J.F. COSSUTTA jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

EDHEC 2013

EXERCICE 1

1) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{(n+1)-n}{n\,(n+1)} = \dfrac{1}{n\,(n+1)} = \dfrac{1}{a_n}\cdot$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\cdot}$$

$\forall r \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{r} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{r}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{r+1}$ par "télescopage".

Alors $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \sum_{n=1}^{r} \frac{1}{a_n} = \lim_{r\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{r+1}\right) = 1$. Ainsi :

$$\boxed{\text{la série de terme général } \frac{1}{a_n} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = 1.}$$

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$a_1+a_2+\cdots+a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k\,(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} + \frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{n\,(n+1)}{6}\,\big(2n+1+3\big).$

$a_1+a_2+\cdots+a_n = \dfrac{n\,(n+1)\,(2n+4)}{6} = \dfrac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3}\cdot$

Alors $u_n = \dfrac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} = \dfrac{n}{\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3}} = \dfrac{3}{(n+1)\,(n+2)}\cdot$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{3}{(n+1)\,(n+2)}\cdot}$$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{3}{(n+1)\,(n+2)} = \dfrac{3}{a_{n+1}}\cdot$

Comme la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge, la série de terme général $\dfrac{3}{a_{n+1}}$ converge également.

Alors la série de terme général u_n converge. De plus :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_{n+1}} = 3\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = 3\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_1}\right) = 3\left(1 - \frac{1}{1\,(1+1)}\right) = 3\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot$$

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{3}{2}\cdot}$$

► *Remarque Il était sans doute plus rapide d'utiliser la même méthode que dans* **1) a)** *et d'écrire que :*

$\forall r \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{r} u_n = 3\sum_{n=1}^{r}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r+2}\right)\cdots$ ◄

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{3}{2} \leqslant 2 = 2 \times 1 = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}\cdot$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}\cdot}$$

2) a) et b) Nous allons regrouper le tout dans un même programme. Nous écrirons une version récursive de fact (fonction fact) et une version itérative de fact (fonction fact2).

Calculer $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ en appelant à chaque fois la fonction fact est une hérésie. Nous donnerons donc une fonction qui calcule honorablement u_n (fonction u) et nous écrirons aussi ce qu'attend le concepteur (programme principal).

```
Program Edhec_2013;

function fact(n:integer):integer;

Begin if n=0 then fact:=1
             else fact:=n*fact(n-1); end;

function fact2(n:integer):integer;

var k,a:integer;

begin
a:=1;
for k:=1 to n do a:=a*k;
fact2:=a;
end;

function u(n:integer):real;

var k,f,s:integer;

begin
f:=1;s:=1;
for k:=2 to n do
    begin
    f:=f*k;s:=s+f;
    end;
u:=n/s;
end;

var n,k,ubu:integer;

begin

write('Donner n. n=');readln(n);

ubu:=1;

for k:=2 to n do ubu:=ubu+fact(k);

writeln('u_',n,'=',n/ubu);

end.
```

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{n!} = \dfrac{1^n}{n!}\cdot$ Or le cours indique que pour tout réel x, la série de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ converge. Ainsi :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{1}{a_n} \text{ converge.}}$$

d) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k! \geqslant n! > 0$. Donc $\dfrac{1}{n!} \geqslant \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}$ et $n \geqslant 0$. Alors :

$$\frac{1}{(n-1)!} = \frac{n}{n!} \geqslant \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} = \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = u_n.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant \frac{1}{(n-1)!}\cdot}$$

e) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}$ et la série de terme général $\dfrac{1}{(n-1)!}$ converge.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général u_n converge.

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n \text{ converge.}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}$ donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}$ car les deux séries convergent.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \frac{1}{0!} = \mathrm{e} - 1.$$

Or $2 \leqslant \mathrm{e}$ donc $2 \leqslant 2\,\mathrm{e} - \mathrm{e}$ et ainsi $\mathrm{e} \leqslant 2\,(\mathrm{e} - 1)$. Alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant \mathrm{e} \leqslant 2\,(\mathrm{e} - 1) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}\cdot$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}\cdot}$$

On revient au cas général.

3) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Soit $< .,. >$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\|.\|$ la norme associée.

Dans l'espace vectoriel euclidien $\big(\mathbb{R}^n, < .,. >\big)$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz indique que :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ | < x, y > | \leqslant \|x\|\,\|y\|$. Ce qui revient à dire que :

$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,\ \displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n} (x_k\, y_k)\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\,\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$. Ou que :

$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,\ \displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k\, y_k)\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)$.

Notons que $\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k > 0$. Alors : $\displaystyle(1 + 2 + \cdots + n)^2) = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k} \times \frac{k}{\sqrt{a_k}}\right)^2$.

Alors ce qui précède permet d'écrire que : $\displaystyle\big(1 + 2 + \cdots + n\big)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \big(\sqrt{a_k}\big)^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{\sqrt{a_k}}\right)^2\right)$. Donc :

$$(1+2+\cdots+n)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}\right) = (a_1+a_2+\cdots+a_n) \left(\frac{1}{a_1}+\frac{4}{a_2}+\cdots+\frac{n^2}{a_n}\right)\cdot$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (1+2+\cdots+n)^2 \leqslant (a_1+a_2+\cdots+a_n) \left(\frac{1}{a_1}+\frac{4}{a_2}+\cdots+\frac{n^2}{a_n}\right)\cdot}$$

Ou :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}\right)\cdot}$$

4) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

Notons que : $4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = 4\,\frac{(n+1)^2-n^2}{\big(n\,(n+1)\big)^2} = 4\,\frac{n^2+2n+1-n^2}{\big(n\,(n+1)\big)^2} = 4\,\frac{2n+1}{\big(n\,(n+1)\big)^2} = \frac{2n+1}{\left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2}\cdot$

Or $\frac{n\,(n+1)}{2} = 1+2+\cdots+n$ donc $4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{2n+1}{(1+2+\cdots+n)^2}\cdot$

Rappelons que $(1+2+\cdots+n)^2 \leqslant (a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{4}{a_2}+\cdots+\frac{n^2}{a_n}\right)$.

