SÉRIES

SÉRIES

P mentionne des résultats particulièrement utiles dans la pratique des séries, souvent oubliés...

★ mentionne des erreurs à ne pas faire où des hypothèses importantes ou des mises en garde.

SD mentionne des résultats qu'il serait bon de savoir démontrer.

Dans ce résumé les suites et les séries considérées sont des suites et des séries de réels.

Il est essentiel de se souvenir que ce chapitre n'est pas une fin en soi mais est au service du cours de probabilités.

I GÉNÉRALITÉS

▶ 1. Définition et vocabulaire

Déf. 1 $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels. Pour simplifier, nous dirons que **la série de terme général** u_n est la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ où $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ pour tout n dans $[\![n_0, +\infty[\![$.

Pour tout n dans $[\![n_0, +\infty[\![$, S_n est alors la **somme partielle d'indice** n ou d'ordre n de la série de terme général u_n.

★★ On évitera le plus possible de parler de la série $\sum u_n$

Déf. 2 Les notations sont celles de la définition précédente.

La série de terme général u_n est **convergente** (resp. **divergente**) si la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ est convergente (resp. divergente).

Si la série de terme général u_n est convergente, sa **somme** est la limite de la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$.

On la note $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ ou $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$ ou ...

Déf. 3 $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels.

On suppose que la série de terme général u_n est convergente et on note S sa somme.

Pour tout n dans $[\![n_0, +\infty[\![$ le **reste d'indice n** ou d'ordre n de cette série est $R_n = S - S_n$.

$R_n = \displaystyle\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{p} u_k$, ce qui conduit à écrire $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Th. 1 $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels. On suppose que la série de terme général u_n est convergente et on pose : $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![,\ R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = 0}.$$

PP Les notations sont celles des définitions précédentes.

- $\forall n \in [\![n_0+1,+\infty[\![$, $\boxed{u_n = S_n - S_{n-1}}$.
- Si la série de terme général u_n converge : $\forall n \in [\![n_0+1,+\infty[\![$, $\boxed{u_n = R_{n-1} - R_n}$.

▶ 2. Une condition nécessaire de convergence

Th. 2 **SD** **SI** la série de terme général u_n converge **ALORS** : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

★★ Cette condition n'est pas suffisante. Considérer par exemple la série de terme général $1/n$.

PP Cette condition peut être utile pour montrer qu'une série est divergente surtout si elle dépend d'un ou plusieurs paramètres ($u_n = \dfrac{x^n}{n}$, $u_n = \dfrac{n^\alpha}{1+n^\beta}$...).

▶ 3. Une broutille !

Prop. 1 Deux séries de réels qui diffèrent d'un nombre fini de termes sont de même nature.

▶ 4. Opérations sur les séries convergentes

Th. 3 $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ sont deux suites de réels.

Si les séries de termes généraux u_n et v_n sont convergentes (★) alors :

- les séries de termes généraux $u_n + v_n$ et λu_n sont convergentes ;
- $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n+v_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$ et $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Remarque ★★ L'égalité $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n+v_n)$ est en général une évidence.

L'égalité $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n+v_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$ est loin d'en être une.

Le premier membre peut avoir un sens sans que le second en ait un. En clair la série de terme général $u_n + v_n$ peut être convergente sans que les séries de termes généraux u_n et v_n soient convergentes.

Elle est même source de nombreuses erreurs qu'on se le dise.

On ne s'autorisera donc à "scinder une somme infinie en deux " qu'après avoir vérifié la convergence des deux "morceaux". Observons que :

Prop. 2 $(u_n)_{n\geqslant n_0}$, $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(w_n)_{n\geqslant n_0}$ sont trois suites de réels telles que : $\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![$, $w_n = u_n + v_n$.

- Si deux des séries sont convergentes la troisième l'est aussi.
- Si une série est convergente, les deux autres sont de même nature.
- Si deux séries sont divergentes on ne peut à priori rien dire de la troisième.

Th. 4 Toute série combinaison linéaire de séries convergentes est convergente et sa somme est la combinaison linéaire des sommes.

Plus précisément, soient $(u_n^{(1)})_{n\geqslant n_0}$, $(u_n^{(2)})_{n\geqslant n_0}$,... $(u_n^{(p)})_{n\geqslant n_0}$ p suites et λ_1, λ_2, ..., λ_p p réels.

