CALCUL INTÉGRAL

I INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

1. Fonction en escalier. Intégrale d'une fonction en escalier

2. Intégrale d'une fonction continue

II PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE

1. Premières propriétés

2. Croissance de l'intégrale

3. Fonction continue de signe constant et d'intégrale nulle

4. Cauchy-Schwarz

5. Valeur moyenne

III PRIMITIVES ET INTÉGRALES

1. Notion de primitive

2. Le cas des fonctions continues

3. Quelques résultats utiles pour obtenir des primitives ou pour calculer des intégrales...

4. Quelques formules de trigonométrie utiles en intégration !

5. Primitives usuelles

6. Prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$

7. L'équation différentielle $y' + a\,y = 0$

IV POUR CALCULER DES INTÉGRALES OU DES PRIMITIVES

1. Intégration par parties

2. Changement de variable

V FORMULES DE TAYLOR

1. La formule de Taylor avec reste intégral

2. La formule de Taylor-Lagrange

3. L'inégalité de Taylor-Lagrange

4. La formule de Taylor-Young

5. Remarques

CALCUL INTÉGRAL

P mentionne des résultats particulièrement utiles dans la pratique de l'intégration, souvent oubliés...

SD mentionne des résultats qu'il serait bon de savoir démontrer.

★ mentionne des erreurs à ne pas faire ou des hypothèses importantes ou des mises en garde.

Dans ce résumé les fonctions considérées sont des fonctions numériques de la variable réelle.

Sauf mention du contraire, dans tout ce qui suit, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Nous ne le dirons pas à chaque fois.

De même lorsque nous écrirons $[a, b]$, et sauf cas particulier, il sera entendu que a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Ici encore presque tous les résultats sont énoncés pour des applications d'un intervalle I (ou $[a, b]$) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ils sont extrapolables à des fonctions dont le domaine de définition n'est ni un intervalle, ni pathologique... à quelques exceptions importantes près. (le domaine de définition de $t \to \dfrac{1}{t}$ n'est pas un intervalle et pourtant rien n'empêche de parler de $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{t}$. Ok ?)

I INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

▶ 1. Fonction en escalier. Intégrale d'une fonction en escalier

Déf. 1 On appelle **subdivision de** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ toute suite finie strictement croissante de réels dont le premier terme est a et le dernier b.

Déf. 2 f est une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est une **fonction en escalier** sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de $[a, b]$ ($a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$) telle que, pour tout élément k de $[\![0, n-1]\!]$, f soit constante sur $]x_k, x_{k+1}[$.

σ est alors une **subdivision de** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ **adaptée à f**.

Nous noterons $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ en escalier sur $[a, b]$.

Prop. 1 f et g sont deux applications de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

• Si f et g sont en escalier sur $[a, b]$ il en est de même pour $|f|$, $f + g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$), $f\,g$, f^n ($n \in \mathbb{N}$), $\mathrm{Max}(f, g)$, $\mathrm{Min}(f, g)$.

• L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est un espace vectoriel réel (pour les opérations usuelles sur les fonctions numériques).

Th. 1 et **déf. 3** f est une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ en escalier sur $[a,b]$.

$\sigma = (x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f et pour tout élément k de $[\![0,n-1]\!]$, λ_k est la valeur de f sur $]x_k, x_{k+1}[$.

Le réel $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k\,(x_{k+1}-x_k)$ ne dépend pas de la subdivision σ de $[a,b]$ adaptée à f choisie.

Ce réel est appelé **intégrale de f sur** $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ et noté $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_{[a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t$.

★ Dans $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, t est une variable muette. On peut donc encore noter cette intégrale : $\displaystyle\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$ ou $\displaystyle\int_a^b f(\heartsuit)\,\mathrm{d}\heartsuit$.

▶ 2. Intégrale d'une fonction continue

Th. 2 et **déf. 4** f est une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

Notons $\mathcal{E}^+(f)$ (resp. $\mathcal{E}^-(f)$) l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui majorent (resp. minorent) f sur $[a,b]$.

Notons $I^+(f)$ (resp. $I^-(f)$) l'ensemble des intégrales des éléments de $\mathcal{E}^+(f)$ (resp. $\mathcal{E}^-(f)$).

• $I^+(f)$ (resp. $I^-(f)$) est une partie non vide et minorée (resp. majorée) de $\mathbb{R}$ donc $I^+(f)$ (resp. $I^-(f)$) possède une borne inférieure (resp. supérieure).

• $\boxed{\operatorname{Sup} I^-(f) = \operatorname{Inf} I^+(f)}$.

Le réel $\operatorname{Sup} I^-(f)$ ou $\operatorname{Inf} I^+(f)$ est **l'intégrale de f sur** $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$. On le note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_{[a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque Les hypothèses sont celles du résultat précédent.

$\mathcal{E}^+(f) = \{\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) \mid f \leqslant \varphi\}$ et $\mathcal{E}^-(f) = \{\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) \mid \varphi \leqslant f\}$.

$I^+(f) = \{\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t;\ \varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ et $f \leqslant \varphi\}$ et $I^-(f) = \{\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t;\ \varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ et $\varphi \leqslant f\}$

Déf. 5 f est une application continue de I dans $\mathbb{R}$. a et b sont deux éléments quelconques de I.

Si $a<b$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'intégrale sur $[a,b]$ de la restriction de f à $[a,b]$!

Par convention si $a=b$: $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et si $a>b$: $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

II PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE

▶ 1. Premières propriétés

Th. 3 **Relation de Chasles** f est une application continue de I dans $\mathbb{R}$. a, b et c sont des éléments de I.