De plus $(1+2+\cdots+n)^2$ et $a_1+a_2+\cdots+a_n$ sont strictement positifs. Alors :

$$\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant \frac{1}{(1+2+\cdots+n)^2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{4}{a_2}+\cdots+\frac{n^2}{a_n}\right) = \frac{1}{(1+2+\cdots+n)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\cdot$$

De plus $2n+1$ est positif, ainsi : $\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant \frac{2n+1}{(1+2+\cdots+n)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k} = 4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\cdot$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant 4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\cdot}$$

b) Soit N dans $\mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède :

$\sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant \sum_{n=1}^{N}\left(4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right)\cdot$ Transformons le second terme.

$\sum_{n=1}^{N}\left(4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right) = \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{n}\left[4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\frac{k^2}{a_k}\right]\right)\cdot$ En commutant les deux sommes il vient :

$$\sum_{n=1}^{N}\left(4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right) = 4\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{n=k}^{N}\left[\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\frac{k^2}{a_k}\right]\right) = 4\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{k^2}{a_k}\sum_{n=k}^{N}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right].$$

Un petit "télescopage" donne alors : $\sum_{n=1}^{N}\left(4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right) = 4\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{k^2}{a_k}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(N+1)^2}\right)\right].$

Or $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{k^2}{a_k} \geqslant 0$ et $\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(N+1)^2}\right) \leqslant \frac{1}{k^2}$ donc $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{k^2}{a_k}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(N+1)^2}\right) \leqslant \frac{k^2}{a_k}\,\frac{1}{k^2} = \frac{1}{a_k}\cdot$ Donc :

$$\sum_{n=1}^{N}\left(4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right) = 4\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{k^2}{a_k}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(N+1)^2}\right)\right] \leqslant 4\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a_k}\cdot$$

Alors $\sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant \sum_{n=1}^{N}\left(4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right) \leqslant 4\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a_k}\cdot$ Ainsi :

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leqslant 4 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k}\cdot}$$

c) La série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ est convergente (par hypothèse) et à termes positifs donc $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}\cdot$

Alors $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leqslant 4 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k} \leqslant 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}\cdot$

Ainsi la série de terme général $\dfrac{2n+1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ est à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée par $4 \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}\cdot$ Elle est donc convergente.

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \text{ converge.}}$$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $u_n = \dfrac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}\cdot$

$0 \leqslant n \leqslant n + \dfrac{1}{2}$ et $a_1 + a_2 + \cdots + a_n > 0$ donc $0 \leqslant u_n = \dfrac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leqslant \dfrac{n + \frac{1}{2}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = \dfrac{1}{2} \dfrac{2n+1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}\cdot$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2} \dfrac{2n+1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}\cdot$

De plus la série de terme général $\dfrac{2n+1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ converge donc il en est de même pour la série de terme général $\dfrac{1}{2} \dfrac{2n+1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}\cdot$

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général u_n converge.

De plus : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leqslant \frac{1}{2} \left(4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} \right) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}\cdot$

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}\cdot}$$

EXERCICE 2

1) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\big) = \operatorname{Vect}(0_E, e_1, 2\,e_1 + 3\,e_2) = \operatorname{Vect}(e_1, 2\,e_1 + 3\,e_2) = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$.

La famille (e_1, e_2) étant libre, $\operatorname{Im} f$ est de dimension 2. Comme ici $\dim E = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\operatorname{Im} f$ est un hyperplan de E.

De plus si x est un élément de E, $f(x)$ appartient à $\operatorname{Im} f$! Donc si x est un élément de $\operatorname{Im} f$, $f(x)$ appartient à $\operatorname{Im} f$! !

Alors $\operatorname{Im} f$ est stable par f.

$$\boxed{\operatorname{Im} f \text{ est un hyperplan de } \mathbb{R}^3 \text{ stable par } f.}$$

2) a) Proposons plusieurs versions.

• *Version 1* Cette version a pour seul intérêt de ne pas empiéter sur la suite.

Cherchons les valeurs propres de M.

Soit λ un réel. Cherchons une réduite de Gauss de $M - \lambda\, I_3$. $M - \lambda\, I_3 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$.

L'opération $L_1 \longleftrightarrow L_3$ sur $M - \lambda\, I_3$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-\lambda \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Les opérations $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - (2-\lambda)\, L_1$ donnent : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda - 1 \\ 0 & \lambda - 1 & -(2-\lambda)^2 + 1 \end{pmatrix}$.

L'opération $L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$ donne enfin : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda - 1 \\ 0 & 0 & \lambda - (2-\lambda)^2 \end{pmatrix}$.

Observons que $\lambda - (2-\lambda)^2 = \lambda - 4 + 4\,\lambda - \lambda^2 = -(\lambda^2 - 5\,\lambda + 4) = -(\lambda - 1)\,(\lambda - 4)$.

Donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda - 1 \\ 0 & 0 & -(\lambda-1)\,(\lambda-4) \end{pmatrix}$ est une réduite de Gauss de $M - \lambda\, I_3$.

λ est valeur propre de M si et seulement si $M - \lambda\, I_3$ n'est pas inversible.

