SUJET 3

PSEUDO INVERSE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

PARTIE I

E et E' sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et u une application linéaire de E dans E'.

Q1 F est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E et F' est un supplémentaire de $\operatorname{Im} u$ dans E'.

q est la projection sur F parallèlement à $\operatorname{Ker} u$ et q' est la projection sur $\operatorname{Im} u$ parallèlement à F'.

a) On considère l'application s de F dans $\operatorname{Im} u$ qui à tout élément x de F associe $u(x)$. Montrer que s est un isomorphisme de F sur $\operatorname{Im} u$.

b) Soit y un élément de E'. Montrer qu'il existe un couple (x, z) et un seul appartenant à $F \times F'$ et vérifiant : $y = u(x) + z$. On pose alors $\varphi_u(y) = x$

Exprimer $\varphi_u(y)$ à l'aide de y, q' et s^{-1}.

c) Montrer que l'application φ_u qui à tout élément y de E' associe $\varphi_u(y)$ est une application linéaire de E' dans E.

Q2 a) Que dire de φ_u si u est un isomorphisme de E sur E' ?

b) Déterminer $\operatorname{Ker} \varphi_u$ et $\operatorname{Im} \varphi_u$. Montrer que $\varphi_u \circ u \circ \varphi_u = \varphi_u$ et $u \circ \varphi_u \circ u = u$.

c) Prouver que $u \circ \varphi_u$ et $\varphi_u \circ u$ sont des projections dont on précisera les éléments.

Si E et E' sont de dimension finie, préciser $u \circ \varphi_u$ lorsque $\operatorname{rg} u = \dim E'$ et $\varphi_u \circ u$ lorsque $\operatorname{rg} u = \dim E$.

Q3 Soit v une application linéaire de E' dans E telle que $v \circ u \circ v = v$ et $u \circ v \circ u = u$.

a) Montrer que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} v$ et $E' = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} v$.

b) Montrer que si $\operatorname{Ker} v = F'$ et $\operatorname{Im} v = F$ alors $v = \varphi_u$.

c) En déduire une caractérisation de φ_u.

Q4 Ici on suppose que : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = E'$ et $\dim E = 2$. t est un élément de $\mathbb{R}$.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base de E et u est l'endomorphisme de E de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

a) Préciser $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$.

b) Montrer que $F = \operatorname{Vect}(te_1 + e_2)$ (resp. $F' = \operatorname{Vect}(e_1 + te_2)$) est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ (resp. $\operatorname{Im} u$).

c) Donner la matrice de φ_u dans $\mathcal{B}$.

PARTIE II

Ici E et E' sont deux espaces vectoriels euclidiens de dimensions p et n non nulles. Pour ne pas alourdir les notations nous noterons $< .,. >$ les produits scalaires de E et E', et $\|.\|$ les deux normes euclidiennes associées (en cas de doute utiliser les notations $< .,. >_E$, $< .,. >_{E'}$ $\|.\|_E$ et$\|.\|_{E'}$).

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une base orthonormale de E et $\mathcal{B}' = ({e'}_1, {e'}_2, \ldots, {e'}_n)$ est une base orthonormale de E'.

u est une application linéaire de E dans E' de matrice A relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Q0 Soit ℓ une projection de E. Montrer que ℓ est une projection orthogonale si et seulement si ℓ est un endomorphisme symétrique.

Q1 Montrer qu'il existe une application linéaire u^+ de E' dans E et une seule telle que :

$$\operatorname{Ker} u^+ = (\operatorname{Im} u)^\perp,\ \operatorname{Im} u^+ = (\operatorname{Ker} u)^\perp,\ u \circ u^+ \circ u = u \text{ et } u^+ \circ u \circ u^+ = u^+.$$

Q2 Montrer que $\left(u^+\right)^+ = u$.

Q3 a) Montrer que $u^+ \circ u$ et $u \circ u^+$ sont deux projections orthogonales dont on précisera les éléments.

b) On note A^+ la matrice de u^+ relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$.