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Th. 4 **Linéarité** f et g sont deux applications continues de I dans $\mathbb{R}$. a et b sont deux éléments de I. λ est un réel.

$$\int_a^b (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cor. $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

L'application qui à tout élément f de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ associe $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

▶ 2. Croissance de l'intégrale

Th. 5 f est une application continue de I dans $\mathbb{R}$. a et b sont deux éléments de I. On suppose que :

1. $\boxed{a \leqslant b}$
2. f est positive sur $[a,b]$

Alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$

Cor. 1 f et g sont deux applications continues de I dans $\mathbb{R}$. a et b sont deux éléments de I. On suppose que :

1. $\boxed{a \leqslant b}$
2. $\forall t \in [a,b],\ f(t) \leqslant g(t)$

Alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$

Cor. 2 f est une application continue de I dans $\mathbb{R}$. a et b sont deux éléments de I. m et M sont deux réels tels que : $m \leqslant M$. On suppose :

1. $\boxed{a \leqslant b}$
2. $\forall t \in [a,b],\ m \leqslant f(t) \leqslant M$.

Alors : $\displaystyle m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a).$

PP Ce dernier résultat rend alors aisé l'encadrement de l'intégrale d'une fonction monotone. Qu'on se le dise et qu'on se l'utilise. Voir à ce propos les compléments.

★ **P** Dans les résultats précédents des inégalités strictes dans les hypothèses donnent des inégalités strictes dans les conclusions. Voir mieux dans les compléments.

Cor. 3 f est une application continue de I dans $\mathbb{R}$. a et b sont deux éléments de I.

On suppose que : $\boxed{a \leqslant b}$.

Alors : $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a) \operatorname*{Max}_{t\in[a,b]} |f(t)|.$

★★★ Il est indispensable avant d'intégrer une inégalité de vérifier que les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant. Il est également indispensable de mentionner cette hypothèse dans sa solution.

★★★ La première chose à faire avant toute majoration ou minoration d'une intégrale est de regarder la position relative des bornes et de se ramener au cas ou elles sont dans l'ordre croissant.

P Pour majorer la valeur absolue d'une intégrale la première étape consiste à vérifier que les bornes sont dans l'ordre croissant et à faire "passer la valeur absolue à l'intérieur " de l'intégrale.

P L'inégalité $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ (avec f continue sur $[a,b]$ et $a \leqslant b$) s'utilise le plus souvent de la gauche vers la droite mais on n'oubliera pas, si nécessaire, de l'utiliser de la droite vers la gauche.

▶ 3. Fonction continue de signe constant et d'intégrale nulle

Th. 6 **SD** f est une application **continue** de I dans $\mathbb{R}$. **a et b sont deux éléments distincts** de I.

On suppose que **f garde un signe constant** sur le segment d'extrémités a et b et que $\boxed{\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t} = \mathbf{0}}$.

Alors f est nulle sur ce segment.

★★★ On se gardera de penser et d'écrire qu'une fonction d'intégrale nulle est nulle.

★★ On est prié de se rappeler que ce théorème contient **quatre hypothèses** importantes.

▶ 4. Cauchy-Schwarz

Th. 7 **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

f et g sont deux applications continues de I dans $\mathbb{R}$ et a et b sont deux éléments de I tels que $a < b$.

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\ \sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}}.$$

★ Cette inégalité est une égalité si et seulement si la famille (f,g) est liée.

▶ 5. Valeur moyenne

Déf. 6 Soit f une application continue de $[a,b]$ $(a<b)$ dans $\mathbb{R}$.

La valeur moyenne de f sur $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ est le réel $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

C'est la valeur de la fonction constante qui a même intégrale que f entre a et b.

Prop. 2 Soit f une application continue de $[a,b]$ $(a<b)$ dans $\mathbb{R}$.

f prend au moins une fois sa valeur moyenne sur $[a,b]$. Autrement dit :

$$\exists c \in [a,b],\ f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

C'est une version très faible du théorème des accroissements finis.

III PRIMITIVES ET INTÉGRALES

▶ 1. Notion de primitive

Déf. 7 D est une partie de $\mathbb{R}$ et f une application de D dans $\mathbb{R}$.

Une **primitive de f sur D** est une application dérivable F de D dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in D,\ F'(x) = f(x).$$

Th. 8 Soit f une application d'une partie D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Si F est une primitive de f sur D, pour tout réel λ, $F + \lambda$ est encore une primitive de f sur D.

2. On suppose que **D est un intervalle** et que f possède une primitive F sur D.

Toutes les primitives de f sur D diffèrent de F d'une constante. Autrement dit on obtient toutes les primitives de f sur D en ajoutant à F les constantes.

Th. 9 I est un **intervalle** de $\mathbb{R}$. f est une application de I dans $\mathbb{R}$ possèdant une primitive sur I. c est un élément de I et λ un réel.

Il existe une primitive de f sur I et une seule qui prend la valeur λ en c.

▶ 2. Le cas des fonctions continues

Th. 10 Soit f une application **continue** d'un intervalle I de $\mathbb{R}$. c est un élément de I et λ est un réel.

- f possède une primitive sur I.
- f possède une primitive sur I et une seule qui prend la valeur λ en c.

Th. 11 Soit f une application continue de I dans $\mathbb{R}$.

- Si F est une primitive de f sur I : $\boxed{\forall (a,b) \in I^2,\ \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)}$.
- **PP** Pour tout élément c de I :

$$\boxed{x \to \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ est la primitive de } f \text{ sur } I \text{ qui prend la valeur } 0 \text{ en } c.}$$

Th. 12 **SD** I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. f est une application continue de I dans $\mathbb{R}$. u est une application dérivable de J dans $\mathbb{R}$ à valeurs dans I. F est une primitive de f sur I et c est un élément de I.

1. $\forall x \in J,\ \displaystyle\int_c^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = F(u(x)) - F(c)$.