On suppose que les séries de terme généraux $u_n^{(1)}$, $u_n^{(2)}$, ..., $u_n^{(p)}$ sont convergentes.

Alors la série de terme général $\lambda_1\, u_n^{(1)} + \lambda_2\, u_n^{(2)} + \cdots + \lambda_p\, u_n^{(p)}$ est convergente et :

$$\boxed{\sum_{n=n_0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\, u_n^{(k)} = \sum_{k=1}^{p}\lambda_k \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n^{(k)}}$$

Remarque ★★ Il convient d'avoir une idée très claire de ce résultat.

Ce théorème permet de justifier proprement la commutation d'une somme finie et d'une somme infinie.

▶ 5. Les séries du programme

Th. 5 **La série exponentielle**.

Pour tout réel x, la série de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ est convergente et : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x}$.

P Ceci donne un moyen pour justifier rapidement que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$.

Th. 6 **Les séries de Riemann**.

α est un réel. $\boxed{\text{La série de terme général } \dfrac{1}{n^\alpha} \text{ est convergente si et seulement si } \alpha > 1}$.

Th. 7 **SD** **Les séries géométriques et leurs dérivées**. x est un réel et r est un élément de $\mathbb{N}$ (ou de $\mathbb{N}^*$).

1. Les séries de termes généraux x^n, $n\, x^{n-1}$, $n\,(n-1)\, x^{n-2}$ et $n(n-1)\cdots(n-r+1)\, x^{n-r}$ convergent si et seulement si : $|x| < 1$.

2. On suppose que $|x| < 1$.

- $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}}$ $\boxed{\forall p\in\mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} x^n = \frac{x^p}{1-x}}$.
- $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}}$ $\boxed{\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}}$.
- $\boxed{\displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)x^{n-r} = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}}$.

Cor. 1. La série de terme général $\dbinom{n}{r}\, x^{n-r} = C_n^r\, x^{n-r}$ converge si et seulement si $|x| < 1$.

2. Si $|x| < 1$: $\boxed{\displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n}{r}\, x^{n-r} = \sum_{n=r}^{+\infty} \mathrm{C}_n^r\, x^{n-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}}$.

▶ 6. Un lien utile entre suites et séries

Prop. 3 | **P** | **SD** | $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels. $\boxed{\forall n \in [\![n_0+1,+\infty [\![,\ u_n = u_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} (u_{k+1}-u_k).}$

Th. 8 | **P** | **SD** | Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de réels.

$\boxed{\textbf{La suite } \mathbf{u_n}}$ est de même nature que $\boxed{\textbf{la série de terme général } \mathbf{u_{n+1} - u_n}}$.

II SÉRIES À TERMES POSITIFS

★ Les résultats qui suivent concernent certeS les séries à termes positifs mais ils permettent également de traiter le cas des séries à termes négatifs ; changer la série en son opposé... !

▶ 1. Le théorème fondamental

Th. 9 $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels $\boxed{\textbf{positifs}}$ (★). Pour tout n dans $[\![n_0,+\infty [\![$, $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

1. La suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante.
2. La série de terme général u_n est convergente si et seulement si $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ est majorée.
3. Si la série de terme général u_n est divergente : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k = +\infty$.

Cor.

- La suite des sommes partielles d'une série $\boxed{\text{divergente à termes positifs}}$ tend vers $+\infty$.
- La suite des sommes partielles d'une série $\boxed{\text{divergente à termes négatifs}}$ tend vers $-\infty$.

Par exemple $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{2k-1}{2k}\right) = -\infty$.

▶ 2. Critère de comparaison 1 : majoration ou minoration

Th. 10 $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ sont deux suites de réels.

On suppose qu'il existe un élément p de $\mathbb{N}$ tel que : $\boxed{\forall n \in [\![p,+\infty [\![,\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n}$ (★).

Alors :

- si la série de terme général v_n converge, la série de terme général u_n converge ;
- si la série de terme général u_n diverge, la série de terme général v_n diverge.

★★ On ne confondra pas ce résultat avec le théorème fondamental. Ici on travaille sur les termes généraux pas sur les sommes partielles.

▶ 3. Critère de comparaison 2 : les équivalents

Th. 11 $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ sont deux suites de réels. On suppose que :

1. L'une des suites est positive à partir d'un certain rang (★) ;
2. $u_n \sim v_n$.

Alors les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.