Montrer que $AA^+A = A$, $A^+AA^+ = A^+$, ${}^t(AA^+) = AA^+$ et ${}^t(A^+A) = A^+A$.

c) Montrer que si $\operatorname{rg} u = p$ alors $A^+A = I_p$, ${}^tAA$ est inversible et $A^+ = ({}^tAA)^{-1}\,{}^tA$.

Examiner le cas où $\operatorname{rg} u = n$.

Q4 Soit v une application linéaire de E' dans E telle que : $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$. On suppose de plus que $u \circ v$ et $v \circ u$ sont deux projections <u>orthogonales</u>. Montrer que $v = u^+$.

Q5 Soit w une application linéaire de E' dans E dont la matrice W, relativement aux base $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$, vérifie :

$$AWA = A,\ WAW = W,\ {}^t(AW) = AW \text{ et } {}^t(WA) = WA.$$

Montrer que $w = u^+$.

Q6 Soit y un élément de E'. On considère l'équation $x \in E$ et $u(x) = y \quad (1)$.

Cette équation n'a pas nécessairement de solution. On se contentera donc de trouver x dans E tel que $\|y - u(x)\| = \underset{t \in E}{\operatorname{Min}} \|y - u(t)\|$. On dira alors que x est une pseudo solution de l'équation (1).

a) Montrer que $u^+(y)$ est une pseudo-solution de (1). Expliquer comment on obtient toutes les pseudo-solutions de (1) à l'aide de $u^+(y)$.

b) Montrer que $u^+(y)$ est LA pseudo solution de norme minimum.

c) Examiner le cas $\operatorname{rg} u = p$.

PARTIE III

On reprend la situation de la partie II. On suppose en plus que le rang r de u n'est pas 0.

On note u^* l'application linéaire de E' dans E dont la matrice relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ est ${}^tA$.

On pose $w = u^* \circ u$.

Q1 Montrer que w est un endomorphisme symétrique de E.

Q2 a) Montrer que $\forall x \in E, \forall y \in E',\ < u(x), y >=< x, u^*(y) >$.

b) Montrer que les valeurs propres de w sont positives.

c) Montrer que le rang de w est r c'est à dire celui de u.

Q3 a) Montrer que l'on peut trouver une base orthonormale $\mathcal{B}_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de E, constituée de vecteurs propres de w respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_p, ces valeurs propres étant telles que :

$$\forall i \in [\![1, r]\!],\ \lambda_i > 0 \text{ et } \forall i \in [\![r+1, p]\!],\ \lambda_i = 0.$$

b) On pose $\forall i \in [\![1, r]\!],\ y_i = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\, u(x_i)$.

Montrer que $(y_1, y_2, \ldots, y_r)$ est une famille orthonormale de E'.

Q4 On complète cette famille en une base orthonormale $\mathcal{B}'_1 = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de E'.

a) Montrer que $\forall i \in [\![r+1, p]\!],\ u(x_i) = 0_{E'}$.

b) Montrer que $A = Q\Delta\,{}^tP$ où P et Q sont deux matrices carrées inversibles ayant pour inverse leur transposée et $\Delta = (\delta_{ij})$ une matrice telle que $\delta_{ij} = \sqrt{\lambda_i}$ si $1 \leqslant i = j \leqslant r$ et 0 sinon.

Q5 Pour tout élément i de $[\![1, p]\!]$ on note X_i la matrice de x_i dans la base $\mathcal{B}$ de E.

Pour tout élément j de $[\![1, n]\!]$ on note Y_j la matrice de y_j dans la base $\mathcal{B}'$ de E'.

a) Montrer que $A = \sum\limits_{k=1}^{r} \sqrt{\lambda_k}\, Y_k\, {}^tX_k$ (on pourra évaluer le produit de ces deux matrice avec X_i).

b) Montrer que ${}^tAA = \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k\, X_k\, {}^tX_k$ et $A\,{}^tA = \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k\, Y_k\, {}^tY_k$.

c) Montrer que $A^+ = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\, X_k\, {}^tY_k$.