2. $\varphi : x \to \displaystyle\int_c^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur J et pour tout x dans J :

$$\varphi'(x) = u'(x) f\big(u(x)\big).$$

Th. 13 **SD** I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. f est une application continue sur I dans R. u et v sont deux applications dérivables de J dans $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{à valeurs dans } I}$. F est une primitive de f sur I.

1. $\forall x \in J,\ \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = F\big(v(x)\big) - F\big(u(x)\big)$.

2. $\psi : x \to \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$ est dérivable sur J et pour tout x dans J :

$$\psi'(x) = v'(x)f\big(v(x)\big) - u'(x)f\big(u(x)\big).$$

★★★ Les points 2 de ces deux derniers résultats ne sont pas dans le programme. On les redémontrera en partant du point 1. Ne pas oublier de $\boxed{\text{justifier la dérivabilité}}$ en utilisant par exemple le théorème de composition des fonctions dérivables. On évitera de dire que φ (resp. ψ) est dérivable comme intégrale d'une fonction continue ! !

▶ 3. Quelques résultats utiles pour obtenir des primitives ou pour calculer des intégrales...

Th. 14 u et v sont deux applications dérivables de I dans $\mathbb{R}$.

- uv est une primitive de $u'v + uv'$ sur I.
- Si v ne s'annule pas sur I, $\dfrac{u}{v}$ est une primitive sur I de $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
- Si n appartient à $\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n+1}\, u^{n+1}$ est une primitive de $u'u^n$ sur I.

Th. 15 u est une application dérivable de I dans $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas sur I.

- $\ln|u|$ est une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ sur I.
- Si n appartient à $\mathbb{Z}$ et si n est diférent de -1, $\dfrac{1}{n+1}\, u^{n+1}$ est une primitive de $u'u^n$ sur I.

Th. 16 u est une application de I dans $\mathbb{R}$ dérivable et strictement positive sur I.

- $\sqrt{u}$ est une primitive de $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ sur I.
- Si α appartient à $\mathbb{R}$ et si α est différent de -1, $\dfrac{1}{\alpha+1}\, u^{\alpha+1}$ est une primitive de $u'u^{\alpha}$ sur I.

P Pour trouver une primitive de $f = \dfrac{u'}{u^{\beta}}$ il est fortement conseillé de partir de $f = u'\, u^{-\beta}$, lorsque $\beta \neq 1$...

▶ 4. Quelques formules de trigonométrie utiles en intégration !

★★★ Il est essentiel de savoir par coeur les formules de trigonométrie et de maitriser la technique de linéarisation pour calculer des intégrales faisant intervenir des fonctions circulaires.

Prop. 3 $\forall a \in \mathbb{R},\ \cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2\,a)}{2}$ $\qquad$ $\forall a \in \mathbb{R},\ \sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2\,a)}{2}$

Prop. 4 a et b sont deux réels.

$\sin a\,\cos b = \dfrac{1}{2}\Big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\Big)$ $\qquad$ $\cos a\,\sin b = \dfrac{1}{2}\Big(\sin(a+b) - \sin(a-b)\Big)$

$\cos a\,\cos b = \dfrac{1}{2}\Big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\Big)$ $\qquad$ $\sin a\,\sin b = \dfrac{1}{2}\Big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\Big)$

Prop. 5 θ est un réels tel que $t = \tan \dfrac{\theta}{2}$ soit défini c'est à dire tel que $\theta \not\equiv \pi\ [2\pi]$.

$\boxed{\sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}}$ $\boxed{\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}}$ $\boxed{\tan\theta = \dfrac{2t}{1-t^2} \text{ si } \theta \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]}$

▸ 5. Primitives usuelles

	f	D	**Une primitive de f sur D**
$n \in \mathbb{N}$	$x \to x^n$	$\mathbb{R}$	$x \to \dfrac{1}{n+1}\, x^{n+1}$
$n \in \mathbb{N} - \{1\}$	$x \to \dfrac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$x \to -\dfrac{1}{n-1}\, \dfrac{1}{x^{n-1}}$
	$x \to \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$x \to \ln\|x\|$
	$x \to \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \to \sqrt{x}$
$\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$x \to x^\alpha$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \to \dfrac{1}{\alpha+1}\, x^{\alpha+1}$
$a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$	$x \to a^x$	$\mathbb{R}$	$x \to \dfrac{1}{\ln a}\, a^x$
	$x \to \dfrac{\ln x}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \to \dfrac{1}{2}\, \ln^2 x$
	$x \to \dfrac{1}{x \ln x}$	$\mathbb{R}_+^* - \{1\}$	$x \to \ln\|\ln x\|$
	$x \to \ln x$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \to x\ln x - x$
	$x \to \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \to \sin x$
	$x \to \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \to -\cos x$
	$x \to 1 + \tan^2 x$	$D_{\tan}$	$x \to \tan x$
	$x \to \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$D_{\tan}$	$x \to \tan x$
	$x \to 1 + \cot^2 x$	$D_{\cot}$	$x \to -\cot x$
	$x \to \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$D_{\cot}$	$x \to -\cot x$
$(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$	$x \to \cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$x \to \dfrac{1}{a}\, \sin(ax+b)$
$(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$	$x \to \sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$x \to -\dfrac{1}{a}\, \cos(ax+b)$

	f	D	**Une primitive de f sur D**
	$x \to \dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \to \arctan x$
$a \in \mathbb{R}_+^*$	$x \to \dfrac{1}{x^2+a^2}$	$\mathbb{R}$	$x \to \dfrac{1}{a} \arctan \dfrac{x}{a}$

Et encore...

	f	D	**Une primitive de f sur D**
	$x \to \tan x$	$D_{\tan}$	$x \to -\ln \vert \cos x \vert$
	$x \to \dfrac{1}{\sin x}$	$D_{\cot}$	$x \to \ln \vert \tan \dfrac{x}{2} \vert$
$a \in \mathbb{R}_+^*$	$x \to \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$	$\mathbb{R}$	$x \to \ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$
	$x \to \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	$x \to \arcsin x$
$a \in \mathbb{R}_+^*$	$x \to \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$]-a,a[$	$x \to \dfrac{1}{a} \arcsin \dfrac{x}{a}$

► 6. Prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$

Les résultats de cette section concerne plus le chapitre calcul différentiel mais leurs démonstrations utilisent la notion de primitive.

