

# RÉDUCTION 1

**P** mentionne des résultats particulièrement utiles et souvent oubliés dans la pratique de la réduction ...

★ mentionne des erreurs à ne pas faire où des hypothèses importantes ou des mises en garde.

**SF** mentionne des savoirs faire.

**N1** repère un exercice relativement simple.

**N2** repère des exercices un peu plus plus difficiles.

Sauf mention du contraire dans la suite  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Quelques rappels qui ne dispense pas de revoir son cours à fond.**

► L'aspect théorique pour les endomorphismes.

$f$  est un endomorphisme de  $E$ .  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  sont  $p$  valeurs propres **distinctes** de  $f$ .

Pour tout  $i$  dans  $\llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $u_i$  est un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur  $\lambda_i$  et  $\mathcal{B}_i$  est une base du sous-espace propre  $F_{\lambda_i}$  associé à  $\lambda_i$ .

1.  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est une famille libre de  $E$ .
2. " $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$ " est une famille libre de  $E$ .
3.  $F_{\lambda_1}, F_{\lambda_2}, \dots, F_{\lambda_p}$  sont en somme directe.

On suppose que  $E$  est de dimension  $n$  non nulle.  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

1.  $f$  possède au plus  $n$  valeurs propres distinctes.
2. La somme des dimensions des sous-espaces propres de  $f$  ne dépasse pas  $n$ .

$E$  est de dimension finie non nulle et  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

Les assertions suivantes sont équivalentes.

- i)  $f$  est diagonalisable.
- i') Il existe une base de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $f$ .
- i'') Il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $M_{\mathcal{B}}(f)$  soit une matrice diagonale.
- ii)  $E$  est la somme (directe) des sous-espaces propres de  $f$ ; c'est à dire :  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp } f} \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$ .
- iii) La somme des dimensions des sous-espaces propres de  $f$  est égale à la dimension de  $E$ .

► L'aspect pratique pour les endomorphismes.

**PPP**  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  de dimension  $n$  non nulle.

$f$  est un endomorphisme **diagonalisable** de  $E$ .

1. On obtient une base de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $f$  en concaténant une base de chacun des sous-espaces propres de  $f$ .
2. Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $f$  respectivement associés aux valeurs propres  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}$  est la matrice diagonale  $\text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ .

► L'aspect théorique pour les matrices.

**Des conditions nécessaires et suffisantes** pour qu'une matrice soit diagonalisable.

$A$  est une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Les assertions suivantes sont équivalentes.

- i)  $A$  est diagonalisable.
- i')  $A$  est semblable à une matrice diagonale.
- ii)  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  est la somme (directe) des sous-espaces propres de  $A$ .
- iii) La somme des dimensions des sous-espaces propres de  $A$  est égale à  $n$ .
- iv) Il existe une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  constituée de vecteurs propres de  $A$ .
- v)  $A$  est la matrice d'un endomorphisme diagonalisable.

► L'aspect pratique pour les matrices.

**PPP** Soit  $A$  une matrice **diagonalisable** de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

1. On obtient une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  constituée de vecteurs propres de  $A$  en concaténant une base de chacun des sous-espaces propres de  $A$ .
2. Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  constituée de vecteurs propres de  $A$  respectivement associés aux valeurs propres  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  et si  $P$  est la matrice de passage de la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  à la base  $\mathcal{B}$  alors :

$$P^{-1}AP \text{ est la matrice diagonale } \text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

**P** Soit  $A$  une matrice **diagonalisable** de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Ainsi il existe une matrice inversible  $P$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et une matrice diagonale  $D = \text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  telles que  $P^{-1}AP = D$ .

On note, pour tout  $j$  élément de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $C_j$  la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $P$ .

Alors  $(C_1, C_2, \dots, C_n)$  est une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  constituée de vecteurs propres de  $A$  respectivement associés aux valeurs propres  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ .

**Les savoir faire les plus usuels.**

**SF 1** Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres d'un endomorphisme et d'une matrice.

**SF 2** Construire une base de vecteurs propres.

**SF 3** Diagonaliser un endomorphisme ou une matrice.

**SF 4** Utiliser un polynôme annulateur d'un endomorphisme ou d'une matrice dans la recherche des valeurs propres.

**SF 5** Calculer la puissance  $p^{\text{ème}}$  d'une matrice.

**SF 6** Trouver les racines  $p^{\text{ème}}$  d'une matrice.

**Exercices d'entraînement en dimension 2 ou 3.**

**Exercice 1** **N1-** **Diagonalisation d'un endomorphisme.**

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est une base du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ .  $f$  est l'endomorphisme de  $E$  de matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$  dans  $\mathcal{B}$ .

Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $f$ . Diagonaliser  $f$  si cela est possible.

**Exercice 2** **N1** **Calcul des puissances d'une matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .**

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $A$ .  $A$  est-elle diagonalisable ?

Calculer  $A^n$  pour tout élément  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

**Exercice 3** **N1-** **Diagonalisation d'une matrice de permutation et d'une matrice circulante.**

**Oral ESCP 1997 2-4.**

$a$ ,  $b$  et  $c$  sont trois éléments de  $\mathbb{C}$ .  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ . Diagonaliser  $A$  et  $M$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ .

*Thème abordé dans oral ESCP 1999 2-8 avec une application en probabilité, LYON 1991 MI Pb 1 (à l'ordre 4). On trouve dans HEC 2009 des matrices circulantes dans l'étude de suites définies par une récurrence linéaire.*

*Voir le cas général un peu plus loin.*

**Exercice 4** **N1-** **QSP ESCP 2011.**

$x$ ,  $y$  et  $z$  sont trois réels.  $A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 2 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est-elle diagonalisable ?

**Exercice 5** **N1-** **La réduction au service d'une suite définie par une relation de récurrence linéaire d'ordre 3.**

On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par :  $u_0 = -4$ ,  $u_1 = -1$ ,  $u_2 = 0$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = \frac{1}{3}(u_{n+2} + 3u_{n+1} - u_n).$$

Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , on pose :  $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ .

Déterminer une matrice  $A$  telle que, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  :  $U_{n+1} = AU_n$ . Trouver une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de  $A$  et déterminer les coordonnées de  $U_0$  dans cette base.

En déduire  $U_n$ , puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .

*Thème abordé dans ECRICOME 1994 Pb partie 2, dans oral ESCP 1997 2-22 avec les suite réelles  $(x_n)$  vérifiant  $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+4} = -3x_{n+3} + 4x_{n+2} + 3x_{n+1} - 2x_n$ , dans ESSEC MIII 2003.*

**Exercice 6** **N1-** **La réduction au service d'une suite définie par une relation de récurrence linéaire d'ordre 3 again. ESSEC MIII Éco 2003 Partie I.**

Soit  $a$  un nombre réel. On note  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  l'ensemble des suites réelles définies sur  $\mathbb{N}$ , et  $F$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  formé des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 3a u_{n+1} + (1 - 3a) u_n.$$

( L'objet de ce problème est l'étude de l'ensemble  $F$  ) .

### I. Étude du cas particulier $a = 1$ .

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par ses trois premiers termes  $u_0, u_1, u_2$ , et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$  et on note  $M$  la matrice carrée  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Reconnaître, pour tout entier naturel  $n$ , le produit  $M X_n$ .

En déduire l'expression de  $X_n$  en fonction des matrices  $M$ ,  $X_0$  et de l'entier naturel  $n$ .

2. a) Déterminer les valeurs propres de la matrice  $M$  et leur sous-espace propre associé.

b) La matrice  $M$  est-elle diagonalisable ?

3. On note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à  $M$ , c'est-à-dire tel que  $M$  soit la matrice de  $f$  dans la base canonique  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$ .

a) Déterminer une base  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  telle que la matrice  $T$  de  $f$  dans  $\mathcal{B}'$  vérifie  $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et que les vecteurs  $e'_1, e'_2, e'_3$  aient respectivement pour première composante 1, 1 et 0.

b) Déterminer, pour tout entier naturel  $n$ , l'expression de  $T^n$ .

4. Soit  $P$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ .

Exprimer  $M$  en fonction de  $T$ ,  $P$  et  $P^{-1}$ , puis  $M^n$  en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel  $n$ .

5. a) Calculer  $P^{-1}$  (les calculs devront figurer sur la copie).

b) Pour tout entier naturel  $n$ , calculer les coefficients de la première ligne de  $M^n$  ; en déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $u_0, u_1, u_2$  et de l'entier naturel  $n$ .

**Exercice 7**

**N1**

Trouver  $a, b, c, a', b'$  et  $c'$  pour que  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a' \\ 1 & b & b' \\ 1 & c & c' \end{pmatrix}$  admette  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  pour vecteurs propres.

**Exercice 8**

**N1**

**Réduction d'une matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  avec paramètre.**

$t$  est dans  $\mathbb{R}$  et  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$ .  $A$  est-elle diagonalisable ?

**Exercice 9**

**N1**

**Réduction d'un endomorphisme d'endomorphismes.**

Nous reviendrons sur ce sujet dans le conducteur 2.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  est une base de  $E$  espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

$u$  est l'endomorphisme de  $E$  de matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  dans  $\mathcal{B}$ .

Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de  $u$ .

Q2. Pour tout  $f$  dans  $\mathcal{L}(E)$ , on pose :  $\varphi(f) = u \circ f$ .

Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{L}(E)$ . Trouver ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

---

**Exercice 10**   **N1**   **Éléments propres d'une matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  avec paramètre. ESCP 2000 MIII**  
**E.**

$\alpha$  est un réel et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est une base d'une  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ .

On note  $\Phi_\alpha$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 2 - \alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ 2 & \alpha - 2 & \alpha + 1 \end{pmatrix}$$

**Q1** Montrer que 1 est valeur propre de  $\Phi_\alpha$  et déterminer, suivant les valeurs de  $\alpha$ , une base du sous-espace propre associé (3 cas :  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 2$ , ...).