Donc λ est valeur propre de M si et seulement si $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda - 1 \\ 0 & 0 & -(\lambda-1)\,(\lambda-4) \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Cette dernière matrice est triangulaire supérieure et ses éléments diagonaux sont 1, $1-\lambda$ et $-(\lambda-1)\,(\lambda-4)$!

Donc λ est valeur propre de M si et seulement si $-1 + \lambda = 0$ ou $-(\lambda-1)\,(\lambda-4) = 0$.

Par conséquent λ est valeur propre de M si et seulement si $\lambda = 1$ ou $\lambda = 4$.

Les valeurs propres de M sont 1 et 4. Alors :

$$\boxed{\text{les valeurs propres de } f \text{ sont 1 et 4.}}$$

• *Version 2* Notons que $M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $\operatorname{rg}(M - I_3) = 1 < 3$. Donc $M - I_3$ n'est pas inversible.

Ainsi 1 est valeur propre de M. De plus $\dim \text{SEP }(M,1) = 3 - \text{rg}(M - I_3) = 2$.

Notons également que $M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1+1 \\ 1+2+1 \\ 1+1+2 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

Alors 4 est valeur propre de M et $\dim \text{SEP }(M,4) \geqslant 1$. Donc $\dim \text{SEP }(M,1) + \dim \text{SEP }(M,4) \geqslant 3$.

Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres de M est inférieure ou égale à 3, M n'a pas d'autres valeurs propres que 1 et 4.

• *Version 3* Notons que $M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $\text{rg}(M - I_3) = 1 < 3$.

Donc $M - I_3$ n'est pas inversible. 1 est valeur propre de M. De plus $\dim \text{SEP }(M,1) = 3 - \text{rg}(M - I_3) = 2$.

M est symétrique à coefficients réels donc M est diagonalisable. Comme 1 est valeur propre de M et que le sous-espace propre associé est de dimension 2, M a exactement deux valeurs propres distinctes.

Notons α la seconde valeur propre de M. Le sous-espace propre associé à cette valeur propre est de dimension 1.

Dans ces conditions M est semblable à la matrice diagonale $D = \text{Diag}\,(1,1,\alpha)$. M et D étant semblables elles ont même trace. Donc $2 + \alpha = 1 + 1 + \alpha = \text{tr}\, D = \text{tr}\, M = 2 + 2 + 2 = 6$. Ainsi $\alpha = 6 - 2 = 4$.

Les valeurs propres de M sont 1 et 4.

b) $M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Alors $\text{rg}(M - I_3) = 1$.

Le théorème du rang donne alors : $\dim \text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \dim E - \text{rg}(f - \text{Id}_E) = \dim E - \text{rg}(M - I_3) = \dim E - 1$.

Ainsi $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ est un hyperplan de E. Montrons que $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ est stable par f.

Version 1 Soit x un élément de $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$.

$(f - \text{Id}_E)\big(f(x)\big) = f^2(x) - f(x) = f\big((f - \text{Id}_E)(x)\big) = f(0_E) = 0_E$. Donc $f(x)$ appartient à $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$.

$\forall x \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E), f(x) \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$. $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ est stable par f.

Remarque il faut sans doute savoir et savoir démonter que plus généralement si h est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et P un élément de $\mathbb{K}[X]$, $\text{Ker}\, P(h)$ est stable par h.

Version 2 Soit x un élément de $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$. Alors $f(x) = x$ donc $f(x)$ appartient à $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$!

$\forall x \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E), f(x) \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$. $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ est stable par f.

$$\boxed{\text{Ker}(f - \text{Id}_E) \text{ est un hyperplan de } \mathbb{R}^3 \text{ stable par } f.}$$

3) a) Soient x et y deux éléments de E de matrices respectives X et Y dans la base $\mathcal{B}$.

$f(x)$ (resp. $f^*(y)$) a pour matrice AX (resp. ${}^tAY$) dans la base $\mathcal{B}$.

Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E, $< f(x), y >= {}^t(AX)Y$ et $< x, f^*(y) >= {}^tX({}^tAY)$.

Alors $< f(x), y >= {}^t(AX)Y = {}^tX{}^tAY = {}^tX({}^tAY) =< x, f^*(y) >$.

$$\boxed{\forall (x,y) \in E \times E,\ < f(x), y >=< x, f^*(y) >.}$$

b) Soit g un second endomorphisme de E tel que $\forall (x,y) \in E \times E,\ < f(x), y >=< x, g(y) >$.

$\forall (x,y) \in E^2,\ < x, g(y) >=< f(x), y >=< x, f^*(y) >$. Donc $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ < x, g(y) - f^*(y) >= 0$.

Alors $\forall y \in E,\ g(y) - f^*(y) \in E^\perp$. Comme $E^\perp = \{0_E\}$, $\forall y \in E,\ g(y) - f^*(y) = 0_E$.

Par conséquent $\forall y \in E,\ g(y) = f^*(y)$ et ainsi $g = f^*$.

$$\boxed{f^* \text{ est l'unique endomorphisme de } E \text{ tel que } \forall (x, y) \in E \times E,\ < f(x), y >=< x, f^*(y) >.}$$

4) a) λ est valeur propre de f donc de M. Alors $M - \lambda\, I_n$ n'est pas inversible donc ${}^t(M - \lambda\, I_n)$ n'est pas inversible.

Or ${}^t(M - \lambda\, I_n) = {}^tM - \lambda\, {}^tI_n = {}^tM - \lambda\, I_n$.

Ainsi ${}^tM - \lambda\, I_n$ n'est pas inversible et λ est valeur propre de ${}^tM$ donc de f^*.

$$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } f^*.}$$

► *Remarque* *Il est aisé de montrer que* $\operatorname{Sp} f = \operatorname{Sp} f^*$. ◄

b) u n'est pas nul, car u est un vecteur propre de f^*, donc $\operatorname{Vect}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 1.