Th. 17 Soit f une application de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f' admet une limite finie en b.

Alors f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ à l'intervalle $[a,b]$.

Cor. **PP** Soit f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que :

H1 f est continue sur le segment $[a,b]$;

H2 f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b[$;

H3 f' admet une limite finie ℓ à gauche en b.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $f'(b)=\ell$.

★★ On est prié de faire la différence entre ces deux résultats. Dans le second f est définie en b mais pas dans le premier. Le second résultat n'est pas explicitement du programme mais c'est celui qui est utile dans la pratique !

Th. 18 p est un élément de $\mathbb{N}$ et f une application de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^p$. On suppose que $f^{(p)}$ admet une limite finie en b.

Alors f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^p$ à l'intervalle $[a,b]$.

PP On a des résultats analogues sur $]a,b]$, sur $]a,b[$ et même sur $I-\{x_0\}$. Qu'on se le dise et que l'on se l'utilise.

★★ On est prié de savoir ces résultats par coeur.

► 7. L'équation différentielle $y' + a\,y = 0$

Th. 19 **SD** a est une application continue de l'intervalle I de $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}$ et A est une primitive de a sur I.

Une application f de I dans $\mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle $y' + a\,y = 0$ si et seulement si il existe un (unique) réel λ tel que :

$$f = \lambda\, e^{-A}.$$

Cor. a est une application continue de l'intervalle I de $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}$ et A est une primitive de a sur I.

L'ensemble des applications dérivables f de I dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in I,\ f'(x) + a(x)\,f(x) = 0$ est la droite vectorielle engendrée par e^{-A} dans l'espace vectoriel des applications (dérivables) de I dans $\mathbb{R}$.

IV POUR CALCULER DES INTÉGRALES OU DES PRIMITIVES

► 1. Intégration par parties

Th. 20 Soient u et v deux application de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Si a et b sont deux éléments de I : $\boxed{\displaystyle\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = \big[u(t)\,v(t)\big]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t.}$

PP L'intégration par parties permet, en particulier, de calculer des intégrales du type :

- $\displaystyle\int_a^b P(t)\,e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$ où P est une fonction polynôme (on fait par des intégrations par parties successives "baisser le degré du polynôme").
- $\displaystyle\int_a^b P(t)\,\sin(\alpha t)\,\mathrm{d}t$ (resp. $\displaystyle\int_a^b P(t)\,\sin(\alpha t)\,\mathrm{d}t$) où P est un polynôme (même technique).
- $\displaystyle\int_a^b \cos(\beta t)\,e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_a^b \sin(\beta t)\,e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$ (en intégrant deux fois par parties).

PP De la même manière on peut trouver une primitive pour les fonctions du type $t \to P(t)\,e^{\alpha t}$, $t \to P(t)\,\sin(\alpha t)$, $t \to P(t)\,\cos(\alpha t)$, $t \to \cos(\beta t)\,e^{\alpha t}$, $t \to \sin(\beta t)\,e^{\alpha t}$... ($P$ étant une fonction polynôme).

► 2. Changement de variable

Th. 21 I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. f est une application continue de I dans $\mathbb{R}$ et φ est une application de J dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et à valeurs dans I.

Si a et b sont deux éléments de J :

$$\int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\mathrm{d}u.$$

★★★ Ne surtout pas oublier de parler (et de vérifier) l'aspect $\mathcal{C}^1$ de φ.

Remarques • D'après le programme les changements de variable non affines devront être indiqués. Hum ? ?

• La connaissance de ce résutat est nécessaire mais pas suffisante. Il faut surtout en avoir une bonne pratique.

★★ On peut utiliser le résultat précédent de la droite vers la gauche et réciproquement. Précisons

PP • Dans le premier sens (la nouvelle variable s'exprime en fonction de l'ancienne) :

→ On pose $u = \varphi(t)$ (u est la nouvelle variable).

→ On écrit $\mathrm{d}u = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$; on remplace alors $\varphi'(t)\,f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t$ par $f(u)\,\mathrm{d}u$. C'est la phase délicate car il faut faire apparaitre $\varphi'(t)\,f(\varphi(t))$.

PP Penser à exprimer t en fonction de u pour calculer aisément "dt" en fonction de "du".

→ On termine en remarquant que $t = a$ donne $u = \varphi(a)$ et $t = b$ donne $u = \varphi(b)$.

PP • Dans l'autre sens (l'ancienne variable s'exprime en fonction de la nouvelle).

On part de $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(u)\mathrm{d}u$.

→ On pose $u = \varphi(t)$ (t est la nouvelle variable).

→ On écrit $\mathrm{d}u = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$

→ On cherche a et b tels que φ soit $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle défini par a et b et tels que : $\alpha = \varphi(a)$ et $\beta = \varphi(b)$.

PP • Des considérations de bijection sur φ permettent opportunément de passer d'un cas à l'autre.

PP Quelques morales pour les intégrales du type $\displaystyle\int f(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

Si "$f(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$" est invariant par le changement $\theta \to -\theta$ on pose $u = \cos\theta$.

Si "$f(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$" est invariant par le changement $\theta \to \pi - \theta$ on pose $u = \sin\theta$.

Si "$f(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$" est invariant par le changement $\theta \to \pi + \theta$ on pose $u = \tan\theta$.