**Q2** On pose  $f_1 = e_1 + e_2 - e_3$  et  $f_2 = e_1 + e_2 - 2e_3$  et on note  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $f_1$  et  $f_2$ .

a) Montrer que  $(f_1, f_2)$  est une base de  $F$ .

b) Montrer que  $\phi_\alpha(f_1)$  et  $\phi_\alpha(f_2)$  sont des éléments de  $F$ .

En déduire que  $F$  est stable par  $\Phi_\alpha$  c'est à dire que  $\forall u \in F, \Phi_\alpha(u) \in F$ .

Soit  $\widehat{\Phi}_\alpha$  l'endomorphisme de  $F$  induit par  $\Phi_\alpha$  (ainsi :  $\forall v \in F, \widehat{\Phi}_\alpha(v) = \Phi_\alpha(v)$ ).

Donner la matrice de  $\widehat{\Phi}_\alpha$  dans la base  $(f_1, f_2)$ .

**Q3** Montrer que  $\Phi_\alpha$  admet la valeur propre  $\alpha - 1$  et que l'on peut trouver un vecteur propre associé  $f_3$  qui ne dépend pas de  $\alpha$ .

**Q4** a) Montrer que  $(f_1, f_2, f_3)$  est une base de  $E$  et trouver la matrice de  $\Phi_\alpha$  dans cette base.

b) Préciser l'ensemble des valeurs propres de  $\Phi_\alpha$ .  $\Phi_\alpha$  est-il diagonalisable ?

---

**Exercice 11**   **N1**   **"Triangularisation" simultanée de deux endomorphismes.**

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $E$ .  $f$  et  $g$  sont les endomorphismes de  $E$  ayant respectivement pour matrices dans la base  $\mathcal{B}$  :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de  $f$  et  $g$ .

Q2. Trouver une base  $\mathcal{B}'$  de  $E$  par rapport à laquelle les matrices de  $f$  et  $g$  sont triangulaires.

Donner  $M_{\mathcal{B}'}(f)$  et  $M_{\mathcal{B}'}(g)$ .

---

**Exercice 12**   **N2**   **Une petite QSP d'HEC 2010**

Q1. La matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est-elle diagonalisable ?

Q2. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 et  $u$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $u^2$  soit un projecteur de rang égal à 1.

a) Montrer que 0 est valeur propre de  $u$  et que  $u$  possède une autre valeur propre, égale à 1 ou à  $-1$ .

b) Montrer que si  $u$  admet 1 pour valeur propre et n'est pas lui-même un projecteur, il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est  $A$ .

► Une remarque sur les matrices semblables.

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Pour montrer qu'elles sont semblables lorsque l'on ne trouve pas facilement une matrice inversible  $P$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $B = P^{-1}AP$  on procède le plus souvent de la manière suivante.

On considère l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{K}^n$  dont la matrice dans la base canonique  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{K}^n$  est  $A$  et on montre l'existence d'une base  $\mathcal{B}'$  de  $\mathbb{K}^n$  telle que la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$  soit  $B$ .

Pour montrer l'existence de  $\mathcal{B}'$  il convient le plus souvent de faire une analyse. Dans cette analyse on part d'une base  $\mathcal{B}'$  solution et on dégage le maximum de propriétés sur les éléments de  $\mathcal{B}'$ .

Vient alors le moment de la synthèse où l'on construit une base solution en s'appuyant sur l'analyse. Il convient de clairement indiquer le moment où l'analyse s'arrête et où la synthèse commence. Si l'on est très pressé on peut se contenter de ne rédiger que la synthèse...

**Exercice 13**   **N1**   **Matrices semblables 1.**

Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

$A$  est-elle diagonalisable ?

Q2. Montrer que  $A$  est semblable à  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $B^n$  et  $A^n$  pour tout  $n$  dans  $\mathbb{Z}$ .

**Exercice 14**   **N1**   **Matrices semblables 2.**

Q1.  $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $A$  est semblable à  $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

Q2. Calculer  $A^n$  pour tout  $n$  dans  $\mathbb{Z}$ .

**Exercice 15**   **N1**   **Matrices semblables 3.**

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$  est un élément de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ .

Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de  $A$ . Montrer que  $A$  est semblable à  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

Q2. Calculer  $A^n$  pour  $n$  dans  $\llbracket 2, +\infty[$ .

**Exercice 16**   **N1**   **Matrices semblables 4.**

Q1. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  dans  $\mathbb{C}$ .

Q2. Calculer  $A^2$  et  $A^4$ .

Q3. Montrer que  $A$  est semblable à  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 17**   **N1**   **Racines carrées d'une matrice.**

Q1.  $C = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Soit  $D$  un élément de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Montrer que si  $D$  commute avec  $C$  :  $D$  est diagonale.

En déduire que si  $D^2 = C$  alors  $D$  est diagonale.

Q2. Déterminer le nombre d'éléments  $D$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  tels que  $D^2 = C$ .

Q3.  $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Déterminer le nombre d'éléments  $B$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  tels que  $B^2 = A$ .

**Exercice 18**   **N1**   **Racines  $n^{\text{ème}}$  d'une matrice. Oral ESCP 1995 1.7.**

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

Q1. Donner les valeurs propres et les sous espaces de  $A$ .  $A$  est-elle diagonalisable ?

Q2.  $n$  est un élément de  $\mathbb{N}^*$ . On note  $\mathcal{R}$  l'ensemble des éléments  $B$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $B^n = A$ .

a) Soit  $B$  un élément de  $\mathcal{R}$ . Montrer que  $B$  commute avec  $A$ .

En déduire que les vecteurs propres de  $A$  sont des vecteurs propres de  $B$  et des conséquences sur les colonnes de  $B$ .

Montrer qu'il existe trois réels  $a$ ,  $b$  et  $f$  tels que :  $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ .

b) Déterminer  $\mathcal{R}$ .

Dans oral ESCP 2008 2.6 on cherche les racines  $n^{\text{ème}}$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  de  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ a & a & a \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$  ( $a \in \mathbb{R}$ ).

**Exercice 19**   **N1+**   **Racines carrées d'une matrice non diagonalisable. Oral ESCP 1994 2.17**

$f$  est l'endomorphisme de  $E = \mathbb{R}^3$  de matrice, dans la base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de  $f$ .  $f$  est-il diagonalisable ?

Q2. On suppose que  $g$  est un endomorphisme de  $E$  vérifiant :  $g \circ g = f$ .

a) Montrer que  $g(e_2)$  et  $g(e_3)$  sont des vecteurs propres de  $f$  associés respectivement aux valeurs propres 1 et 4.

En déduire que  $e_2$  et  $e_3$  sont des vecteurs propres de  $g$ .  $g$  est-il diagonalisable ?

b) Montrer que l'ensemble des valeurs propres de  $g$  est  $\{1, 2\}$  ou  $\{-1, -2\}$  ou  $\{1, -2\}$  ou  $\{-1, 2\}$ .

c) Montrer qu'il existe deux réels  $\delta$  et  $\varepsilon$  tels que :  $M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 1/(2\delta) & \delta & 0 \\ 1/(\delta + 2\varepsilon) & 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix}$ .

Q3. Résoudre l'équation :  $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et  $X^2 = A$ .

**Exercice 20** **N1** Réduction d'un endomorphisme en dimension 4.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  est une base du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ .

$f$  est l'endomorphisme de  $E$  de matrice  $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$  dans  $\mathcal{B}$ .

Q1. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $f$ .

Q2. Construire (en justifiant) une base de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $f$ .

**En plus.** Contenu dans EDHEC 2008 ex 1.

$x$  et  $y$  sont deux réels. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2x \end{pmatrix}$  soit diagonalisable.

**En plus.** Contenu dans oral ESCP 1994 2.8

Éléments propres de  $M = \begin{pmatrix} 3 & a & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$ .

**En plus.** Contenu dans oral ESCP 1995 1.11

Éléments propres de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

**En plus.** Contenu dans EDHEC 1994 Pb partie 2.

$p \in ]0, 1[$ .  $q = 1 - p$ .  $A = \begin{pmatrix} p & q/2 & 0 \\ q & p & 0 \\ 0 & q/2 & 1 \end{pmatrix}$ . Diagonaliser  $A$  et calculer  $A^n$  pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ .

**En plus.** Contenu dans ECRICOME 1991 Pb partie 2.

$M = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  et  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 12 & 0 \\ 3 & -3 & 18 & -3 \\ -1 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $MC$ . En déduire les valeurs propres de  $M$ , les sous-espaces propres de  $M$ , l'inversibilité de  $Q$  et une matrice diagonale  $D$  telle que  $M = QDQ^{-1}$ .

**En plus.** Contenu dans ECRICOME 1992 ex 2.

$a \in ]0, 1[$ . Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $N = \begin{pmatrix} 0 & a & 1-a \\ a & 0 & 1-a \\ a & 1-a & 0 \end{pmatrix}$ .

$N$  est-elle diagonalisable ?

**En plus.** Contenu d'après oral ESCP 2006 2.4.



$p \in ]0, 1[$  et  $q = 1 - p$ .  $A = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ p & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p - 1 \\ 0 & 0 & 1 - 2p & 0 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $A$  et  $B$  sont semblables et calculer  $B^n$ .

---

---

**Exercices d'entraînement à la recherche des éléments propres d'une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .**


---

- ▶ Dans les exercices qui suivent, le plus souvent, nous ferons abstraction du caractère symétrique de certaines matrices pour ne pas déborder sur le chapitre algèbre bilinéaire.
- ▶ Les exercices qui suivent sont aussi là pour s'entraîner à résoudre des systèmes linéaires de  $n$  équations et  $n$  inconnues.
- ▶ Un petit rappel très utile lorsque le rang de l'endomorphisme ou de la matrice est "petit".

Soit  $\lambda$  une valeur propre d'un endomorphisme  $f$  de  $E$ .