Comme $\big(\operatorname{Vect}(u)\big)^\perp$ est un supplémentaire de $\operatorname{Vect}(u)$ dans E, $\dim\big(\operatorname{Vect}(u)\big)^\perp = \dim E - \dim \operatorname{Vect}(u) = \dim E - 1$.

Alors $\big(\operatorname{Vect}(u)\big)^\perp$ est un hyperplan de E. Montrons que $\big(\operatorname{Vect}(u)\big)^\perp$ est stable par f.

Soit x un élément de $\big(\operatorname{Vect}(u)\big)^\perp$. Montrons que $f(x)$ appartient également à $\big(\operatorname{Vect}(u)\big)^\perp$.

Il suffit pour cela de montrer que $f(x)$ est orthogonal à u.

$< f(x), u >=< x, f^*(u) >=< x, \lambda\, u >= \lambda\ < x, u >$. Or x appartient à $\big(\operatorname{Vect}(u)\big)^\perp$ donc $< x, u >= 0$.

Ainsi $< f(x), u >= \lambda\ < x, u >= \lambda \times 0 = 0$. Alors $f(x)$ est orthogonal à u donc appartient à $\big(\operatorname{Vect}(u)\big)^\perp$.

Finalement $\forall x \in \big(\operatorname{Vect}(u)\big)^\perp,\ f(x) \in \big(\operatorname{Vect}(u)\big)^\perp$. $\big(\operatorname{Vect}(u)\big)^\perp$ est stable par f.

$$\boxed{\big(\operatorname{Vect}(u)\big)^\perp \text{ est un hyperplan de } E \text{ stable par } f.}$$

► *Remarque* *Il faut sans doute savoir et savoir démontrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f^* (resp. f), $F^\perp$ est stable par f (resp. f^*).* ◄

► *Remarque* *Le résultat annoncé juste avant la question 3 et démontré dans la question 4 est assez utile pour établir des résulats importants de réduction en raisonnant par récurrence sur la dimension de l'espace vectoriel. Je pense par exemple à la preuve du fait qu'un endomorphisme possèdant un polynôme annulateur scindé "possède au moins une matrice triangulaire" (et réciproquement).*

Nous allons montrer qu'il vaut pour un endomorphisme h d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E' de dimension finie n non nulle.

Soit λ une valeur propre de h.

• *Esquisse d'une preuve.* $\dim \operatorname{Ker}(h - \lambda\, \operatorname{Id}_{E'}) > 0$ *donc* $\dim \operatorname{Im}(h - \lambda\, \operatorname{Id}_{E'}) < n$.

Alors il existe un hyperplan F de E' qui contient $\operatorname{Im}(h - \lambda\, \operatorname{Id}_{E'})$. $\forall x \in F,\ h(x) = (h - \lambda\, \operatorname{Id}_{E'})(x) + \lambda\, x \in F + F \subset F$.

F est un hyperplan de E' stable par h.

• *Une preuve.* *λ est valeur propre de h donc* $\operatorname{Ker}(h - \lambda\, \operatorname{Id}_{E'})$ *n'est pas réduit au vecteur nul.*

Alors $\dim \operatorname{Ker}(h - \lambda\, \operatorname{Id}_{E'}) > 0$ *et le théorème du rang donne :* $\dim \operatorname{Im}(h - \lambda\, \operatorname{Id}_{E'}) = n - \dim \operatorname{Ker}(h - \lambda\, \operatorname{Id}_{E'}) < n$.

Montrons que $\operatorname{Im}(h - \lambda\, \operatorname{Id}_{E'})$ *est contenu dans un hyperplan de E'.*

Si $\dim \operatorname{Im}(h - \lambda\, \operatorname{Id}_{E'}) = 0$ *tout hyperplan de E' (et il en existe...) contient* $\operatorname{Im}(h - \lambda\, \operatorname{Id}_{E'})$.

Supposons maintenant que la dimension p de $\operatorname{Im}(h - \lambda\, \operatorname{Id}_{E'})$ *est non nulle.* $p < n$.

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ *une base de* $\mathrm{Im}(h - \lambda\,\mathrm{Id}_{E'})$. $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ *est une famille libre de* E'.

Le théorème de la base incomplète indique alors $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ *se complète en une base* $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ *de* E'.

Soit F *le sous-espace vectoriel de* E' *engendré par la famille* $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$.

Comme $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ *est libre,* $\dim F = n - 1 = \dim E' - 1$. *Donc* F *est un hyperplan de* E'.

De plus, comme $p < n$, $\mathrm{Im}(h - \lambda\,\mathrm{Id}_{E'}) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p) \subset \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_{n-1}) = F$.

Donc $\mathrm{Im}(h - \lambda\,\mathrm{Id}_{E'})$ *est contenu dans* F.

Soit x *un élément de* F. $h(x) - \lambda\, x = \big(h - \lambda\,\mathrm{Id}_{E'}\big)(x)$ *appartient à* $\mathrm{Im}(h - \lambda\,\mathrm{Id}_{E'})$ *donc à* F.

Comme F *est un sous espace vectoriel de* E', $\big(h(x) - \lambda\, x\big) + \lambda\, x$ *appartient à* F *donc* $h(x)$ *appartient à* F.

$\forall x \in F,\ h(x) \in F$. *Ainsi* F *est un hyperplan de* E' *stable par* h. ◀

EXERCICE 3

1) • $\forall x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[,\ f(x)=\dfrac{1}{2\,x^2} \geqslant 0$ et $\forall x \in]-1,1[,\ f(x)=0 \geqslant 0$.

Ainsi f est définie et positive sur $\mathbb{R}$.