▶ 4. Critère de comparaison 3 : la négligeabilité

Th. 12 $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n \geqslant n_0}$ sont deux suites de réels. On suppose que :

1. $u_n = \text{o}(v_n)$;
2. il existe un élément p de $[\![n_0, +\infty [\![$ tel que $\boxed{\forall n \in [\![p, +\infty [\![,\ u_n \geqslant 0 \ \boxed{\text{ et }}\ v_n \geqslant 0}$ (★).

Alors :

• si la série de terme général v_n converge, la série de terme général u_n converge ;

• si la série de terme général u_n diverge, la série de terme général v_n diverge.

★★★ Il est absolument indispensable pour utiliser les trois derniers théorèmes d'évoquer l'hypothèse de signe.

▶ 5. Séries absolument convergentes

Déf. 4 Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite de réels.

La série de terme général u_n est **absolument convergente** si la série de terme général $|u_n|$ est convergente.

Th. 13 **SD** Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite de réels.

• Si la série de terme général u_n est absolument convergente :

1. La série de terme général u_n est convergente.
2. $\left| \displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right| \leqslant \displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$. (★)

• Une série convergente n'est pas nécessairement absolument convergente.

La série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente mais n'est pas absolument convergente.

★★ Pour écrire l'inégalité $\left| \displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right| \leqslant \displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$ il est indispensable de montrer que la série de terme général u_n est absolument convergente.

▶ 6. Des pratiques plus qu'usuelles

Th. 14 $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n \geqslant n_0}$ sont deux suites de réels. On suppose que :

1. $u_n = \text{o}(v_n)$;
2. il existe un élément p de $[\![n_0, +\infty [\![$ tel que $\boxed{\forall n \in [\![p, +\infty [\![,\ v_n \geqslant 0}$ (★).

Si la série de terme général v_n converge alors la série de terme général u_n est absolument convergente donc convergente.

Th. 15 **PP** $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite de réels.

On suppose qu'il existe un réel α strictement supérieur à 1 tel que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(n^\alpha\, u_n \right) = 0$.

Alors $|u_n| = \text{o}\left(\dfrac{1}{n^\alpha} \right)$ et la série de terme général u_n est absolument convergente.

Th. 16 **PP** $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite de réels.

On suppose qu'il existe un réel α inférieur ou égal à 1 tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n^\alpha\, u_n\right) = +\infty$.

Alors $\exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in [\![p, +\infty[\![,\ u_n \geqslant \dfrac{1}{n^\alpha} \geqslant 0$ et la série de terme général u_n diverge.

Remarque **PP** Il est encore bon de se souvenir que $|u_n| = \mathrm{o}(v_n)$, $u_n = \mathrm{o}(|v_n|)$, $|u_n| = \mathrm{o}(|v_n|)$ et $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ sont des propriétés équivalentes.

▸ 7. Séries et intégrales généralisées

Th. 17 a est un entier et f est une application de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que f est **continue**, **décroissante** et **positive** sur $[a, +\infty[$.

La série de terme général $u_n = f(n)$ et l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

P Ce résultat est par exemple utile pour étudier la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$.

III SAVOIR FAIRE

• Calculer des sommes de séries simples.

• Utiliser la C.N. de convergence (particulièrement pour les séries paramétrées).

• Utiliser la C.N.S. de convergence d'une série à termes positifs.

• Utiliser les critères de comparaison des séries à termes positifs.

• Utiliser le théorème séries/intégrales généralisées.

• Etudier une série de Bertand.

• Faire du "pilotage riemannien".

• Utiliser les formules de Taylor ou l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour montrer la convergence d'une série ou pour trouver la somme d'une série.

• Encadrer ou trouver un équivalent des sommes partielles d'une série en utilisant des intégrales ou une formule de Taylor ou l'inégalité de Taylor-Lagrange ou...

• Encadrer ou trouver un équivalent du reste d'une série convergente en utilisant des intégrales ou une formule de Taylor ou l'inégalité de Taylor-Lagrange ou...

• Etudier une fonction définie par une série.

• Justifier la permutation d'une somme infinie avec une somme finie.

• Permuter une somme infinie et une intégrale.

• Traiter des séries alternées.