Si  $\lambda = 0$  :  $\text{SEP}(f, \lambda) = \text{Ker } f$ .

Si  $\lambda \neq 0$  :  $\text{SEP}(f, \lambda) \subset \text{Im } f$ .

**P** Ainsi les valeurs propres non nulles de  $f$  sont les valeurs propres de la restriction de  $f$  à  $\text{Im } f$  (que l'on peut considérer comme un endomorphisme de  $\text{Im } f$ ).

---

**Exercice 21**   **N1-**   **Diagonalisation d'un endomorphisme de "faible" rang. HEC 2007 MIII E exercice**

1. On considère  $\mathbb{R}^3$  muni de sa base canonique  $(e_1, e_2, e_3)$ .

Soit  $t$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ , dont la matrice associée  $T$  relativement à cette base s'écrit :  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer les valeurs propres de  $t$ . Déterminer les sous-espaces propres de  $t$  associés, et donner une base de chacun d'entre eux.

L'endomorphisme  $t$  est-il diagonalisable ? Est-il bijectif ?

*L'objet des questions suivantes est une généralisation des résultats précédents.*

2. Soit  $n$  un entier de  $\mathbb{N}^*$ . On considère l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{2n+1}$  muni de sa base canonique  $(e_1, e_2, \dots, e_{2n+1})$ .

Soit  $t$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^{2n+1}$  défini par :

- pour tout entier  $i$  de  $\llbracket 1, 2n+1 \rrbracket$ , avec  $i \neq n+1$  :  $t(e_i) = e_i$  ;
- $t(e_{n+1}) = e_1 + e_2 + \dots + e_{2n+1}$ .

a) Déterminer la matrice  $T$  associée à l'endomorphisme  $t$  relativement à la base  $(e_1, e_2, \dots, e_{2n+1})$

b) Déterminer le rang de  $t$ , ainsi que la dimension du noyau de  $t$ .

c) Justifier que 0 est valeur propre de  $t$ . Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0, ainsi qu'une base de ce sous-espace.

3. Montrer que  $\text{Im}(t \circ t) \subset \text{Im}(t)$ , où  $\text{Im } u$  désigne l'image d'un endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{R}^{2n+1}$

4. Soit  $\tilde{t}$  l'endomorphisme défini sur  $\text{Im}(t)$  par : pour tout  $x$  de  $\text{Im}(t)$ ,  $\tilde{t}(x) = t(x)$ .

Établir que  $\mathcal{B} = \left( e_1, \sum_{i=1}^{2n+1} e_i \right)$  constitue une base de  $\text{Im}(t)$ .

Écrire la matrice associée à  $\tilde{t}$  relativement à la base  $\mathcal{B}$

5. a) Soit  $\lambda$  une valeur propre non nulle de  $t$ , et  $x$  un vecteur propre associé à  $\lambda$ . Montrer que  $x$  appartient à  $\text{Im}(t)$ .

b) En déduire toutes les valeurs propres de  $t$ . L'endomorphisme  $t$  est-il diagonalisable ?

**Exercice 22** **N1** **Diagonalisation de la fameuse matrice "J" et d'un polynôme de J.** $n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$ Q1.  $J$  est la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont égaux à 1. Diagonaliser  $J$ .Q2.  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux réels.  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$  est un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Diagonaliser  $A$ .*On Q2 cela dans ECRICOME 2003 avec  $a = n - 1$  et  $b = -1$ , dans HEC 1993 avec  $a = 0$  et  $b = \frac{1}{n-1}$  dans un exercice d'oral HEC 2012 avec  $a = 1$  et  $b = r$ .**On trouve Q1 dans beaucoup d'exercices. Vu aussi EDHEC 2001 pb, EDHEC 2005 ex 3, EDHEC 2010 ex 1.***Exercice 23** **N1** **Diagonalisation d'une matrice de rang 1...** $n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$  et  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $a_{i,j} = \frac{i}{j}$ . La matrice  $A = (a_{i,j})$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est-elle diagonalisable ?**Exercice 24** **N1** **Diagonalisation d'une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .** $n$  est un entier supérieur ou égal à 3.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$  est un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Diagonaliser  $A$ .**Exercice 25** **N1+** **Diagonalisation d'une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  D'après l'oral ESCP 1996 1.17.** $n$  est un élément de  $\mathbb{N}$  supérieur ou égal à 4.  $a$  et  $b$  sont deux complexes non nuls. $A$  est la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  égale à  $\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b & a \\ a & 0 & \cdots & 0 & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & 0 & \cdots & 0 & a \\ a & b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$ .  $A$  est-elle diagonalisable ?*On pourra donner une méthode directe et une méthode qui utilise l'image d'un endomorphisme associé.***Exercice 26** **N1** **Diagonalisation d'une matrice de faible rang. Réécriture d'un exercice de l'oral ESCP 2009 2.6.**Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3. Soit  $A$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par :  $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$ .Pour simplifier les écriture on pourra poser  $c_n = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$ .Q1. Justifier en une ligne que  $A$  est diagonalisable.Q2. a) Montrer que  $A$  est de rang 2. En déduire que 0 est valeur propre de  $A$ .b) Donner une base du sous-espace propre de  $A$  associé à la valeur propre 0.Q3.  $E = \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et  $f$  est l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est  $A$ .

- a) On pose  $u = e_n$  et  $v = \sum_{k=1}^{n-1} k e_k$  (oui  $n - 1!!$ ). Montrer que  $\mathcal{B}' = (u, v)$  est une base de  $\text{Im } f$ .
- b) Montrer que  $\text{Im } f$  est stable par  $f$ .
- c) Soit  $g$  l'endomorphisme de  $\text{Im } f$  défini par  $\forall x \in \text{Im } f, g(x) = f(x)$ . Trouver la matrice  $M$  de  $g$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .
- d) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $g$ .

Q4. Utiliser tout ce qui précède pour diagonaliser  $A$ .

**Exercice 27**   **N1<sup>+</sup>**   **Matrice compagnon.**

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  sont  $n$  nombres complexes ( $n \geq 2$ ).

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

Montrer que les valeurs propres de  $A$  sont les racines du polynôme  $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$  et donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $A$  soit diagonalisable.

On aura intérêt à passer par la transposée de  $A$ .

Thème abordé dans LYON MI 2006 Pb 2, oral ESCP 2000 2-11. Apparaît aussi dans oral ESCP 2004 2.2, 2011 2.10 (ou presque).

► Les deux exercices qui suivent sont de la même famille.

**Exercice 28**   **N1**   **ESCP 1995 1.17**

$n = 2p - 1$  avec  $p$  élément de  $\llbracket 2, +\infty \llbracket$ .  $E = \mathbb{C}^n$  et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  est la base canonique de  $E$ .  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  est une famille d'éléments non nuls de  $\mathbb{C}$ .  $u$  est l'endomorphisme dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est :

$$A = \begin{pmatrix} & & & & a_n \\ & (0) & & a_{n-1} & \\ & & \ddots & & \\ & a_2 & & (0) & \\ a_1 & & & & \end{pmatrix}$$

C'est à dire que  $A = (a_{ij})$  avec  $a_{n-k+1,k} = a_k$ , pour  $1 \leq k \leq n$  et 0 autrement

Q1. Calculer  $u(e_k)$  pour tout élément  $k$  de  $\llbracket 1, n \llbracket$ .

Q2. Montrer que  $e_p$  est un vecteur propre de  $u$ . On pose  $D_p = \text{Vect}(e_p)$ .

Q3.  $k$  est un élément de  $\llbracket 1, p - 1 \llbracket$ . Montrer que le  $P_k = \text{Vect}(e_k, e_{n+1-k})$  est stable par  $u$ . Montrer que la restriction  $u_k$  de  $u$  à  $P_k$  est un endomorphisme diagonalisable de  $P_k$ .

Q4. Montrer que  $u$  est diagonalisable.

Q5.  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .  $B$  est-elle diagonalisable ? Et la matrice  $B^2$ .

Dans une QSP ESCP 2010 on trouve  $\begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & (0) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 1 & & & & (0) \end{pmatrix}$  ( $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sans indication sur  $n...$ )

**Exercice 29**   **N1+**   **LYON 1988 MI Pb 1**

On note  $n$  un entier naturel,  $n \geq 2$ ,  $B = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ ,  $I$  l'identité de  $\mathbb{R}^n$ , et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  défini par  $f(e_k) = 2^{k-1}e_{n-k+1}$ , pour tout entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq n$ .

1. a) Exprimer  $f \circ f$  en fonction de  $I$  et de  $n$ .
- b) En déduire que  $f$  est un isomorphisme de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  sur lui-même, et calculer  $f^{-1}$  en fonction de  $f$ .
2. Écrire la matrice de  $f$  relativement à  $B$ .
3. Dans cette question uniquement, on suppose  $n = 5$ .

Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de  $f$ ;  $f$  est-il diagonalisable ?

4. On revient au cas général.

- a) Pour tout entier  $k$  de l'intervalle  $\left[1; \frac{n+1}{2}\right]$  et tout réel  $\lambda$ , calculer  $f(e_k + \lambda e_{n-k+1})$ .
- b) Montrer que, pour chaque entier  $k$  de l'intervalle  $\left[1; \frac{n+1}{2}\right]$ , il existe deux réels distincts  $a_k$  et  $b_k$ , que l'on calculera, tels que  $e_k + a_k e_{n-k+1}$  et  $e_k + b_k e_{n-k+1}$  soient des vecteurs propres de  $f$ . Examiner le cas où  $2k = n + 1$ .
- c) Montrer que  $f$  est diagonalisable.