Dans les autres cas on pourra poser $u = \tan\theta/2$.

Prop. 6 Soit f une application continue de I dans $\mathbb{R}$.

Si f est paire sur I : $\forall a \in I,\ \displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

Si f est impaire sur I : $\forall a \in I,\ \displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Prop. 7 f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et périodique de période T. a et b sont deux réels.

$\boxed{\displaystyle\int_{a+T}^{b+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}$ et $\boxed{\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t}$.

V FORMULES DE TAYLOR

▶ 1. La formule de Taylor avec reste intégral

Th. 22 **Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n**

a est un élément de I et f est une application de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ou encore :

$$\boxed{\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Cor. I et un intervalle de $\mathbb{R}$ qui contient 0 et f est une application de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

$$\boxed{\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\, f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.}$$

▶ 2. La formule de Taylor-Lagrange

Th. 23 **Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n**

a est un élément de I et f est une application de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Pour tout élément x de $I - \{a\}$, il existe un élément c appartenant à $]a, x[$ ou $]x, a[$ tel que :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(c)$$

ou :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(c).}$$

★★★ Pour n et a fixés, il est essentiel de remarquer que c dépend de x.

▶ 3. L'inégalité de Taylor-Lagrange

Th. 24 **Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n**

a est un élément de I et f est une application de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

$$\boxed{\forall x \in I,\ \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(a)\right| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \operatorname*{Max}_{u \in [a,x]} |f^{(n+1)}(u)|.}$$

P Après avoir écrit l'inégalité de Taylor-Lagrange on essaie le plus souvent de trouver le max ou plus modestement d'en trouver un majorant raisonnable.

▶ 4. La formule de Taylor-Young

Th. 25 **La formule de Taylor-Young**

a est un élément de I et f est une application de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$. Au voisinage de a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big).$$

Ainsi f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de a dont la partie régulière est :

$x \to \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

Cor. I et un intervalle de $\mathbb{R}$ qui contient 0 et f est une application de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$. Au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n).$$

Ainsi f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 dont la partie régulière est :

$x \to \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$.

Th. 26 **Les cinq développements limités du programme au voisinage de 0**.

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^n) \qquad \ln(x+1) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + \mathrm{o}(x^n)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) \text{ ou } \mathrm{o}(x^{2n+2}) \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}(x^{2n}) \text{ ou } \mathrm{o}(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

Soit encore :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}(x^n) \qquad \ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) \text{ ou } \mathrm{o}(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^{2n}) \text{ ou } \mathrm{o}(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

▶ 5. Remarques

PP La formule de Taylor avec reste intégral, la formule de Taylor-Lagrange et l'inégalité de Taylor-Lagrange sont très utiles pour obtenir des sommes de séries, pour majorer des restes de séries, pour développer des fonctions en séries entières, pour établir des inégalités...

PP La formule de Taylor-Young est essentielle pour construire des développements limités.

PP Pour faire un développement limité de $x \to f(x)$ au voisinage de a on peut se ramener en 0 en posant $y = x - a$.

VI SOMMES DE RIEMANN

▸ 1. Définition

Prop. 8 f est une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. $\sigma = (x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une subdivision de $[a,b]$.

Pour tout élément k de $[\![0,n-1]\!]$, ξ_k est un élément de l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$.

Le réel $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}-x_k)\, f(\xi_k)$ est la **somme de Riemann** de f associée à la subdivision σ et à la suite $(\xi_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$.

Prop. 9 f est une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$ on pose $x_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}\cdot$

• $\sigma = (x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une subdivison de $[a,b]$.

• Les sommes de Riemmann de f associées à la subdivision σ et aux suites $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

▸ 2. Le théorème fondamental

Th. 27 Soit f une application $\boxed{\textbf{continue}}$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cor. Soit f une application $\boxed{\textbf{continue}}$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

P Ces résultats sont très précieux pour obtenir des limites de suites. Même en probabilités...

VII INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX

▸ 1. Définition d'une fonction continue par morceaux

Déf. 8 Soit f est une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. f est **continue par morceaux** sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$ $(a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$ telle que, pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$:

- f est continue en tout point de $]x_k, x_{k+1}[$
- f admet une limite finie à droite en x_k et une limite finie à gauche en x_{k+1}.

(le tout revient à dire que la restriction de f à $]x_k, x_{k+1}[$ se prolonge en une fonction continue sur $[x_k, x_{k+1}]$).

On dit alors que σ est une **subdivision adaptée** à f.

On notera $\mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ l'ensemble des applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ continues par morceaux sur $[a,b]$.

Déf. 9 f est une application de I dans $\mathbb{R}$.

f est **continue par morceaux** sur I si pour tout segment $[a,b]$ contenu dans I, la restriction de f à $[a,b]$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.

On notera $\mathcal{CM}\big(I,\mathbb{R}\big)$ l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$ continues par morceaux sur I.

▸ 2. Une caractérisation

Th. 28 Soit f est une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. f est **continue par morceaux** sur $[a,b]$ si et seulement si : il existe une partie **finie** D de $[a,b]$ (éventuellement vide) telle que f soit continue en tout point de $[a,b]-D$ et possède une limite finie à droite et à gauche en tout point de D (où cela est raisonnable... penser aux bornes).

▸ 3. Quelques propriétés

Prop. 10 Toute fonction en escalier sur $[a,b]$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.

Toute application continue de I dans $\mathbb{R}$ est continue par morceaux sur I.

Prop. 11 Toute application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, continue par morceaux sur $[a,b]$, est bornée sur $[a,b]$.

Prop. 12 Si f et g sont applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ continues par morceaux sur $[a,b]$, il existe une subdivision de $[a,b]$ adaptée à la fois à f et à g.