• Traiter du produit de Cauchy.

• Etudier un produit infini.

IV RÉSUMÉ DE FAUTES À NE PAS FAIRE

★ Dire que la suite de terme général u_n converge vers zéro donc la série de terme général u_n est convergente.

★ Ecrire la somme d'une série sans avoir parlé de convergence de la série.

★ Utiliser les critères de comparaison des séries à termes positifs sans vérifier l'hypothèse de positivité.

★ Ecrire $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty}(u_n+v_n)=\sum_{n=n_0}^{+\infty}u_n+\sum_{n=n_0}^{+\infty}v_n$ sans avoir vérifié au moins deux convergences.

★ Ecrire $\displaystyle\Big|\sum_{n=n_0}^{+\infty}u_n\Big|\leqslant\sum_{n=n_0}^{+\infty}|u_n|$ sans avoir vérifié l'absolue convergence de la série de terme général u_n.

★ Passer de $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![\ u_n\leqslant v_n$ à $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty}u_n\leqslant\sum_{n=n_0}^{+\infty}v_n$ sans vérifier la convergence des deux séries.

★ Ecrire la séquence : $\forall n\in[\![p,+\infty[\![,\ 0\leqslant u_n\leqslant v_n$ donc $\sum\limits_{n=p}^{+\infty}u_n\leqslant\sum\limits_{n=p}^{+\infty}v_n$; comme la série de terme général v_n converge, la série de terme général u_n converge.

★ Ecrire : $\forall n\in[\![p,+\infty[\![,\ u_n\leqslant v_n$ et $\forall n\in[\![p,+\infty[\![,\ v_n\geqslant 0$ donc la convergence de la série de terme général v_n donne la convergence de la série de terme général u_n.

★ Ecrire : $\forall n\in[\![p,+\infty[\![,\ u_n\leqslant v_n$, donc la série de terme général u_n converge si et seulement si la série de terme général v_n converge.

★ Ecrire "sous réserve de convergence" au niveau des séries.

★ Ecrire $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}x^k=\frac{1}{1-x}\cdot$

★ Ecrire $\displaystyle\lim_{x\to a}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}f_k(x)\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to a}f_k(x)\right)$ avec $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

★ Ecrire $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^x t^{k-1}\,\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{k=1}^{+\infty}t^{k-1}\,\mathrm{d}t$ sans vérification (ou plus généralement $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\int_a^b f_k(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b\sum_{k=1}^{+\infty}f_k(t)\,\mathrm{d}t$).

★ Permuter une somme infinie et une somme finie sans justifier.

★ Permuter deux sommes infinies sans justifier.

V ENCORE QUELQUES CONSEILS POUR ÉTUDIER UNE SÉRIE

• Il faut, avant tout, très bien savoir les quelques résultats proposés par le programmme !

• Bien observer le terme général et regarder si ce n'est pas un vague clone d'une série de cours.

Exemples : $(n+1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, $\dfrac{(3n+5)4^n}{n!}$, $\cdots$

• "Peser" le terme général et dégager les dominantes. Si possible en donner un équivalent simple. Puis faire un pronostic... si le résutat n'est pas donné.

• Penser à utiliser la condition nécessaire de convergence particulièrement sur les séries à paramètre(s).

Exemples : $\dfrac{x^n}{1+y^{2n}}$, $\dfrac{n^\alpha}{1+n^\beta}\cdots$

• Si la série est à termes positifs, penser à majorer les sommes partielles, à utiliser les trois critères de comparaison, à faire du pilotage Riemannien, à comparer avec une intégrale généralisée...

• Si la série est à termes négatifs on se ramène au cas précédent en multipliant par -1.

• Si la série n'a pas un signe défini, on essaiera de montrer qu'elle est absolument convergente.

• Dans les cas ou le terme général est du type $(-1)^n a_n$ (ou $(-1)^{n-1}a_n$) penser aux séries alternées et aux suites adjacentes définies à partir des sommes partielles d'indice pair et impair.

• Pour étudier la vitesse de convergence on étudie le reste.

• Pour calculer la somme d'une série on forme les sommes partielles et on passe à la limite.

VI COMPLÉMENTS

▸ 1. Un conseil

Pour majorer la somme d'une série convergente (ou la valeur absolue de cette somme) il est fortement conseillé de revenir à une somme finie pour s'éviter d'avoir à justifier trop de convergence. Même chose pour un reste.