**Exercice 30**   **N2**   **ESCP 2006 2.9**

$n$  est dans  $\mathbb{N}^*$ .  $A = (a_{ij})$  est l'élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  défini par :  $a_{ij} = 1$  si  $i \neq j$  et  $a_{ij} = i$  si  $i = j$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & & (1) \\ & & \ddots & & \\ & & & n-1 & \\ (1) & & & & n \end{pmatrix}.$$

Q1.  $\lambda$  est un réel. Montrer que  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  si et seulement si :

$$\lambda \notin [0, n-1] \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \dots + \frac{1}{\lambda-(n-1)} = 1.$$

Q2 Trouver le nombre d'éléments de  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ .

On trouve un thème analogue dans ESCP 1996 1.14 avec  $A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ddots & a_{n-1} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$  avec  $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ .

**Exercice 31**   **N1+**   **Matrice circulante again. Oral ESCP 1996 1.1.**

Q1. Soit  $A = (a_{p,q})$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que :  $\forall (p,q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $a_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{si } q = p + 1 \text{ ou si } (p,q) = (n,1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \text{ Diagonaliser } A \text{ dans } \mathbb{C}.$$

Q2.  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est un  $n$ -uplet de nombre complexes.

Soit  $B = (b_{p,q})$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que :  $\forall (p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $b_{p,q} = x_k$  où  $\begin{cases} k = q - p + 1 & \text{si } q > p - 1 \\ k = q - p + n + 1 & \text{sinon} \end{cases}$ .

Diagonaliser  $B$ .

On trouve Q1 dans oral ESCP 1999 2-23. On trouve A également dans oral ESCP 1995 1.16..

**Exercice 32**   **N2**   **Éléments propres d'une matrice tridiagonale.**

$n$  est un entier supérieur ou égal à 4.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  est un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  (et de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ).

Q1.  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  est un élément de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ . On pose :  $x_0 = x_{n+1} = 0$ .

a) Soit  $\lambda$  un élément de  $\mathbb{C}$ . Montrer que  $AX = \lambda X$  si et seulement si :  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $x_{k+1} - \lambda x_k + x_{k-1} = 0$ .

b) Soit  $\lambda$  un élément de  $\mathbb{C} - \{-2, 2\}$ . Prouver que :

$$AX = \lambda X \quad \text{et} \quad X \neq 0 \quad \iff \quad \exists \alpha \in \mathbb{C}^*, \exists c \in \mathbb{C}^*, \begin{cases} \alpha^{2n+2} = 1 \\ \alpha + \frac{1}{\alpha} = \lambda \\ \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = c(\alpha^k - \frac{1}{\alpha^k}) \end{cases}$$

Q2. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $A$  dans  $\mathbb{C}$ , puis dans  $\mathbb{R}$ .

Q3.  $a$  est un réel. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ .

On trouve ce thème dans ESSEC 1996 MI, LYON 1999 MI Pb 1, HEC 1990 MI, oral ESCP 2008 2.1, dans une QSP ESCP 2006.

**EN PLUS**

• 1. ESCP 1994 2.6

$p_1, p_2, \dots, p_n$  sont  $n$  réels et on considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -p_1 & \cdots & \cdots & -p_n \\ p_1 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ p_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ .

A est-elle diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ ? dans  $\mathbb{C}$ ?

- 2. ESCP 1994 2.13

► Exercice repris à la fin.

On considère la matrice  $A = (a_{i,j})$  de  $\mathcal{M}_{2p+1}(\mathbb{R})$  définie par :  $\forall (i,j) \in \llbracket 1, 2p+1 \rrbracket^2$ ,  $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i + j = 2p + 2. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que A est diagonalisable et calculer  $A^n$  pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ .

Figure dans une QSP ESCP 2010 avec  $A = (a_{i,j})$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par :  $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i + j = n + 1. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On demande les éléments propres et il n'y a pas d'indication sur  $n$ .

- 3. ESCP 1995 1.12

Résumé : Éléments propres de  $A = \begin{pmatrix} a+b & 0 & \cdots & 0 & b \\ b & a & \ddots & \vdots & b \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a & b \\ b & 0 & \cdots & 0 & a+b \end{pmatrix}$ .

- 4. ESCP 1995 1.14

Résumé :  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sont  $n$  réels et on considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Éléments propres de A.

On trouve dans une QSP HEC 2012,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$  avec  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \dots$

- 5. ESCP 1996 1.13

Résumé :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Diagonalisation de A et B dans  $\mathbb{C}$ .

- 6. ESCP 1996 1.14

Résumé :  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sont  $n$  réels tels que  $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ . Montrer que  $A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ddots & a_{n-1} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$  a  $n$  valeurs propres distinctes.

- 7. ESCP 1996 1.16

$J_p$  (resp.  $0_p$ ) est la matrice de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont égaux à 1 (resp. 0).

A est la matrice de  $\mathcal{M}_{3p}(\mathbb{R})$  égale à :  $\begin{pmatrix} J_p & 0_p & J_p \\ 0_p & 0_p & 0_p \\ J_p & 0_p & J_p \end{pmatrix}$ . Éléments propres de A.

- 8. ESCP 1999 2-14 et 2006 2.15

Déterminer les éléments propres de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & (0) & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ( $n \geq 3$ ).

- 9. ESCP 2001 2.5

En résumé : déterminer les éléments propres de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- 10. ESCP 2004 2.22

En résumé :  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sont  $n$  éléments de  $\mathbb{C}$  et on considère la matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_1 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$  de

$\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ . Éléments propres de la matrice  $M$ .

- 11. ESCP 2009 2.8

Revient à trouver (!) les éléments propres de  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \cdots & n & n+1 \\ 3 & 4 & \cdots & n+1 & n+2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & n+1 & \cdots & 2n-2 & 2n-1 \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 & 2n \end{pmatrix}$ .

---



---

**Exercices d'entraînement à la recherche des éléments propres  
d'un endomorphisme de polynômes.**

---

Un petit rappel bien utile.

**P**  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{K}_n[X]$  tel que :  $\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \deg f(P) \leq \deg P$ .

Alors la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{K}_n[X]$  est triangulaire supérieure. Sa diagonale fournit les valeurs propres de  $f$ .

D'une manière général il est très utile lorsque l'on cherche les valeurs propres d'un endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{K}_n[X]$  ou de  $\mathbb{K}[X]$  de préciser le degré de " $f(P)$ ".

Pour trouver les éléments propres d'un tel endomorphisme on pourra être amené à faire des raisonnements sur les racines des polynômes et leur ordre de multiplicité.

On n'oubliera pas que la matrice d'un endomorphisme de  $\mathbb{K}_n[X]$  dans une base de cet espace vectoriel est un élément de  $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$  (et non de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ).

---

**Exercice 33**   **N1<sup>-</sup>**   **Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 1.**

$E = \mathbb{R}_3[X]$ ,  $A = X^4 - 1$  et  $B = X^4 - X$ .  $f$  est l'application qui à tout élément  $P$  de  $E$  associe le reste dans la division de  $AP$  par  $B$ .

Q0. Rappeler le théorème concernant la division euclidienne des polynômes.

Q1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$  (à faire très proprement).

Q2. Trouver la matrice  $M$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ . Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de  $f$ .

Q3 **N1<sup>+</sup>** Retrouver les résultats de Q2 sans utiliser la matrice de  $f$  par des considérations sur les racines des polynômes.

*Thème analogue dans LYON 1994 PB 1, EDHEC 2012 ex 3, ECRICOME 2002 ex1, oral ESCP 2002 2.10.*

---

**Exercice 34**   **N1<sup>-</sup>**   **Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 2. Contenu dans ESCP 2008 2.12**

$n \in \llbracket 2, +\infty[$ .  $E = \mathbb{R}_n[X]$ .  $\forall P \in E, f(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'$ .

Q0. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

Q1. Montrer que  $\text{Sp}(f) = \{k(k+1), k \in \llbracket 0, n\rrbracket\}$  et que  $f$  est un endomorphisme diagonalisable de  $E$ .

Q2. Montrer que pour tout  $k$  dans  $\llbracket 0, n\rrbracket$ , un vecteur propre associé à la valeur propre  $k(k+1)$  est de degré  $k$ .

Q3. Montrer que pour tout  $k$  dans  $\llbracket 0, n\rrbracket$  il existe un polynôme unitaire  $P_k$  et un seul appartenant à SEP  $(f, k(k+1))$ .

Montrer que  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  est une base de  $E = \mathbb{R}_n[X]$ .

---

**Exercice 35**   **N1.**   **Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 3. Contenu dans oral ESCP 2004 2.13.**

$n$  est un élément de  $\llbracket 3, +\infty[$ .  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . Pour tout  $P$  dans  $E$  on pose :  $f(P) = (X^2 + 1)P'' - 2XP'$ .

Q1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

Q2. Trouver la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $E$ . En déduire le spectre de  $f$ . Déterminer le cardinal de cet ensemble.

Q3. Montrer que :  $\text{Ker } f \subset \mathbb{R}_3[X]$ , puis que :  $\text{Ker } f = \text{Vect}(1, X^3 + 3X)$ . Déterminer  $\text{Ker}(f + 2Id_E)$ .

Q4. Montrer que  $f$  est diagonalisable.

Sur le même modèle dans oral ESCP 2004 2.18 on trouve  $f : P \rightarrow P(a) + X P'(a) + \frac{X^2}{2} P''(a) + X^3 P'''(X)$ . avec  $E = \mathbb{R}_n[X]$ .

**Exercice 36** N1. **Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 4.**

C'est proche de LYON 1995 Pb 1, oral ESCP 2001 2.8, 2008 2.5, 2008 2.13. On trouve aussi presque cela dans HEC 1987 MII.

•  $n$  est un élément de  $\llbracket 2, +\infty \llbracket$  et  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . Pour tout  $P$  dans  $E$  on pose  $f(P) = (X^2 - 1)P' - nXP$ .