Th. 29 λ est un réel, f et g sont deux applications de I dans $\mathbb{R}$ continues par morceaux sur I.

$|f|$, f^n $(n\in\mathbb{N})$, $\lambda f + g$, $f\times g$, $\mathrm{Max}(f,g)$ et $\mathrm{Min}(f,g)$ sont des fonctions continues par morceaux sur I.

Cor. $\Big(\mathcal{CM}\big(I,\mathbb{R}\big),+,\cdot\Big)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

▶ 4. Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Th. 30 et **déf. 10** Soit f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ continue par morceaux sur $[a,b]$.

Soit $\sigma=(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ une subdivision adaptée à f. Pour tout k dans $[\![0,n-1]\!]$ on note $\overline{f_k}$ le prolongement par continuité de la restriction de f à $]x_k,x_{k+1}[$.

La somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\overline{f_k}(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas de la sudivision σ, de $[a,b]$, adaptée à f choisie.

On l'appelle l'intégrale de f entre a et b et on la note encore $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Si f est en escalier sur $[a,b]$ ou si f est continue sur $[a,b]$ cette intégrale coïncide avec celle définie plus haut.

Déf. 11 f est une application de I dans $\mathbb{R}$ continue par morceaux. a et b sont deux éléments quelconques de I.

Si $a<b$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'intégrale sur $[a,b]$ de la restriction de f à $[a,b]$!

Par convention si $a=b$: $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=0$ et si $a>b$: $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=-\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

▶ 5. Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux

Remarque Beaucoup de propriétés de l'intégrale des fonctions continues sont encore vraies pour les fonctions continues par morceaux. En particulier :

• Chasles. • La linéarité. • La croissance. • Cauchy-Schwarz.

Ajoutons :

Prop. 13 f et g sont deux applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ continues par morceaux sur $[a,b]$.

1. On ne change pas $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ en modifiant f en un nombre fini de points de $[a,b]$.
2. Si f et g coïncident sur $[a,b]$ sauf peut-être en un nombre fini de points alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

▶ 6. Quelques différences importantes

★★ Une fonction continue par morceaux peut être de signe constant et d'intégrale nulle sans être nulle.

Th. 31 f est application de I dans $\mathbb{R}$ continue par morceaux. c est un élément de I.

$x\to\displaystyle\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur I.

Th. 32 I est un intervalle de $\mathbb{R}$. f est application de I dans $\mathbb{R}$ continue par morceaux. c est un élément de I.

1. $h:x\to\displaystyle\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable en tout point ou f est continue.
2. Si f est continue en un point x de I : $h'(x)=f(x)$.

VIII SAVOIR FAIRE

- Calculer des intégrales simples.
- Majorer, minorer, encadrer une intégrale.
- Utiliser les variations d'une fonction pour encadrer son intégrale.
- Faire une intégration par parties.
- Faire un changement de variable.
- Etudier la dérivabilité et calculer la dérivée de $x \to \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Montrer et utiliser Cauchy-Schwarz. Etudier le cas d'égalité pour des fonctions continues.
- Utiliser des sommes de Riemann pour calculer des limites de suites.
- Utiliser les différentes formules de Taylor et l'inégalité de Taylor-Lagrange.
- Utiliser le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$.
- Majorer l'erreur dans une méthode de calcul approché d'une intégrale.
- Etudier une fonction définie par une intégrale.
- Dériver sous le signe somme.
- Permuter une somme infinie et une intégrale.
- Montrer et utiliser que, lorque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(\alpha t)\,\mathrm{d}t = 0$.
- Montrer et utiliser que, lorque f est continue (ou bornée) sur $[0,1]$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t)\,t^n\,\mathrm{d}t = 0$.
- Montrer qu'une fonction est continue par morceaux et calculer son intégrale sur un segment.
- Etudier un endomorphisme défini à l'aide d'une intégrale.
- Encadrer une somme (finie ou infinie) en utilisant des intégrales.
- Maitriser la technique de linéarisation pour calculer des intégrales faisant intervenir des fonctions circulaires.

IX UN BREF RÉSUMÉ DE FAUTES À NE PAS FAIRE

★ Ecrire $\forall t \in [a,b],\ f(t) \leqslant g(t) \iff \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

★ Ecrire une séquence du type : $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$

★ Ecrire $a \leqslant b$ et $f(t) \leqslant g(t)$ donnent $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ à la place de $a \leqslant b$ et $\forall t \in [a,b],\ f(t) \leqslant g(t)$ donnent $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

★ $x \to \displaystyle\int_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable car f est continue ou comme intégrale d'une fonction continue.

★ Ecrire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ sans démonstration.

★ Ecrire $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^x t^{k-1}\,\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{k=1}^{+\infty}t^{k-1}\,\mathrm{d}t$ (ou plus généralement $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\int_a^b f_k(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b\sum_{k=1}^{+\infty}f_k(t)\,\mathrm{d}t$) sans démonstration.

★ $\displaystyle\int_0^x(-t)^{p-1}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{(-t)^p}{p}\right]_0^1$ (avec p dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}$).

★ $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=0$ donc f est nulle sur $[a,b]$.

★ La dérivée de $x\to F(x)-F(0)$ est $x\to F'(x)-F'(0)$. La dérivée de $x\to\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est $x\to f(x)-f(a)$.

★ Une primitive de $|f'|$ est $|f|$.

★ $\displaystyle\int_a^b|f'(t)|\,\mathrm{d}t=|f(b)|-|f(a)|$ ou $\displaystyle\int_a^b|f'(t)|\,\mathrm{d}t=|f(b)-f(a)|$.

★ Une primitive de $t\to e^{t^2}$ est : $t\to\dfrac{e^{t^2}}{2t}$.