▸ 2. Séries de Bertrand

Prop. 4 **SD** α et β sont deux éléments de $\mathbb{R}$.

La série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ est convergente si et seulement si : $\alpha>1$ ou ($\alpha=1$ et $\beta>1$).

▸ 3. Séries alternées

Th. 18 **SD** $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels **qui est décroissante et qui converge vers zéro**. ε vaut 1 ou -1.

1. La série de terme général $u_n=\varepsilon(-1)^n\,a_n$ est convergente.
2. $\forall n\in [\![n_0,+\infty[\![$, $\big|R_n\big| = \Big|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k\Big| \leqslant |u_{n+1}|$.

Remarque **P** Il est important de se souvenir que le résultat précédent s'obtient en montrant que les suites (S_{2p}) et (S_{2p+1}) sont adjacentes ($S_n=\sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$).

Prop. 5 Pour tout réel α strictement positif la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente.

▸ 4. Quelques pratiques usuelles

Prop. 6 $\boxed{\text{SD}}$ **"Pilotage Riemannien".** $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels.

1. On suppose qu'il existe un réel α tel que :

   $\to$ $\alpha > 1$;

   $\to$ La suite $(u_n n^{\alpha})$ soit convergente (ou bornée).

Alors la série de terme général u_n est absolument convergente.

2. On suppose qu'il existe un réel α tel que :

   $\to$ $\alpha \leqslant 1$;

   $\to$ La suite $(u_n n^{\alpha})$ admette une limite (éventuellement infinie) non nulle.

Alors la série de terme général u_n est divergente.

Prop. 7 **"Pilotage géométrique".** $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels non nuls.

1. On suppose qu'il existe un réel c appartenant à l'intervalle $[0,1[$ et un élément p de $\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in [\![p,+\infty[\![,\ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant c.$$

Alors la série de terme général u_n est absolument convergente.

2. On suppose qu'il existe un réel c appartenant à l'intervalle $[1,+\infty[$ et un élément p de $\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in [\![p,+\infty[\![,\ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant c.$$

Alors la série de terme général u_n est divergente (son terme général ne tend pas vers 0).

Prop. 8 **"Pilotage géométrique again". Critère de d'Alembert.** $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels non nuls.

On suppose que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$).

Si $\ell < 1$ la série de terme général u_n est absolument convergente.

Si $\ell > 1$ la série de terme général u_n est divergente.

Si $\ell = 1$ la conclusion n'est pas "immédiate".

Remarque ★ Ces résultats ne sont pas utilisables en l'état. Il faut à chaque fois se servir des hypothèses pour se ramener à l'utilisation de l'un des théorèmes de comparaison des séries à termes positifs.

▶ 5. Comparaison avec une série géométrique, again

Prop. 9 $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels et x est un réel.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} x^n$, les séries de terme généraux u_n et x^n sont de même nature.

Remarque ★ Ce résultat n'est pas aussi banal que cela dans la mesure où la suite de terme général x^n n'a pas toujours un signe constant. La condition nécessaire de convergence fait... le nécessaire !

▶ 6. Produit de Cauchy de deux séries

Prop. 10 **SD** $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites de réels positifs.

Pour tout élément n de $\mathbb{N}$ on pose $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

1. $\sum_{k=0}^{n} c_k \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{2n} c_k$.

2. Si les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes, il en est de même de la série de terme général c_n et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Remarque Le point 2 vaut encore si les deux séries sont absolument convergentes (démonstration qui résulte du théorème précédent). Il vaut encore en supposant l'une des séries convergente et l'autre absolument convergente (théorème de Carl Joseph MERTENS dont la preuve est plus délicate).

▶ 7. Séries et intégrales généralisées again

Th. 19 a est un élément de $\mathbb{N}$ et f est une application de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que f est **continue**, **décroissante** et **positive** sur $[a, +\infty[$.

Pour tout n dans $[\![a, +\infty[\![$, $S_n = \sum_{k=a}^{n} u_k$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ (si la série converge).