Q1. Prouver que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

Q2. Soit  $\lambda$  un réel et  $P$  un élément non nul de  $E$  tels que :  $f(P) = \lambda P$ .

a) Soit  $\alpha$  un zéro de  $P$  dans  $\mathbb{C}$  d'ordre de multiplicité  $k$ . Montrer que nécessairement  $\alpha$  vaut 1 ou -1.

b) En déduire que :  $P = c(X - 1)^p(X + 1)^q$ , avec  $c$  dans  $\mathbb{R}^*$  et  $(p, q)$  dans  $\llbracket 0, n \rrbracket^2$ .

Exprimer  $q$  et  $\lambda$  en fonction de  $p$  et de  $n$ .

c) Conclure cette première phase.

Q3. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de  $f$ .

L'utilisation des racines et de leurs ordres de multiplicité dans la recherche des valeurs propres et des sous-espaces propres d'un endomorphisme de polynômes est classique. On trouve cela dans :

ECRICOME 1995 ex 1 avec  $E = \mathbb{R}[X]$  et  $f : P \rightarrow (2X + 1)P - (X^2 - 1)P'$ .

LYON 1995 pb 1 avec  $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$  et  $u : P \rightarrow (n - 1)XP - (X^2 - 1)P'$ .

Oral ESCP 2001 2.26, oral ESCP 2012 2.14 et ESSEC 1991 MII avec  $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$  et  $T : P \rightarrow P + \frac{1}{n}(1 - X)P'$ .

Oral ESCP 2001 2.8 et 2008 2.13 avec  $E = \mathbb{C}_n[X]$  et  $u : P \rightarrow (X^2 + 1)P' - nXP$ .

Oral ESCP 2002 2.20 avec  $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$  et  $\Phi : P \rightarrow \left(\frac{1}{4} - X^2\right)P'(X) + 2nXP(X)$  (voir plus bas).

Oral ESCP 2008 2.5 avec  $E = \mathbb{R}_n[X]$  et  $T : P \rightarrow XP(X) - \frac{1}{n}(X^2 - 1)P'(X)$ .

Oral ESCP 2008 2.13 avec  $E = \mathbb{C}_n[X]$  et  $u : P \rightarrow (X^2 + 1)P'(X) - nXP$ .

Oral ESCP 2011 2.17 avec  $E = \mathbb{R}_n[X]$  et  $f : P \rightarrow \left[x \rightarrow \frac{1}{x-1} \int_1^x P(t) dt\right]$ . Voir plus bas.

HEC 1987 MII avec  $E = \mathbb{R}_N[X]$  et  $f : P \rightarrow XP - \frac{1}{N}(X^2 - 1)P'$ .

**Exercice 37** N1+. **Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 5.**

$n$  est un élément de  $\mathbb{N}^*$ .  $E = \mathbb{R}_n[X]$  et  $A$  est un élément non nul de  $E$ .

$f$  est l'application qui à tout élément  $P$  de  $E$  associe la dérivée  $n^{\text{ème}}$  de  $AP$ .

Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .  $f$  est-il diagonalisable ?

Thème abordé dans oral ESCP 2004 2.24, 2007 2.13.

---

**Exercice 38** N1. **Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 6. D'après oral ESCP 1995 1.5.**

On considère l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}[X]$  défini par  $\forall P \in \mathbb{R}[X], f(P) = (2X + 1)P + (1 - X^2)P'$ .

Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $f$ .

*On trouve aussi cela dans ECRICOME 1995 ex 1.*

*Même chose dans oral ESCP 1997 2-21 avec  $P \rightarrow (X - 1)(X - 2)P' - 2XP$ .*

---

**Exercice 39** N1. **Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 7. Oral ESCP 2011 2.17.**

Q1. a) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme  $Q \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que pour tout  $x \neq 1$  :  

$$Q(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x P(t) dt.$$

b) Montrer que l'application  $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X], P \mapsto Q$  ainsi définie est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Q2. Montrer que  $f$  est bijective et déterminer sa bijection réciproque  $f^{-1}$ .

Q3. Écrire la matrice  $A$  de  $f$  dans la base canonique  $(1, X, \dots, X^n)$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  puis calculer son inverse  $A^{-1}$ . Les matrices  $A$  et  $A^{-1}$  sont-elles diagonalisables ?

Q4. a) Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$  une racine d'un polynôme  $Q$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  d'ordre de multiplicité  $k \in \mathbb{N}^*$ . Le complexe  $\alpha$  est-il racine de  $f^{-1}(Q)$  ? Avec quel ordre de multiplicité ?

b) En déduire les sous-espaces propres de l'endomorphisme  $f^{-1}$  puis montrer qu'ils sont aussi les sous-espaces propres de  $f$ .

*Ce thème est abordé dans ESSEC 1984 MII, ECRICOME 2012 Pb.*

*On trouve dans ESSEC 1981 MI  $P \rightarrow \left[ \frac{1}{x-s} \int_s^x P(t) dt \right]$  et même  $P \rightarrow \left[ \frac{1}{(x-s)^2} \int_s^x \left( \int_s^y P(t) dt \right) dy \right]$  sur  $\mathbb{R}[X]$ .*

*On trouve dans ECRICOME 1992  $P \rightarrow \left[ \frac{1}{x-a} \int_x^{2x-a} P(t) dt \right]$  sur  $\mathbb{R}_n[X]$*

---

**Exercice 40** N1. **Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 8. Oral ESCP 1998 2-2.**

$E$  est l'espace vectoriel des applications polynômiales de  $\mathbb{R}^{+*}$  dans  $\mathbb{R}$  de degré au plus 4.

$$\forall P \in E, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \Phi(P)(x) = P(x) + 2x^4 P\left(\frac{1}{x}\right).$$

Q1. Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $E$ .

Q2. Exprimer  $\Phi^2$  en fonction de  $\Phi$  et  $Id_E$ . Qu'en déduire pour les valeurs propres de  $\Phi$  ?

Q3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $\Phi$ .

*On trouve dans EDHEC 2009 ex 3  $P \rightarrow X^{2n+1} P\left(\frac{1}{X}\right)$  dans  $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$*

---

**Exercice 41** N1. **Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 9. LYON 1990 MI Pb 1.**

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 ;  $E$  désigne l'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  des fonctions polynômiales de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  de degré inférieur ou égal à  $n$ .

Pour tout entier  $k$  de  $\llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\mu_k$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\forall t \in \mathbb{R}, \mu_k(t) = t^k$ .

**Q1** Montrer que, pour tout entier  $k$  de  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^0 t^k e^t dt$  est convergente .

**Q2** Soit  $f$  un élément de  $E$ . Montrer que l'on peut définir une fonction  $g$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x f(t) e^t dt. \quad \text{Cette fonction } g \text{ dépend de } f \text{ et est notée } L(f).$$

**Q3** a) Calculer  $L(\mu_0)$ ,  $L(\mu_1)$ ,  $L(\mu_2)$ .

b) Montrer que, pour tout entier  $k$  de  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$  :  $L(\mu_{k+1}) = \mu_{k+1} - (k+1)L(\mu_k)$ .

En déduire que :  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $L(\mu_k) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!} \mu_j$ .

c) Montrer que, pour tout élément  $f$  de  $E$ ,  $L(f)$  appartient à  $E$ .

On considère l'application  $L : f \mapsto L(f)$  de  $E$  vers  $E$ .

La question Q4 a) du texte.

**Q4** a) Montrer que  $L$  est une application linéaire et injective.

Ma question Q4 a).

Montrer que  $L$  est un endomorphisme de  $E$ . Montrer que  $L$  est injectif puis bijectif et déterminer  $L^{-1}$ .

b) Écrire la matrice  $M$  représentant l'endomorphisme  $L$  de  $E$  dans la base  $(\mu_k)_{0 \leq k \leq n}$ .

Justifier l'inversibilité de  $M$  et écrire  $M^{-1}$ .

La question Q5 du texte.

**Q5** a) Soient  $\lambda$  une valeur propre de  $L$ , et  $f$  un vecteur propre de  $L$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

Montrer que  $\lambda$  est non nul et que, pour tout réel  $x$ ,  $(1 - \lambda) f(x) = \lambda f'(x)$ .

Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) = e^{\frac{\lambda-1}{\lambda} x} f(x)$ .

Montrer que  $\varphi$  est constante.

b) En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $L$ . Est-ce que  $L$  est diagonalisable ?

Ma question Q5 !

Montrer, sans calcul que 1 est la seule valeur propre de  $L$ . Montrer que le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par  $\mu_0$ .

On trouve dans oral ESCP 2007 2.7 la recherche des éléments propres de l'endomorphisme

$$P \mapsto \left[ x \mapsto e^{-x} \int_x^{+\infty} P(t) e^{-t} dt \right] \text{ de } \mathbb{R}_n[X].$$

On trouve aussi cet endomorphisme dans oral ESCP 2001 2.14, exercice intégralement repris en 2012 (2.8).

**Exercice 42** **N1<sup>+</sup>. Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 10. ESCP 2002 2.20.**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ , l'espace vectoriel réel des polynômes de degré au plus  $2n$ , muni de sa base canonique  $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^{2n})$ .

On considère  $\Phi$  définie sur  $E$  par :  $\forall P \in E$ ,  $\Phi(P)(X) = \left( \frac{1}{4} - X^2 \right) P'(X) + 2nXP(X)$ .

Q1. Vérifier que  $\Phi$  définit un endomorphisme de  $E$ .

Q2. a) Soit  $\lambda$  entier relatif tel que  $-n \leq \lambda \leq n$ .

Trouver  $(\alpha, \beta)$  dans  $\mathbb{N}^2$  pour que le polynôme  $P(X) = \left( X + \frac{1}{2} \right)^\alpha \left( X - \frac{1}{2} \right)^\beta$  de  $E$  vérifie  $\Phi(P) = \lambda P$ .

b) En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $\Phi$ . L'endomorphisme  $\Phi$  est-il diagonalisable ?

Q3. Déterminer la matrice  $A$  de  $\Phi$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ .

Q4. Déterminer une matrice  $A'$  dont les valeurs propres sont les nombres  $0, 1, \dots, 2n$  et dont les coefficients diagonaux sont tous égaux.