• $x \to 0$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $x \to \dfrac{1}{2\,x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, donc f est continue sur $]-\infty,-1]$, $]-1,1[$ et $[1,+\infty[$.

Alors f est au moins continue en tout point de $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

• f est nulle sur $]-1,1[$ donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 0.

$t \to \dfrac{1}{2\,t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$. $\forall x \in [1,+\infty[,\ \displaystyle\int_1^x \frac{1}{2\,t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2\,t}\right]_1^x = -\frac{1}{2\,x}+\frac{1}{2}\cdot$

Alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{2\,t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2\,x}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot$ Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{2\,t^2}\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{1}{2}\cdot$

Comme $t \to \dfrac{1}{2\,t^2}$ est paire sur $\mathbb{R}^*$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{2\,t^2}\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{2\,t^2}\,\mathrm{d}t$ donc $\dfrac{1}{2}\cdot$

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existent et valent $\dfrac{1}{2}\cdot$

Dans ces conditions $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{1}{2}+0+\dfrac{1}{2}$ donc 1. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{f \text{ peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.}}$$

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

• Soit x un élément de $]-\infty,-1]$.

$\forall y \in]-\infty,-1],\ \displaystyle\int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_y^x \frac{1}{2\,t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2\,t}\right]_y^x = -\frac{1}{2\,x}+\frac{1}{2\,y}\cdot$

Donc $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{y\to-\infty}\int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{y\to-\infty}\left(-\frac{1}{2\,x}+\frac{1}{2\,y}\right) = -\frac{1}{2x}\cdot$

$\forall x \in]-\infty,-1],\ F(x)=-\dfrac{1}{2x}\cdot$ En particulier $F(-1)=\dfrac{1}{2}\cdot$

• Soit x un élément de $]-1,1[$.

$F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(-1)+0=\frac{1}{2}$ car f est nulle sur $]-1,1[$.

$\forall x \in]-1,1[,\ F(x)=\dfrac{1}{2}\cdot$

• Soit x un élément de $[1,+\infty[$.

Rappelons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,\mathrm{d}t = F(-1)=\frac{1}{2},\ \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1}{2\,t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}-\frac{1}{2\,x}$ (comme nous l'avons vu dans **1)**).

Alors $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\,x} = 1-\frac{1}{2\,x}\cdot$

$\forall x \in [1,+\infty[,\ F(x) = 1 - \dfrac{1}{2\,x}\cdot$

La fonction de répartition F commune aux variables aléatoires X_k est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\,x} & \text{si } x \in]-\infty,-1] \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in]-1,1[\\ 1-\dfrac{1}{2\,x} & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}.$$

3) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Soit x un réel.

$G_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = P\left(\dfrac{S_n}{n} \leqslant x\right) = P(S_n \leqslant nx) = P\big(\mathrm{Sup}(X_1, X_2, \ldots, X_n)) \leqslant nx\big)$. Alors :

$G_n(x) = P\big(\{X_1 \leqslant nx\} \cap \{X_2 \leqslant nx\} \cap \ldots \cap \{X_n \leqslant nx\}\big)$.

Or X_1, X_2, ..., X_n sont mutuellement indépendantes et ont pour fonction de répartition F. Ainsi :

$G_n(x) = P(X_1 \leqslant nx)\, P(X_2 \leqslant nx) \ldots P(X_n \leqslant nx) = \big(F(nx)\big)^n$.

Si $x \in \left]-\infty, -\dfrac{1}{n}\right]$, $nx \in]-\infty,-1]$ et $G_n(x) = \big(F(nx)\big)^n = \left(-\dfrac{1}{2\,n\,x}\right)^n$.

Si $x \in \left]-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right[$, $nx \in]-1,1[$ et $G_n(x) = \big(F(nx)\big)^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Si $x \in \left[\dfrac{1}{n}, +\infty\right[$, $nx \in [1,+\infty[$ et $G_n(x) = \big(F(nx)\big)^n = \left(1-\dfrac{1}{2\,n\,x}\right)^n$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \begin{cases} \left(-\dfrac{1}{2\,n\,x}\right)^n & \text{si } x \in \left]-\infty,-\dfrac{1}{n}\right] \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^n & \text{si } x \in \left]-\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right[\\ \left(1-\dfrac{1}{2\,n\,x}\right)^n & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{n},+\infty\right[\end{cases}.$$

4) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. G_n est une fonction de répartition donc G_n est croissante sur $\mathbb{R}$.

Alors $\forall x \in]-\infty, 0],\ G_n(x) \leqslant G_n(0) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1}{2^n}\cdot$

Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout réel x négatif ou nul : $G_n(x) \leqslant \dfrac{1}{2^n}\cdot$

b) Soit x un réel strictement positif.

Si n est un élément de $\mathbb{N}^*$, $x > \dfrac{1}{n}$ équivaut à $n > \dfrac{1}{x}$ car $z \to \dfrac{1}{z}$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

Posons alors $n_0 = \mathrm{Ent}\left(\dfrac{1}{x}\right) + 1$.

Notons que n_0 appartient à $\mathbb{N}^*$ car $\mathrm{Ent}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ appartient à $\mathbb{N}$ puisque x est strictement positif.

Soit n est un élément de $\mathbb{N}$ supérieur ou égal à n_0. $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \geqslant \mathrm{Ent}\left(\dfrac{1}{x}\right) + 1 > \dfrac{1}{x}\cdot$

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow x > \dfrac{1}{n}\cdot$

Pour tout réel x strictement positif, il existe un entier naturel n_0 non nul, tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, on a $x > \dfrac{1}{n}\cdot$

Soit x un réel strictement positif. Il existe n_0 dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow x > \dfrac{1}{n}\cdot$

Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow x \in \left[\dfrac{1}{n}, +\infty\right[$ et ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow G_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{2\,n\,x}\right)^n$.