1. La suite de terme général $S_n - \int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

2. Si l'intégrale (ou la série) est divergente : $S_n \sim \int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Si l'intégrale (ou la série) est convergente : $\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

▶ 8. Quelques sommes classiques

Prop. 11 $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1}$ $\boxed{\sum_{n=r}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = \sum_{n=r}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{r}}$

Prop. 12 $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$ $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2}$ $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}}$

▶ 9. Série et formule de Taylor

PP La formule de Taylor-Lagrange ou la formule de Taylor avec reste intégral ou l'inégalité de Taylor-Lagrange sont souvent utilisées dans les problèmes pour obtenir des convergences de séries, des sommes de séries, des développements de fonctions en série entière et des majorations de restes de séries convergentes. Qu'on se le dise. Ilustrons

Prop. 13 I est un intervalle qui contient 0 et f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

$$\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\, f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi si x appartient à I et si $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors la série de terme général $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$ converge et a pour somme $f(x)$.

Prop. 14 I est un intervalle qui contient 0 et f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

$$\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\, f^{(k)}(0)\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \operatorname*{Max}_{u\in[0,x]} |f^{(n+1)}(u)|.$$

Ainsi si x appartient à I et si $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \operatorname*{Max}_{u\in[0,x]} |f^{(n+1)}(u)| \right) = 0$ alors la série de terme général $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$ converge et a pour somme $f(x)$.

Th. 20 **SD** f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I qui contient 0.

On suppose qu'il existe une constante M telle que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}},\ \forall x \in I,\ |f^{(n)}(x)| \leqslant M$$

Alors pour tout élément x de I, la série de terme général $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$ converge et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$

Prop. 15

- Pour tout réel x : $\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}}$ $\boxed{\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$ $\boxed{\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}}$.
- Pour tout élément de $]-1,1]$: $\boxed{\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}}$
- Pour tout élément de $[-1,1[$: $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \ln(1-x)}$
- Pour tout élément de $]-1,1[$: $\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n}$

ENCORE PLUS

▶ 10. Produits infinis

Th. 21 **SD** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels strictement positifs.

La suite de terme général $\prod_{k=0}^{n} u_k$ converge vers un réel non nul si et seulement si la série de terme général $\ln u_n$ converge.

Th. 22 **SD** $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels strictement supérieurs à -1 et de même signe.

La suite de terme général $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(1+a_k)$ converge vers un réel non nul si et seulement si la série de terme général a_n converge.

Prop. 16 $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels strictement supérieurs à -1 telle que la série de terme général a_n converge.

La suite de terme général $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(1+a_k)$ converge vers un réel non nul si et seulement si la série de terme général $(a_n)^2$ converge.

▶ 11. Comparaison et sommation

Th. 23 $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ sont deux suites de réels. On suppose que :

1. L'une des suites est positive à partir d'un certain rang.
2. $u_n \sim v_n$.

Alors :

• Si l'une des deux séries converge l'autre converge et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ ou $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$.

• Si l'une des deux séries diverge l'autre diverge et $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n_0}^{n} v_k$.

Th. 24 $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ sont deux suites de réels.

On suppose que :

1. $u_n = \mathrm{o}(v_n)$;
2. il existe un élément p de $\mathbb{N}$ tel que $\boxed{\forall n \in [\![p,+\infty[\![,\ u_n \geqslant 0 \text{ et } v_n \geqslant 0}$ $(\bigstar)$.

Alors :

• si la série de terme général v_n converge alors la série de terme général u_n converge et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \mathrm{o}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right) \text{ et } \sum_{k=n}^{+\infty} u_k = \mathrm{o}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right).$$

• si la série de terme général u_n diverge alors la série de terme général v_n diverge et $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k = \mathrm{o}\left(\sum_{k=n_0}^{n} v_k\right)$.

▶ 12. Série commutativement convergente

Déf. 5 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réel. La série de terme général u_n est **commutativement convergente** si pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$ la série de terme général $u_{\sigma(n)}$ converge.

Th. 25 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réel. Si la série de terme général u_n est commutativement convergente alors, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Th. 26 Une série de réel est commutativement convergente si et seulement si elle est absolument convergente.

► 13. Sommation par paquets

Th. 27 φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\varphi(0) = 0$. $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels.

Pour tout élément n de $\mathbb{N}$ on pose $v_n = \sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_k$.

1. Si la série de terme général u_n converge alors la série de terme général v_n converge et : $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
2. La réciproque est fausse.
3. Si la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est à termes positifs, les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.