Q5. Construire un endomorphisme  $\Lambda$  de  $E$  tel que  $\Lambda(P)$  s'exprime en fonction de  $P, P'$  et  $P''$  et admettant  $0, 1, 4, 9, \dots, (2n)^2$  comme valeurs propres.

### EN PLUS

• Endomorphisme qui "n'augmente pas le degré. On trouve

$P \rightarrow (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$  dans oral ESCP 2000 2-2 et 2008 2.20,

$P \rightarrow X(1 - X)P'' + (1 - 2X)P'$  dans oral ESCP 2002 2.13 et 2005 2.15,

$P \rightarrow (X^2 + 1)P'' - 2XP'$  dans oral ESCP 2002 2.13,

$P \rightarrow P'' - 2XP'$  dans oral ESCP 2007 2.12,

$P \rightarrow (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$  dans oral ESCP 2000 2-2,

$P \rightarrow (X^2 - 1)P'' + 3XP'$  dans LYON MI 1996 Pb1 et 2005 Pb 1,

$P \rightarrow XP'' + (1 - X)P'$  dans LYON MI 1998 Pb1,

$P \rightarrow ((X^2 - 1)P)''$  dans LYON MI 2007 Pb2,

$P \rightarrow -P'' + 2XP' + P$  dans LYON MI 2008,

$P \rightarrow XP'' - (X - 1)P'$  dans LYON MI 2011,

$P \rightarrow (X - 1)P' - XP''$  dans EDHEC 1998 Pb,

$P \rightarrow ((X^2 - X)P)''$  dans EDHEC 2004 Pb,

$P \rightarrow P'' - 4XP'$  dans ECRICOME 2010 Ex 2,

$P \rightarrow P'(X + 1)$  dans ECRICOME 2011 Ex 1,

$P \rightarrow (X - 1)P' + P$  dans ECRICOME 2011 Pb partie I,

$P \rightarrow 2XP' - P''$  dans ESSEC 2002 MI.

• **N1<sup>+</sup>. Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 6. D'après oral ESCP 2001 2.26, lui-même adapté d'ESSEC MII 1991. On retrouve la même adaptation, ou presque, dans oral ESCP 2.14**

► *Exercice repris à la fin.*

$n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$ .  $E$  est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $(n - 1)$ .

Soit  $T$  l'application qui à tout polynôme  $P \in E$ , associe le polynôme  $Q = T(P)$  défini par :

$$Q(X) = P(X) + \frac{1 - X}{n} P'(X), \text{ où } P' \text{ désigne le polynôme dérivé de } P.$$

On pourra écrire indifféremment  $P$  ou  $P(X)$ , donc on pourra écrire  $Q = P + \frac{1 - X}{n} P'$ .

**Q1** Montrer que  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .

**Q2** Donner la matrice associée à  $T$  dans la base canonique de  $E$ .

**Q3** Montrer que  $T$  admet  $n$  valeurs propres distinctes  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$  (*formulation ECSP...*). Qu'en déduire ?

*JF Attention à ne pas faire d'erreur sur la valeur de  $\lambda_k$ ...*

**Q4** a) Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda_n$ .

b) Soit  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  et  $P$  un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_k$ . Montrer que  $P(1) = 0$ .

On pose alors  $P(X) = (X-1)^r R(X)$ , avec  $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  et  $R(1) \neq 0$ . Montrer que  $r = n-k$  et que  $R$  est constant.

c) En déduire le sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda_k$

**Q5** On considère la suite de polynômes définie par  $U_1(X) = X^{n-1}$  et  $\forall j \in \mathbb{N}^*$ ,  $U_{j+1}(X) = T(U_j)(X)$ .

a) Montrer que :  $U_1(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (X-1)^k$ .

b) En déduire l'expression de  $U_j(X)$  en fonction de  $1, X-1, \dots, (X-1)^{n-1}$ , ceci pour tout  $j \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$  ou  $j \in \mathbb{N}^*$ .

### Exercices d'entraînement à la recherche des éléments propres d'un endomorphisme de fonctions.

**Exercice 43** N1<sup>-</sup> Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de fonctions 1.

$E$  est l'espace vectoriel des applications continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Si  $f$  est un élément de  $E$ ,  $\varphi(f)$  est l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$  n'ayant pas de valeur propre.

*Thème abordé dans EDHEC 1997 Ex 1.*

*Dans oral ESCP 1994 2.22 on trouve la même chose avec  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(f)(x) = \int_0^x t f(t) dt$  et dans 2010 2.4 la même chose avec  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2} dt$*

Je propose l'exercice suivant en trois services...

Une première version avec un texte détaillé, une seconde avec un texte minimum et une variante qui est une QSP HEC 2012. Si vous choisissez la version deux ou la version 3 ne pas lire la version 1...

Je corrige les versions deux et trois.

L'exercice qui suit ces trois là en est assez proche.

**Exercice 44** N1<sup>+</sup> Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de fonctions 2..

$E$  est l'espace vectoriel des applications continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . Si  $f$  est un élément de  $E$ ,  $\varphi(f)$  est l'application de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in [0, 1], \varphi(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x \text{ est dans } ]0, 1] \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Q1. Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ , injectif mais non surjectif.

Q2. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\varphi$  et  $f$  un vecteur propre associé.

a) Montrer que  $\lambda$  n'est pas nul.

b) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0, 1]$  et que pour tout  $x$  dans cet intervalle,  $(1 - \lambda)f(x) = \lambda x f'(x)$ .

c) Déterminer  $f$  et prouver que  $\lambda$  appartient à  $]0, 1]$ .

Q3. Donner le spectre de  $\varphi$  et ses sous-espaces propres.

*Thème abordé dans une QSP HEC 2012 sans indication... Voir plus bas.*

**Exercice 44**   **N2**   **Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de fonctions 2'.**

$E$  est l'espace vectoriel des applications continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . Si  $f$  est un élément de  $E$ ,  $\varphi(f)$  est l'application de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in [0, 1], \varphi(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x \text{ est dans } ]0, 1] \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Q1. Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ .  $\varphi$  est-il injectif? surjectif?

Q2. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $\varphi$ .

**Exercice 45**   **N2**   **Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de fonctions 2". QSP HEC 2012.**

Soit  $E$  l'espace vectoriel des applications continues de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $T$  l'application qui à toute fonction  $f$  de  $E$  associe la fonction  $F = T(f)$  définie par :

$$F(0) = f(0) \text{ et } \forall x \in ]0, +\infty[, F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

Q1. Montrer que  $T$  est un endomorphisme de  $E$ . Est-il injectif?

Q2. Déterminer les réels  $\lambda$  et les fonctions  $f$  vérifiant  $T(f) = \lambda f$ .

On trouve aussi cela dans l'oral ESCP 2010 1.18 (partie analyse).

**Exercice 46**   **N1+**   **Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de fonctions 3. D'après oral ESCP 2000 2-18 et 2011- 2.2.**

$E$  est l'espace vectoriel des applications continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Si  $f$  est un élément de  $E$ ,  $\varphi(f)$  est l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(t) dt & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Q1. Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ .

Q2. Montrer que  $\text{Ker } \varphi$  est l'ensemble des fonctions impaires de  $E$ .

Q3. Soit  $\lambda$  un réel non nul. On se propose de trouver  $\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{Id}_E)$ .

a) Soit  $f$  un élément de  $\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{Id}_E)$ . Montrer que  $f$  est paire sur  $\mathbb{R}$  et dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .

Trouver une relation entre  $f$  et  $f'$  sur  $]0, +\infty[$ . En déduire  $f$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

Montrer que si  $\lambda$  appartient à  $] -\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[$  alors  $f$  est nulle sur  $\mathbb{R}$ .

b) Utiliser ce qui précède pour déterminer  $\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{Id}_E)$ .

Q4. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $\varphi$ .

A noter que dans ESCP 2000 2-18 on demande de montrer que  $\text{Sp } \varphi = \mathbb{R}$  ce qui est faux...

**Exercice 47**   **N2**   **Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de fonctions 4.**

**Réécriture d'un exercice de l'oral ESCP 2008 (2.8).**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $e_n$  l'application de  $[0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :  $\forall x \in [0, +\infty[$ ,  $e_n(x) = x^n \exp(-x) = x^n e^{-x}$ .

On donne un entier  $N$  non nul. Soit  $E$  l'espace vectoriel engendré par  $(e_0, e_1, e_2, \dots, e_N)$ .

Q1. Montrer que  $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2, \dots, e_N)$  est une base de  $E$ . En déduire la dimension de  $E$ .

Q2. Les éléments de  $E$  sont en particulier des applications dérivables.

On notera  $\Delta$  l'opérateur de dérivation dans  $E$ . Ainsi :  $\forall f \in E$ ,  $\Delta(f) = f'$ .

a) Démontrer que  $\Delta$  est un endomorphisme de  $E$ .

b) Écrire la matrice  $A$  de  $\Delta$  dans la base  $\mathcal{B}$ . En déduire que  $\Delta$  est un automorphisme de  $E$ .

c) Trouver les (!) valeurs propres et les sous-espaces propres de  $\Delta$ .  $\Delta$  est-il diagonalisable ? !

Q3. a) Soit  $k$  un élément de  $\llbracket 0, N \rrbracket$  et  $x$  un élément de  $[0, +\infty[$ .

Montrer que la série de terme général  $w_n = e_k(x+n)$  est convergente.

b)  $f$  est un élément de  $E$ . Démontrer que la série de terme général  $u_n = f(n+x)$  est convergente pour tout élément  $x$  de  $[0, +\infty[$ . On note alors  $F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+x)$ .