★ n est un élément de $\mathbb{N}$. $I_n=\displaystyle\int_0^\pi\cos(nt)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi=0$ (vaut pour $n\geqslant 1$; $I_0=\pi$).

X COMPLÉMENTS

▶ 1. Moins que rien

Il est souvent préférable de “primitiviser” $t\to t-\alpha$ en $t\to\dfrac{(t-\alpha)^2}{2}$ plutôt qu'en $t\to\dfrac{t^2}{2}-\alpha t$.

▶ 2. Une banalité bien utile

Th. 33 **PP** **SD** Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t=0}$.

▶ 3. Encadrement de l'intégrale d'une fonction monotone

Prop. 14 **P** f une application continue ou continue par morceaux de I dans $\mathbb{R}$. a et b sont deux éléments de I.

Si f est croissante sur I et si $a\leqslant b$ alors $(b-a)\,f(a)\leqslant\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant(b-a)\,f(b)$.

Si f est décroissante sur I et si $a\leqslant b$ alors $(b-a)\,f(b)\leqslant\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant(b-a)\,f(a)$.

Prop. 15 **P** f une application continue ou continue par morceaux de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que k est un élément de I tel que $k+1$ soit encore dans I.

Si f est croissante sur I alors $f(k)\leqslant\displaystyle\int_k^{k+1}f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant f(k+1)$.

Si f est décroissante sur I alors $f(k+1)\leqslant\displaystyle\int_k^{k+1}f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant f(k)$.

P Ce résultat est très utile pour encadrer des sommes partielles de séries, des restes de séries convergentes, ...

▶ 4. Des intégrales usuelles

Prop. 16 $\boxed{\text{SD}}$ Si p et q sont deux éléments de $\mathbb{N}$: $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$.

Prop. 17 $\boxed{\text{SD}}$ Si p et q sont deux éléments de $\mathbb{N}$:

$$\int_0^\pi \cos pt\ \cos qt\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \pi & \text{si } p=q=0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } p=q\neq 0 \\ 0 & \text{si } p\neq q \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_0^\pi \sin pt\ \sin qt\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } p=q=0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } p=q\neq 0 \\ 0 & \text{si } p\neq q \end{cases}$$

.

★ Il importe avant tout de savoir qu'il faut distinguer trois cas.

Prop. 18 $\boxed{\text{SD}}$ **Wallis**. $\forall n\in\mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,\mathrm{d}t$ ou $\forall n\in\mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,\mathrm{d}t$! !

- $\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ I_n = \dfrac{n-1}{n}\,I_{n-2}$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ I_n\,I_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.
- $\forall p\in\mathbb{N},\ I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}\,(p!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!}$.
- $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$

▶ 5. Lemme de Riemann-Lebesgue

Th. 34 $\boxed{\text{PP}}$ $\boxed{\text{SD}}$ f est une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(\alpha t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\alpha\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(\alpha t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

$$\lim_{\alpha\to-\infty}\int_a^b f(t)\sin(\alpha t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\alpha\to-\infty}\int_a^b f(t)\cos(\alpha t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

▶ 6. Encore la stricte croissance

Du banal.

Prop. 19 f est une application continue de I dans $\mathbb{R}$. a et b sont deux éléments de I. On suppose que :

1. $\boxed{a<b}$
2. f est strictement positive sur $[a,b]$

Alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$

Prop. 20 f et g sont deux applications continues de I dans $\mathbb{R}$. a et b sont deux éléments de I. On suppose que :

1. $\boxed{a<b}$
2. $\forall t\in[a,b],\ f(t)<g(t)$

Alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t < \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Le résultat intéressant.

Prop. 21 f est une application continue de I dans $\mathbb{R}$. a et b sont deux éléments de I. On suppose que :

1. $\boxed{a < b}$
2. f est positive sur $[a, b]$
3. f n'est pas identiquement nulle sur $[a, b]$ (c'est à dire : $\exists x_0 \in [a, b],\ f(x_0) > 0$).

Alors : $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0.$$

Prop. 22 f et g sont deux applications continues de I dans $\mathbb{R}$. a et b sont deux éléments de I. On suppose que :

1. $\boxed{a < b}$
2. $\forall t \in [a, b],\ f(t) \leqslant g(t)$
3. $\exists x_0 \in [a, b],\ f(x_0) < g(x_0)$.

Alors : $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t < \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

▸ 7. Intégrations par parties itérées

Th. 35 n est un élément de $\mathbb{N}^*$. u et v sont deux applications de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$. a et b sont deux éléments de I. Alors :

$$\int_a^b u(t)\,v^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\, u^{(k)}(t)\, v^{(n-k-1)}(t)\Big]_a^b + (-1)^n \int_a^b u^{(n)}(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t.$$

▸ 8. Calcul de primitives classiques

Prop. 23 **P** P est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$. α est un réel non nul.

Il existe un élément Q de $\mathbb{R}_n[X]$ (que l'on peut obtenir par identification) tel que

$$x \to Q(x)\ e^{\alpha x} \text{ soit une primitive de } x \to P(x)\ e^{\alpha x}.$$

Prop. 24 **P** α et β sont deux réels non simultanément nuls.

Il existe deux constantes A et B (que l'on peut obtenir par identification) telles que

$$x \to [A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)]\ e^{\alpha x} \text{ soit une primitive de } x \to \sin(\beta x)\ e^{\alpha x}.$$

Même chose pour $x \to \cos(\beta x)\ e^{\alpha x}$.

▸ 9. Premier théorème de la moyenne

Th. 36 f et g sont deux applications continues de I dans $\mathbb{R}$. a et b sont deux éléments de I.

Si g garde un signe constant sur l'intervalle déterminé par a et b alors il existe un élément c de cet intervalle tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

▸ 10. Beaucoup plus sur les sommes de Riemann

Déf. 12 Le **pas** de la subdivision $(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de $[a, b]$ est le réel $\underset{0\leqslant k\leqslant n-1}{\mathrm{Max}}(x_{k+1} - x_k)$.