Pour tout réel x strictement positif, il existe un entier naturel n_0 non nul, tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, on a $G_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{2\,n\,x}\right)^n$

5) a) Soit x un réel.

- Supposons d'abord que x est négatif ou nul.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant G_n(x) \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$. Donc par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = 0$.

- Supposons maintenant que x est strictement positif.

Alors il existe un élément n_0 de $\mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow x > \dfrac{1}{n}$ et $G_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{2\,n\,x}\right)^n$.

Soit n un élément de $[\![n_0, +\infty[\![$. Alors $x > \dfrac{1}{n}$ donc $\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{2\,n\,x}\cdot$ Ainsi $1 - \dfrac{1}{2\,n\,x} > 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} > 0$.

On peut alors dire que $G_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{2\,n\,x}\right)^n = e^{n\,\ln\left(1-\frac{1}{2\,n\,x}\right)}$ et ceci pour tout élément n de $[\![n_0, +\infty[\![$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2\,n\,x}\right) = 0$ donc $\ln\left(1 - \dfrac{1}{2\,n\,x}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2\,n\,x}\cdot$ Alors $n\,\ln\left(1 - \dfrac{1}{2\,n\,x}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2\,x}\cdot$

Par conséquent $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(n\,\ln\left(1 - \frac{1}{2\,n\,x}\right)\right) = -\frac{1}{2\,x}\cdot$

La continuité de la fonction exponentielle en $-\dfrac{1}{2\,x}$ permet de dire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \lim_{n\to+\infty} e^{n\,\ln\left(1-\frac{1}{2\,n\,x}\right)} = e^{-\frac{1}{2\,x}}$.

Pour tout réel x, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{2\,x}} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{2\,x}} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} G(x) = 0$ car G est nulle sur $]-\infty, 0]$. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{2\,x}} = e^0 = 1$.
- Montrons que G est croissante sur $\mathbb{R}$. Soient x et y deux réels tels que $x < y$.

Si $x < y \leqslant 0 : G(x) = G(y) = 0$ donc $G(x) \leqslant G(y)$!

Si $x \leqslant 0 < y : G(x) = 0$ et $G(y) = e^{-\frac{1}{2\,y}}$ donc $G(x) \leqslant G(y)$!

Supposons que $0 < x < y$. Alors $\dfrac{1}{2\,y} < \dfrac{1}{2\,x}$ donc $-\dfrac{1}{2\,x} < -\dfrac{1}{2\,y}$. Ainsi $G(x) = e^{-\frac{1}{2\,x}} < e^{-\frac{1}{2\,y}} = G(y)$.

Finalement $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x<y \Rightarrow G(x)\leqslant G(y)$ donc G est croissante sur $\mathbb{R}$.

• G est croissante sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} G(x)=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x)=1$ donc G prend ses valeurs dans $[0,1]$.

• G est nulle sur $]-\infty,0]$ donc G est continue sur $]-\infty,0]$. Alors G est continue en tout point de $]-\infty,0[$ et continue à gauche en 0.

$x\to -\dfrac{1}{2\,x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et $x\to e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par composition $x\to e^{-\frac{1}{2\,x}}$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc G est continue sur $]0,+\infty[$. Alors G est continue en tout point de $]0,+\infty[$

$\displaystyle\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{1}{2\,x}\right)=-\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to0^+} G(x)=\lim_{x\to0^+} e^{-\frac{1}{2\,x}}=0=G(0)$. Ainsi G est continue à droite en 0.

Ceci achève de montrer que G est continue sur $\mathbb{R}$.

• G est nulle sur $]-\infty,0]$ donc G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0]$.

$x\to -\dfrac{1}{2\,x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $x\to e^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par composition $x\to e^{-\frac{1}{2\,x}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ donc G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0]$ et $]0,+\infty[$. Donc G est au moins de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'une ensemble fini de points.

Les cinq points précédents montrent alors que :

$$\boxed{G \text{ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.}}$$

c) • Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, G_n est la fonction de répartition de Y_n.

• G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité Y d'après **b)**.

• G est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} G_n(x)=G(x)$.

Alors la suite $(Y_n)_{n\geqslant1}$ converge en loi vers la variable aléatoire Y.

$$\boxed{\text{La suite } (Y_n)_{n\geqslant1} \text{ converge en loi vers une variable aléatoire } Y \text{ dont la fonction de répartition est } G.}$$

6) Notons $F_{\frac{1}{Y}}$ la fonction de répartition de $\dfrac{1}{Y}\cdot$

Y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ donc il en est de même pour $\dfrac{1}{Y}\cdot$ Alors $\forall x\in]-\infty,0],\ F_{\frac{1}{Y}}(x)=0$.

Soit x un réel strictement positif. $F_{\frac{1}{Y}}(x)=P\left(\dfrac{1}{Y}\leqslant x\right)=P\left(Y\geqslant\dfrac{1}{x}\right)$ car Y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et x est strictement positif.

$F_{\frac{1}{Y}}(x)=1-P\left(Y<\dfrac{1}{x}\right)=1-P\left(Y\leqslant\dfrac{1}{x}\right)$ car Y est une variable aléatoire à densité.

$F_{\frac{1}{Y}}(x)=1-e^{-\frac{1}{2\,(1/x)}}=1-e^{-\frac{x}{2}}$ car $\dfrac{1}{x}$ est strictement positif.