Vérifier que  $F \in E$ , et que l'application  $\Phi : f \mapsto F$  ainsi définie est un endomorphisme de  $E$ .

c) Écrire la matrice de  $\Phi$  dans la base  $\mathcal{B}$  (on pourra poser  $\forall j \in \llbracket 0, N \rrbracket$ ,  $A_j = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \ell^j e^{-\ell}$ )

d) Démontrer que  $\Phi \circ \Delta = \Delta \circ \Phi$ .

*Thème abordé dans EDHEC 1999 Pb (sans réduction), oral ESCP 2001 2.19.*

*Thème analogue dans oral ESCP 2010 2.17 avec  $e_k(x) = x^k e^{\alpha x}$ .*

*Dans une QSP HEC 2010 on trouve  $D(f) = f' - f''$  dans  $E = \text{Vect}(e_0, e_1, e_2, e_3)$*

**EN PLUS**

Dans oral ESCP 2009 2.4, 2012 2.3 on étudie l'endomorphisme  $f \mapsto \left[ x \mapsto \int_x^{x+1} f(t) dt \right]$  sur l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur  $\mathbb{R}$



---

**Exercices d'entraînement à la recherche des éléments propres  
d'un endomorphisme de suites.**

---

**Exercice 48**   **N1**   **Endomorphisme d'un espace vectoriel de suites 1. Contenu dans oral ESCP 2007 2.1**

$E$  est l'ensemble des suites complexes indexées par  $\mathbb{N}$  et bornées.  $T$  est l'application qui à tout élément  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  associe la suite  $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ .

Q1. Montrer que  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  et que  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .

Q2. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $T$ .

*Thème que l'on trouve dans oral ESCP 1996 1.8 pour des suites périodiques.*

---

**Exercice 49**   **N1**   **Endomorphisme d'un espace vectoriel de suites 2.**

$E$  est l'espace vectoriel réel des suites réelles indexées par  $\mathbb{N}$ .

On considère l'application  $f$  de  $E$  dans  $E$  qui à tout élément  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $E$  associe la suite  $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Q1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

Q2. Trouver les valeurs propres et les sous espaces propres de  $f$ .

**Thème abordé dans oral ESCP 2006 2.5 avec des suites périodiques.**

---

**Exercice 50**   **N1**   **Endomorphisme d'un espace vectoriel de suites 3.**

$E$  est l'espace vectoriel réel des suites réelles indexées par  $\mathbb{N}$ .

On considère l'application  $f$  de  $E$  dans  $E$  qui à tout élément  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $E$  associe la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $v_0 = u_0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n = \frac{u_{n-1} + u_n}{2}$ .

Q1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

Q2. Trouver les valeurs propres et les sous espaces propres de  $f$ .

---

**Exercice 51**   **N2**   **Endomorphisme d'un espace vectoriel de suites 4. Oral ESCP 1998 2-15**

$E$  est l'espace vectoriel réel des suites réelles indexées par  $\mathbb{N}$ .

On définit pour tout élément  $u = (u_n)_{n \geq 0}$  de  $E$  la suite  $v = \Delta(u)$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{n+1}(u_0 + u_1 + \dots + u_n).$$

**Q1** Montrer que l'application  $\Delta$  ainsi définie est un endomorphisme de  $E$ .

**Q2** On considère un réel  $\lambda$  n'appartenant pas à l'ensemble  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{p+1} ; p \in \mathbb{N} \right\}$ .

Soit  $u = (u_n)_{n \geq 0}$  un élément de  $\text{Ker}(\Delta - \lambda \text{Id}_E)$ . Montrer par une récurrence adaptée que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 0$ .

Qu'en déduire pour le spectre de  $\Delta$  ?  $\Delta$  est-il injectif ?

**Q3** On rappelle que si  $r$  et  $s$  sont deux éléments de  $\mathbb{N}$  tels que  $s \geq r$  :

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \dots + \binom{s}{r} = \binom{s+1}{r+1}.$$

a) Soit  $p$  un élément de  $\mathbb{N}$ . On pose  $\lambda = \frac{1}{p+1}$  et on considère la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \begin{cases} \binom{n}{p} & \text{si } n \geq p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Vérifier que  $\Delta(u) = \lambda u$ .

b) Préciser le spectre de  $\Delta$ .

**Q4** Soit  $p$  un élément de  $\mathbb{N}$ . On pose  $\lambda = \frac{1}{p+1}$ . Déterminer SEP  $(\Delta, \lambda)$ .

**Q5 Facultatif** Étudier la surjectivité de  $\Delta$ .

**Exercice 52** **N2** **Endomorphisme d'un espace vectoriel de suites 4 ESCP 2010 2.3.**

On note  $\mathcal{S} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}, \text{ avec } x_n \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n, \lim_{n \rightarrow -\infty} x_n \text{ existent}\}$ .

Nous comprendrons que  $\mathcal{S}$  est l'ensemble des suites réelles  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  indexées par  $\mathbb{Z}$  telles  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(x_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$  soient convergentes (donc de limites finies...).

Q1. Montrer que  $\mathcal{S}$  est un sous-espace vectoriel du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles indexées par  $\mathbb{Z}$ .

Soit  $T$  l'application définie sur  $\mathcal{S}$  par  $T((x_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , avec pour tout  $n \in \mathbb{Z} : y_n = x_{n-1} + x_{n+1}$ .

Q2. Montrer que  $T$  est un endomorphisme de  $\mathcal{S}$ . Déterminer son noyau.

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse aux valeurs propres réelles de  $T$ , c'est-à-dire aux réels  $\lambda$  tels que

$\text{Ker}(T - \lambda Id) \neq \{0\}$ , où  $Id$  désigne l'endomorphisme identité de  $\mathcal{S}$  et on pose  $A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$ .

Q3. Soit  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{S}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on pose  $U_k = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix}$ .

Montrer que  $x \in \text{Ker}(T - \lambda Id)$  si et seulement si pour tout  $k$  de  $\mathbb{Z}$ ,  $U_{k+1} = A_\lambda U_k$ .

En déduire que pour tout  $k$  de  $\mathbb{Z}$ , on a alors :  $U_k = A_\lambda^k U_0$  (si  $x \in \text{Ker}(T - \lambda Id)$  non ?).

Q4. a) On suppose que  $\lambda \notin \{-2, 2\}$ . Montrer que  $A_\lambda$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

En déduire que si  $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Ker}(T - \lambda Id)$ , il existe des nombres complexes  $\alpha, \beta, \mu_1, \mu_2$  tels que, pour tout  $k$  de  $\mathbb{Z}$ , on ait :  $x_k = \alpha \mu_1^k + \beta \mu_2^k$ .

En distinguant les deux cas  $|\lambda| > 2$  et  $|\lambda| < 2$ , montrer que  $\text{Ker}(T - \lambda Id) = \{0\}$ .

b) Que peut-on dire de  $\text{Ker}(T - 2Id)$  ?

c) Montrer que  $\text{Ker}(T + 2Id) = \{0\}$ .

Conclure.

---

## D'autres exercices.

---

### **Exercice 53**   **N1**   **Un marronnier !**

$E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  non nulle.  $a$  et  $b$  sont deux éléments distincts de  $\mathbb{K}$ .

$f$  est un endomorphisme de  $E$  tel que  $(f - a \text{Id}_E) \circ (f - b \text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ . Montrer que  $f$  est diagonalisable.

*Thème abordé dans LYON 1993 MI Pb 1, EDHEC 2006 ex 1, oral ESCP 1994 2.23, oral ESCP 2005 2.9. Thème implicitement contenu dans ESCP 2006 2.17.*

*Dans une QSP ESCP 2008 on trouve  $A(A - \alpha I_n) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$  avec  $\alpha \neq 0 \dots$*

*Dans oral ESCP 2003 on trouve  $f \circ (f - \alpha \text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ , puis  $f \circ (f - \alpha \text{Id}_E) \circ (f - \beta \text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)} \dots$*

*Dans une QSP HEC 2010 on trouve  $(f - \text{Id}_E)^3 \circ (f - 2 \text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$  avec  $(f - \text{Id}_E)^2 \circ (f - 2 \text{Id}_E) \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ .*

---

### **Exercice 54**   **N1**   **Un marronnier encore !**

$E$  est un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{K}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).  $f$  et  $g$  sont deux endomorphismes de  $E$  tel que :  $f \circ g - g \circ f = g$ .

Q1. Montrer que pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}$  :  $f \circ g^k - g^k \circ f = k g^k$ .

Q2. Pour tout  $u$  dans  $\mathcal{L}(E)$  on pose :  $\varphi(u) = f \circ u - u \circ f$ .

a) Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{L}(E)$ .

b) Montrer, en raisonnant par l'absurde, que  $g$  est nilpotent (c'est à dire qu'il existe  $r$  dans  $\mathbb{N}$  tel que  $g^r = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ).

*Figure dans ESCP 2004 2.5. On retrouve le même thème traité matriciellement dans oral ESCP 2012 2.17.*

---

### **Exercice 55**   **N1**   **Une QSP classique.**

$A$  est une matrice diagonalisable de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle qu'il existe un élément  $p$  de  $\mathbb{N}^*$  vérifiant :  $A^p = I_n$ .

Montrer que  $A^2 = I_n$ .

---

### **Exercice 56**   **N1**   **QSP ESCP 2007, QSP HEC 2009**

$f$  est un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  sur  $\mathbb{K}$ .

Montrer que si  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  ne sont pas supplémentaires alors  $f$  n'est pas diagonalisable.

---

### **Exercice 57**   **N1+**   **Une QSP HEC 2011**

$n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$ . Soient  $x$  et  $y$  deux réels et  $F$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par :  $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), F(M) = xM + y^t M$ .

Q1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $F$  soit un projecteur.

Q2. Donner les valeurs propres de  $F$ .

Q3.  $F$  est-il diagonalisable ?

*Dans une QSP ESCP 2012 on trouve Q2 et Q3 avec  $x = y = 1$ .*

---

### **Exercice 58**   **PC**   **Endomorphisme égal à la somme de deux projecteurs qui commutent. LYON 1989 MI Pb 1 Partie A**

$p$  et  $q$  sont deux projecteurs du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  tels que :  $p \circ q = q \circ p$ .  $f = p + q$ .