Th. 37 Les sommes de Riemann d'une fonction continue sur un segment convergent vers l'intégrale de la fonction sur le segment lorsque le pas de la subdivision tend vers 0. Précisons.

Soit f une application **continue** de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout réel ε strictement positif il existe un réel η strictement positif tel que pour toute subdivision $\sigma = (x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$ de pas strictement inférieur à η et pour toute suite $(\xi_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ de réels telle que $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$:

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\, f(\xi_k) \right| < \varepsilon.$$

► 11. Validité des formules de Taylor

★ La formule de Taylor-Young vaut encore en supposant simplement que f est n fois dérivable en a ; c'est à dire que f est $n-1$ fois dérivable sur un voisinage de a et que $f^{(n-1)}$ est dérivable en a.

La formule de Taylor-Lagrange vaut encore en supposant simplement que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $n+1$ fois dérivable sur l'intérieur de I.

XI COMPLÉMENTS (suite) : VALEUR APPROCHÉE D'UNE INTÉGRALE

Dans ce qui suit f est une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

► 1. Généralités

But Dans la mesure ou on ne sait pas calculer $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ on se propose d'en trouver une valeur approchée.

Le principe On considère une subdivision $\sigma = (x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$ ($a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$).

Pour tout élément k de $[\![0, n-1]\!]$, on "remplace" f sur $[x_k, x_{k+1}]$ par une fonction "plus simple" φ_k dont on sait calculer l'intégrale sur ce segment. On pose :

$$I_\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k(t)\,\mathrm{d}t.$$

On prend alors I_σ comme valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Pratiquement Le plus souvent on se fixe n dans $\mathbb{N}^*$ et on considère la subdivision $(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$ définie par :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ x_k = a + k\frac{b-a}{n}\cdot$$

Pour tout élément k de $[\![0, n-1]\!]$, on "remplace" f sur $[x_k, x_{k+1}]$ par une fonction constante (méthode des rectangles ou du point moyen), affine (méthode des trapèzes) ou polynômiale de degré inférieur ou égal à deux (méthode de Simpson).

Les exigences Il importe avant tout de savoir calculer simplement I_σ et d'avoir une idée sur l'erreur que l'on commet en remplaçant $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par I_σ.

Dans la suite n est dans $\mathbb{N}^*$ et $\sigma = (x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est la subdivision de $[a,b]$ définie par $\forall k \in [\![0,n]\!],\ x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}\cdot$

C'est la subdivision de $[a,b]$ qui partage cet intervalle en n intervalles de même longueur $\dfrac{b-a}{n}\cdot$

▸ 2. Méthode des rectangles

Pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$, on considère la fonction φ_k (resp. $\widehat{\varphi}_k$), constante sur $[x_k, x_{k+1}]$ et qui coïncide avec f en x_k (resp. en x_{k+1}). On pose : $R_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k(t)\,\mathrm{d}t$ et $\widehat{R}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \widehat{\varphi}_k(t)\,\mathrm{d}t$.

1. $R_n = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ et $\widehat{R}_n = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$.

2. f étant une fonction continue sur $[a, b]$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} \widehat{R}_n = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

3. **SD** Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et si $M_1 = \displaystyle\operatorname*{Max}_{t\in[a,b]} |f'(t)|$:

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - R_n\right| \leqslant \frac{M_1(b-a)^2}{2n} \quad \text{et} \quad \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \widehat{R}_n\right| \leqslant \frac{M_1(b-a)^2}{2n}\cdot$$

4. Si f est croissante (resp. décroissante) sur $[a, b]$: $R_n \leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \widehat{R}_n$ (resp. $\widehat{R}_n \leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant R_n$).

▸ 3. Le point moyen

Pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$, on considère la fonction φ_k, constante sur $[x_k, x_{k+1}]$ et qui coïncide avec f en $\dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}\cdot$

On pose : $M_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k(t)\,\mathrm{d}t$.

1. $M_n = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + (2k+1)\frac{b-a}{2n}\Big)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} M_n = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ et si $M_2 = \displaystyle\operatorname*{Max}_{t\in[a,b]} |f''(t)|$ alors : $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - M_n\right| \leqslant \dfrac{M_2(b-a)^3}{24n^2}\cdot$

▸ 4. La méthode des trapèzes

Pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$, on considère la fonction φ_k, affine sur $[x_k, x_{k+1}]$ et qui coïncide avec f en x_k et x_{k+1}.

On pose : $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k(t)\,\mathrm{d}t$.

1. $T_n = \dfrac{R_n + \widehat{R}_n}{2} = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big)\right]\cdot$

2. f étant continue sur $[a, b]$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ et si $M_2 = \displaystyle\operatorname*{Max}_{t\in[a,b]} |f''(t)|$ alors : $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - T_n\right| \leqslant \dfrac{M_2(b-a)^3}{12n^2}\cdot$

► 5. Simpson

Pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$, on considère la fonction φ_k, polynômiale de degré au plus 2 sur $[x_k, x_{k+1}]$ et qui coïncide avec f en x_k, $\dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$ et x_{k+1}. On pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k(t)\,\mathrm{d}t$.

1. $S_n = \dfrac{1}{6}(R_n + \widehat{R}_n + 4M_n) = \dfrac{b-a}{6n}\Big[\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}\Big)\Big]$.

2. f étant continue sur $[a, b]$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Si f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a, b]$ et si $M_4 = \displaystyle\operatorname*{Max}_{t\in[a,b]} |f^{(4)}(t)|$ alors : $\Big|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - T_n\Big| \leqslant \dfrac{M_4(b-a)^5}{2880n^4}$.