat{u}=(\mathrm{Im}\,u)^\perp$

3.. $u\circ\hat{u}$ (resp. $\hat{u}\circ u$) est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,u$ (resp. $(\mathrm{Ker}\,u)^\perp$).

Q6 Pour prouver que $\widehat{u^*}=(\hat{u})^*$ il suffit de prouver que

$$(S)\begin{cases}1..\ \mathrm{Im}\,(\hat{u})^*=(\mathrm{Ker}\,u^*)^\perp\\ 2..\ \mathrm{Ker}\,(\hat{u})^*=(\mathrm{Im}\,u^*)^\perp\\ 3..\ u^*\circ(\hat{u})^*\ (\text{resp. } (\hat{u})^*\circ u^*) \text{ est la projection orthogonale sur } \mathrm{Im}\,u^*\ (\text{resp. } (\mathrm{Ker}\,u^*)^\perp).\end{cases}$$

Lemme 1.. $\mathrm{Ker}\,u^*=(\mathrm{Im}\,u)^\perp$ et $\mathrm{Im}\,u^*=(\mathrm{Ker}\,u)^\perp$

On dit Lemme.. Cela pourrait être simple en utilisant ∃ Q S mais donnons une démonstration intrinsèque.

Soit $x\in\mathrm{Ker}\,u^*$. $\forall y\in E$, $\langle u(y),x\rangle=\langle y,u^*(x)\rangle=\langle y,0_E\rangle=0$.
$\forall y\in E$, $\langle u(y),x\rangle=0$. $\forall z\in\mathrm{Im}\,u$, $\langle z,x\rangle=0$. $x\in(\mathrm{Im}\,u)^\perp$

Soit $x\in(\mathrm{Im}\,u)^\perp$. $\forall y\in E$, $\langle x,u(y)\rangle=0$; $\forall y\in E$, $\langle u^*(x),y\rangle=0$; $u^*(x)\in E^\perp=\{0_E\}$.
$u^*(x)=0_E$. $x\in\mathrm{Ker}\,u^*$.

Ainsi $\mathrm{Ker}\,u^*=(\mathrm{Im}\,u)^\perp$.

Soit $x\in\mathrm{Im}\,u^*$. $\exists t\in E$, $x=u^*(t)$. $\forall z\in\mathrm{Ker}\,u$, $\langle x,z\rangle=\langle u^*(t),z\rangle=\langle t,u(z)\rangle=\langle t,0_E\rangle=0$

Donc $\forall z\in\mathrm{Ker}\,u$, $\langle x,z\rangle=0$. $x\in(\mathrm{Ker}\,u)^\perp$

$\mathrm{Im}\, u^* \subset (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$.

De plus $\dim \mathrm{Im}\, u^* = \dim E - \dim \mathrm{Ker}\, u^* = \dim E - \dim (\mathrm{Im}\, u)^\perp = \dim \mathrm{Im}\, u = \dim E - \dim \mathrm{Ker}\, u = \dim (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$

Par conséquent : $\mathrm{Im}\, u^* = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$

ceci achève la démonstration du lemme.

En appliquant le lemme à $\hat{u}$ on obtient :

$$\begin{cases} \mathrm{Im}\, (\hat{u})^* = (\mathrm{Ker}\, \hat{u})^\perp = ((\mathrm{Im}\, u)^\perp)^\perp = (\mathrm{Ker}\, u^*)^\perp. \\ \mathrm{Ker}\, (\hat{u})^* = (\mathrm{Im}\, \hat{u})^\perp = ((\mathrm{Ker}\, u)^\perp)^\perp = (\mathrm{Im}\, u^*)^\perp. \end{cases}$$

ceci démontre les deux premiers points de (S).

Pour le troisième point observons que : $u^* \circ (\hat{u})^* = (\hat{u} \circ u)^*$ et $\hat{u}^* \circ u^* = (u \circ \hat{u})^*$

Il nous faut donc prouver que $(\hat{u} \circ u)^*$ (resp. $(u \circ \hat{u})^*$) est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\, u^* = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$ (resp. $(\mathrm{Ker}\, u^*)^\perp = \mathrm{Im}\, u$) sachant que $\hat{u} \circ u$ (resp. $u \circ \hat{u}$) est la projection orthogonale sur $(\mathrm{Ker}\, u)^\perp$ (resp. $\mathrm{Im}\, u$).

En clair il faut montrer que $(\hat{u} \circ u)^* = \hat{u} \circ u$ et $(u \circ \hat{u})^* = u \circ \hat{u}$ sachant que $\hat{u} \circ u$ et $u \circ \hat{u}$ sont deux projections orthogonales.

Un second lemme s'impose pour achever de prouver (S)

Lemme 2.. Soit p une projection orthogonale. $p^* = p$.

Démonstration du lemme.. Soit F la base de p.

Soit $(x, y) \in E^2$. $\exists! (x_1, x_2) \in F \times F^\perp$, $\exists (y_1, y_2) \in F \times F^\perp$, $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$.

$$\langle p(x), y \rangle = \langle x_1, y_1 + y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \underbrace{\langle x_1, y_2 \rangle}_{=0} = \langle x_1, y_1 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \underbrace{\langle x_2, y_1 \rangle}_{=0} = \langle x, y_1 \rangle = \langle x, p(y) \rangle$$

Donc $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$. Ainsi $p^* = p$.

ceci achève la démonstration du lemme et de l'égalité $\underline{\underline{\widehat{u^*} = (\hat{u})^*}}$.

Q7 u est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ de noyau $\mathrm{Vect}(1)$ et d'image $\mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^{n-1})$.

Posons $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $e_i = X^i$ et $e_n = 1$. Posons aussi $r = n-1$

$(1, X, \dots, X^n)$ étant une base orthonormale de E, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est également une base orthonormale de E.

Notons alors que $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_{n-1})) = (u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base orthogonale de $\mathrm{Im}\, u$ et que (e_n) est une base orthonormale de $\mathrm{Ker}\, u$.

Le second point est clair car $e_n = 1$. Traitons le premier.

$\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $u(e_i) = i X^{i-1} = i e_{i-1}$. Les éléments de $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_{n-1}))$ sont donc bien deux à deux orthogonaux et sont de plus non nuls.

$(u(e_1), \dots, u(e_{n-1}))$ est une famille libre et orthogonale de $n-1$ éléments de $\operatorname{Im} u$ qui est de dimension $n-1$; $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_{n-1}))$ est une base orthogonale de $\operatorname{Im} u$.

La base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ a donc les qualités de IQ2.

$\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\sigma_k = \|u(e_k)\| = \|k X^{k-1}\| = |k| \, \|X^{k-1}\| = k$

$\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $f_k = \frac{1}{\sigma_k} u(e_k) = \frac{1}{k} k X^{k-1} = X^{k-1}$.

En posant $f_n = X^{n-1}$ on obtient une base orthonormale $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ de E.

Du coup $\forall P \in E$, $\hat{u}(P) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sigma_k} \langle P, f_k \rangle e_k = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \langle P, X^{k-1} \rangle X^k$

$\forall P \in E$, $\hat{u}(P) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \langle P, X^{k-1} \rangle X^k$

$\forall i \in [\![0, n-2]\!]$, $\hat{u}(X^i) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \langle X^i, X^{k-1} \rangle X^k = \frac{1}{i+1} X^{i+1}$

$\hat{u}(X^{n-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \langle X^{n-1}, X^{k-1} \rangle X^k = 0$

Ainsi $\quad M_{(1, X, \dots, X^{n-1})}(\hat{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1/(n-1) & 0 \end{pmatrix}$.