Finalement $\forall x\in\mathbb{R},\ F_{\frac{1}{Y}}(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x\in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ ou $\forall x\in\mathbb{R},\ F_{\frac{1}{Y}}(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x\in[0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$. Alors :

$$\boxed{\frac{1}{Y} \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } \frac{1}{2}\cdot}$$

PROBLÈME

Partie 1

1) a) $u_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ et $u_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,\mathrm{d}t = \Big[-\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = -0 + 1 = 1.$

$$\boxed{u_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } u_1 = 1.}$$

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+1}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n\,(\sin t - 1)\,\mathrm{d}t.$

$\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ (\sin t)^n \geqslant 0$ et $\sin t - 1 \leqslant 0$. Ainsi $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ (\sin t)^n\,(\sin t - 1) \leqslant 0.$

Comme $0 \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n\,(\sin t - 1)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$. Donc $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

c) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ (\sin t)^n \geqslant 0$. Comme $0 \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$

Supposons que u_n est nul. Alors $t \to (\sin t)^n$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. De plus $0 \neq \dfrac{\pi}{2}$.

Dans ces conditions $t \to (\sin t)^n$ est nulle sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Or $\left(\sin\dfrac{\pi}{2}\right)^n = 1\,!\,!$

Donc u_n n'est pas nul et $u_n \geqslant 0$. Par conséquent u_n est strictement positif.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0.}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$$

2) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $u_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+1}\,\sin t\,\mathrm{d}t.$

Posons $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ u(t) = (\sin t)^{n+1}$ et $v(t) = -\cos t$.

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. De plus $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ u'(t) = (n+1)\,\cos t\,(\sin t)^n$ et $v(t) = \sin t$.

Le tout justifie l'intégration par parties suivante.

$u_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+1}\,\sin t\,\mathrm{d}t = \Big[(\sin t)^{n+1}\,(-\cos t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big((n+1)\,\cos t\,(\sin t)^n\big)\,(-\cos t)\,\mathrm{d}t.$

$u_{n+2} = -\left(\sin\dfrac{\pi}{2}\right)^{n+1}\cos\dfrac{\pi}{2} + (\sin 0)^{n+1}\,\cos 0 + (n+1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2\,(\sin t)^n\,\mathrm{d}t$. Comme $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ et $(\sin 0)^{n+1} = 0$:

$u_{n+2} = (n+1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2\,(\sin t)^n\,\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1 - (\sin t)^2\big)\,(\sin t)^n\,\mathrm{d}t.$

$u_{n+2}=(n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^n\,\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t)^{n+2}\,\mathrm{d}t\right).$

$u_{n+2}=(n+1)\,(u_n-u_{n+2})=(n+1)\,u_n-(n+1)\,u_{n+2}$. Ainsi $(n+2)\,u_{n+2}=(n+1)\,u_n$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ (n+2)\,u_{n+2}=(n+1)\,u_n.}$$

b) Montrons ce résultat par récurrence.

• $u_{2\times 0}=u_0=\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{(2\times 0)!}{(2^0\times 0!)^2}\times\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{1}{(1\times 1)^2}\times\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$.

Ainsi $u_{2\times 0}=\dfrac{(2\times 0)!}{(2^0\times 0!)^2}\times\dfrac{\pi}{2}$ et la propriété est vraie pour $n=0$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

La relation de **2) a)** permet d'écrire $(2n+2)\,u_{2n+2}=(2n+1)\,u_{2n}$. Donc $u_{2n+2}=\dfrac{2n+1}{2n+2}\,u_{2n}$.

L'hypothèse de récurrence donne $u_{2n}=\dfrac{(2n)!}{(2^n\times n!)^2}\times\dfrac{\pi}{2}$.

Alors $u_{2n+2}=\dfrac{2n+1}{2n+2}\,u_{2n}=\dfrac{2n+1}{2n+2}\,\dfrac{(2n)!}{(2^n\times n!)^2}\times\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{(2n+1)\,(2n)!}{(2n+2)\,(2^n\times n!)^2}\times\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{(2n+2)\,(2n+1)\,(2n)!}{(2n+2)^2\,(2^n\times n!)^2}\times\dfrac{\pi}{2}$.

$u_{2(n+1)}=u_{2n+2}=\dfrac{(2n+2)!}{2^2\,(n+1)^2(2^n\times n!)^2}\times\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\big(2(n+1)\big)!}{(2^{n+1}\times(n+1)!)^2}\times\dfrac{\pi}{2}$. $u_{2(n+1)}=\dfrac{\big(2(n+1)\big)!}{(2^{n+1}\times(n+1)!)^2}\times\dfrac{\pi}{2}$.

Ceci achève la récurrence. Ainsi :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_{2n}=\frac{(2n)!}{(2^n\times n!)^2}\times\frac{\pi}{2}.}$$

c) $\forall n\in\mathbb{N},\ (n+2)\,u_{n+2}\,u_{n+1}=(n+1)\,u_n\,u_{n+1}=(n+1)\,u_{n+1}\,u_n$ donc la suite $\big((n+1)\,u_{n+1}\,u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Alors $\forall n\in\mathbb{N},\ (n+1)\,u_{n+1}\,u_n=(0+1)\,u_{0+1}\,u_0=u_1\,u_0=1\times\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ (n+1)\,u_{n+1}\,u_n=\frac{\pi}{2}.}$$

d) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $(2n+1)\,u_{2n+1}\,u_{2n}=\dfrac{\pi}{2}$ et $u_{2n}>0$. Donc $u_{2n+1}=\dfrac{1}{(2n+1)\,u_{2n}}\times\dfrac{\pi}{2}$.