Q0 Justifier les inclusions  $\text{Sp } p \subset \{0, 1\}$  et  $\text{Sp } q \subset \{0, 1\}$

Q1. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $f$  et  $x$  un vecteur propre associé.

a) Montrer que  $p(q(x)) = q(p(x)) = (\lambda - 1)p(x) = (\lambda - 1)q(x)$  (1).

b) En utilisant Q0 et (1) montrer que  $\lambda \in \{0, 1, 2\}$ .

Q2. Montrer que 0 est valeur propre de  $f$  si et seulement si :  $\text{Ker } p \cap \text{Ker } q \neq \{0_E\}$  (un sens clair ; pour l'autre Q0+(1)).

Q3. Montrer que 2 est valeur propre de  $f$  si et seulement si :  $\text{Im } p \cap \text{Im } q \neq \{0_E\}$  (again).

Q4. Ils ont oublié 1, toi pas, hein ?

On retrouve ce thème dans ESCP 2007 2.10.

**Exercice 59**   **N2**   **Transvection ou presque... QSP ESCP 2007**

$E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ).  $\varphi$  est une forme linéaire sur  $E$  et  $a$  est un élément de  $E$ .

On considère l'application  $f$  définie sur  $E$  par :  $\forall x \in E, f(x) = x + \varphi(x)a$ .

Q1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

Q2. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $f$ .  $f$  est-il diagonalisable ?

*Thème abordé dans oral ESCP 2003 2.6, 2005 2.1 (à un coefficient 1/2 près), 2.15, 2007 2.17, EDHEC 2010 ex 2 (mais avec une forme linéaire définie par un produit scalaire).*

*On fait une petite étude des tranvections dans oral ESCP 2005 2.10, mais il n'y a pas de réduction*

**Exercice 60**   **N1**   **Endomorphisme cyclique. Oral ESCP 1998 2-26**

Nous reviendrons sur ce sujet dans le conducteur 2.

$E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  de dimension  $n$  ( $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$ ). Un endomorphisme  $f$  de  $E$  est dit cyclique si l'on peut trouver  $x_0$  élément de  $E$  tel que  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  soit une base de  $E$ .

Q1. Dans cette question on suppose que  $f$  est un endomorphisme de  $E$  tel que  $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$  et  $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

Montrer que  $f$  est cyclique. Préciser son noyau et son image.  $f$  est-il diagonalisable ?

Q2.  $f$  est un endomorphisme cyclique de  $E$  et  $x_0$  est un élément de  $E$  tel que  $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  soit une base de  $E$ .

$\mathcal{C} = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$ .

a) Soit  $g$  un élément de  $\mathcal{C}$ . En écrivant  $g(x_0)$  dans la base  $\mathcal{B}$ , montrer qu'il existe un élément  $P$  de  $\mathbb{C}_n[X]$  (et même de  $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ ) tel que  $g = P(f)$ .

b) Achever la détermination de  $\mathcal{C}$ .

Q3.  $f$  est un endomorphisme cyclique de  $E$  et  $x_0$  est un élément de  $E$  tel que  $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  soit une base de  $E$ . On suppose que  $f^n(x_0) = x_0$ .

a) Montrer que  $f^n = \text{Id}_E$ .

b) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $f$ .

*Thème abordé dans LYON MI 2001 Pb 2 LYON 2006 Pb 2, oral ESCP 1998 2-3, 2000 2-10, 2003 2.20, 2010 2.12, 2012 2.10.*

**Exercice 61**   **N1+**   **Inversion d'une "matrice de passage de vecteurs propres".**

$A$  est une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  admettant  $n$  valeurs propres deux à deux distinctes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

$\mathcal{B} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  est une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de  $A$  respectivement associés aux valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Notons que  $\text{SEP}(A, \lambda_j) = \text{Vect}(X_j)$

Soit  $P$  est la matrice de passage de la base canonique  $\mathcal{B}_0 = (E_1, E_2, \dots, E_n)$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  à  $\mathcal{B}$ . On pose  $P = (p_{i,j})$ .

Alors  $P$  est inversible et  $P^{-1}AP$  est la matrice diagonale  $D = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ .

Q1 Montrer que  ${}^tA$  a les mêmes valeurs propres que  $A$ .

En déduire l'existence d'une matrice inversible  $Q$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $Q^{-1}{}^tAQ = D$ . On pose  $Q = (q_{i,j})$ .

Q2. a) Montrer que  $A({}^tQ)^{-1} = ({}^tQ)^{-1}D$ .

En déduire que pour tout  $j$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  il existe un élément  $\delta_j$  de  $\mathbb{K}$  tel que  $({}^tQ)^{-1}E_j = \delta_j PE_j$ .

b) On considère la matrice diagonale de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  :  $\Delta = \text{Diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ .

Montrer que  $P^{-1} = \Delta {}^tQ$  et que  $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \delta_j = \frac{1}{\sum_{k=1}^n p_{k,j} q_{k,j}}$ .

Q3. On suppose ici que  $A$  est inversible. On pose  $A^{-1} = (b_{i,j})$ . Montrer que  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, b_{i,j} = \sum_{k=1}^n \left( \delta_k \frac{p_{i,k} q_{j,k}}{\lambda_k} \right)$ .

**Exercice 62**   **N2+**   **Réduction de E défini par sa donnée sur deux supplémentaires de E. ESCP 2005 2.2.**

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie  $n \geq 2$  et  $E_1, E_2$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ , supplémentaires dans  $E$  et non réduits au vecteur nul.

Soit  $u_1 \in \mathcal{L}(E_1), u_2 \in \mathcal{L}(E_2)$  et  $u_3 \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$ .

On note  $u$  l'endomorphisme de  $E$  tel que :  $\begin{cases} \forall x \in E_1, u(x) = u_1(x) \\ \forall x \in E_2, u(x) = u_2(x) + u_3(x) \end{cases}$

Q1. Donner la forme de la matrice de  $u$  dans une base de  $E$  obtenue en mettant "bout à bout" une base de  $E_1$  et une base de  $E_2$ .

Q2. a) Soit  $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On pose  $x = x_1 + x_2$ .

Montrer que :  $u(x) = \lambda x \iff \begin{cases} u_1(x_1) + u_3(x_2) = \lambda x_1 \\ u_2(x_2) = \lambda x_2 \end{cases}$ .

b) Montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $u$  alors  $\lambda$  est valeur propre de  $u_1$  ou de  $u_2$ .

Montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $u_1$  alors  $\lambda$  est valeur propre de  $u$ .

Montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $u_2$  sans être valeur propre de  $u_1$  alors  $\lambda$  est valeur propre de  $u$ .

c) Soit  $\lambda$  un réel qui est valeur propre de  $u_1$  mais pas de  $u_2$ . Comparer les sous-espaces propres de  $u$  et de  $u_1$  associés à  $\lambda$ .

d) Soit  $\lambda$  un réel qui est valeur propre de  $u_2$  mais pas de  $u_1$ . Comparer les dimensions des sous-espaces propres de  $u$  et de  $u_2$  associés à  $\lambda$ .

Q3. On suppose dans cette question que  $u_1$  et  $u_2$  n'ont pas de valeur propre commune. Montrer que  $u$  est diagonalisable si et seulement si  $u_1$  et  $u_2$  le sont.

**Exercice 63**   **N1**   **Éléments propres d'une matrice de  $\mathcal{M}_{2p+1}(\mathbb{R})$ . ESCP 94 2.13**

On considère la matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_{2p+1}(\mathbb{R})$  définie par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, 2p+1 \rrbracket^2, a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i + j = 2p + 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Q1.  $A$  est-elle inversible ?

Q2.  $A$  est-elle Diagonalisable ?

Q3. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $A$ .

**Exercice 64** N1<sup>+</sup>. **Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes. D'après oral ESCP 2001 2.26, lui même adapté d'ESSEC MII 1991. On retrouve la même adaptation, ou presque, dans oral ESCP 2.14**

$n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$ .  $E$  est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $(n - 1)$ .

Soit  $T$  l'application qui à tout polynôme  $P \in E$ , associe le polynôme  $Q = T(P)$  défini par :

$$Q(X) = P(X) + \frac{1 - X}{n} P'(X), \text{ où } P' \text{ désigne le polynôme dérivé de } P.$$

On pourra écrire indifféremment  $P$  ou  $P(X)$ , donc on pourra écrire  $Q = P + \frac{1 - X}{n} P'$ .

**Q1** Montrer que  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .

**Q2** Donner la matrice associée à  $T$  dans la base canonique de  $E$ .

**Q3** Montrer que  $T$  admet  $n$  valeurs propres distinctes  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$  (*formulation ECSP...*). Qu'en déduire ?

*JF Attention à ne pas faire d'erreur sur la valeur de  $\lambda_k$ ...*

**Q4** a) Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda_n$ .

b) Soit  $k \in \llbracket 1, n - 1 \llbracket$  et  $P$  un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_k$ . Montrer que  $P(1) = 0$ .

On pose alors  $P(X) = (X - 1)^r R(X)$ , avec  $r \in \llbracket 1, n - 1 \llbracket$  et  $R(1) \neq 0$ . Montrer que  $r = n - k$  et que  $R$  est constant.

c) En déduire le sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda_k$

**Q5** On considère la suite de polynômes définie par  $U_1(X) = X^{n-1}$  et  $\forall j \in \mathbb{N}^*$ ,  $U_{j+1}(X) = T(U_j)(X)$ .

a) Montrer que :  $U_1(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (X-1)^k$ .

b) En déduire l'expression de  $U_j(X)$  en fonction de  $1, X - 1, \dots, (X - 1)^{n-1}$ , ceci pour tout  $j \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$ ... ou  $j \in \mathbb{N}^*$ .