$u_{2n+1}=\dfrac{1}{(2n+1)\,\frac{(2n)!}{(2^n\times n!)^2}\times\frac{\pi}{2}}\times\dfrac{\pi}{2}\cdot=\dfrac{(2^n\times n!)^2}{(2n+1)\,(2n)!}=\dfrac{(2^n\times n!)^2}{(2n+1)!}$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_{2n+1}=\frac{(2^n\times n!)^2}{(2n+1)!}.}$$

3) a) $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}\,u_n$ et $u_n\neq 0$ donc $\forall n\in\mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+2}}{u_n}=\dfrac{n+1}{n+2}$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+2}}{u_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{n+2}=1$ car $\dfrac{n+1}{n+2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{n}{n}=1$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+2}}{u_n}=1.}$$

b) Rappelons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ et $u_n > 0$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+2}}{u_n} \leqslant \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+2}}{u_n} = 1$, il vient par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.}$$

c) De ce qui précède il résulte que $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

Alors $\dfrac{\pi}{2} = (n+1)\, u_{n+1}\, u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\, u_{n+1}\, u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\, u_n\, u_n = n\, u_n^2$.

Donc $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2\,n}$. Ainsi $u_n = |u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2\,n}}$.

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2\,n}}.}$$

Partie 2

---

1) Soit x un réel.

- $t \to \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$.
- $\dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t}\,\sqrt{1+t}} \underset{t\to-1^+}{\sim} \dfrac{e^{x}}{\sqrt{2}}\,\dfrac{1}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}$ et $\dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t}\,\sqrt{1+t}} \underset{t\to1^-}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{2}}\,\dfrac{1}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}$.
- $\forall t \in]-1,0],\ \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \geqslant 0$ et $\forall t \in [0,1[,\ \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \geqslant 0$.
- $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}$ et $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}$ convergent car $\dfrac{1}{2} < 1$.

Donc $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{e^{x}}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^{-x}}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}t$ convergent également.

Ce qui suit et les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ convergent. Par conséquent $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout réel } x, \text{ l'intégrale } I(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Dans la suite de cette partie, x désigne un réel strictement positif.

2) a) $\forall t \in [0,1[,\ 0 \leqslant e^{-tx} \leqslant 1$ et $0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Donc $\forall t \in [0,1[,\ 0 \leqslant \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

Par conséquent $\forall t \in [0,1[,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{\pi}\,\dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \leqslant \dfrac{1}{\pi}\,\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

Or $I(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ et $I(0) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ convergent donc $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ et $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ convergent.

Comme $0<1$, en intégrant l'encadrement précédent il vient : $0 \leqslant \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}\cdot$

Posons $M=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$. M est une constante et $0 \leqslant \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \leqslant M$.

$$\boxed{\text{Il existe une constante } M \text{ telle que } 0 \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \leqslant M.}$$

► *Remarque Pour être précis disons qu'il existe un réel M tel que $\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \leqslant M$.*

On peut même dire qu'il existe un réel M tel que $\forall x \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \leqslant M$. ◄

b) Soit u un élément de $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.

• $0 \leqslant u < 1$. Alors $-1 < -u \leqslant 0$ donc $0 < 1-u \leqslant 1$.

Comme $z \to \sqrt{z}$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$: $0=\sqrt{0}<\sqrt{1-u}\leqslant\sqrt{1}=1$. $0<\sqrt{1-u}\leqslant 1$.

La décroissance de $z \to \dfrac{1}{z}$ sur $]0,+\infty[$ donne $1 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-u}}\cdot$

• $(1+u)^2-\dfrac{1}{1-u}=\dfrac{(1-u)\,(1+u)^2-1}{1-u}=\dfrac{(1-u)\,(1+u^2+2u)-1}{1-u}=\dfrac{1+u^2+2u-u-u^3-2u^2-1}{1-u}\cdot$

$$(1+u)^2-\frac{1}{1-u}=\frac{u-u^2-u^3}{1-u}=\frac{u}{1-u}\,(1-u-u^2)=\frac{u}{1-u}\left(1+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}+u+u^2\right)\right)=\frac{u}{1-u}\left(\frac{5}{4}-\left(\frac{1}{2}+u\right)^2\right).$$

u appartient à $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ donc $\dfrac{1}{2}+u$ appartient à $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$. Alors $\left(\dfrac{1}{2}+u\right)^2$ appartient à $\left[\dfrac{1}{4},1\right]$ par croissance de $z \to z^2$ sur $[0,+\infty[$.

Par conséquent $\left(\dfrac{1}{2}+u\right)^2 \leqslant 1 \leqslant \dfrac{5}{4}\cdot$ Ainsi $\dfrac{5}{4}-\left(\dfrac{1}{2}+u\right)^2 \geqslant 0$.

$0 \leqslant u < 1$ donc $\dfrac{u}{1-u} \geqslant 0$. Finalement $(1+u)^2-\dfrac{1}{1-u}=\dfrac{u}{1-u}\left(\dfrac{5}{4}-\left(\dfrac{1}{2}+u\right)^2\right) \geqslant 0$. Alors $0 \leqslant \dfrac{1}{1-u} \leqslant (1-u)^2$.

Par croissance de $z \to \sqrt{z}$ sur $[0,+\infty[$ on obtient : $\dfrac{1}{\sqrt{1-u}}=\sqrt{\dfrac{1}{1-u}} \leqslant \sqrt{(1-u)^2}=|1-u|=1-u$.

$$\boxed{\forall u \in \left[0,\frac{1}{2}\right],\ 1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-u}} \leqslant 1+u.}$$

3) a) Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et de variance $\dfrac{1}{2}\cdot$

Posons $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(1/\sqrt{2})}\,e^{\frac{-t^2}{2\,(1/\sqrt{2})^2}}$. φ est une densité de Z, $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-t^2}$ et φ est paire sur $\mathbb{R}$.

• $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1. Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}\cdot$

Par conséquent $\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$

$E(Z)$ (resp. $V(Z)$) existe et vaut 0 (resp. $\dfrac{1}{2}$). Alors $E(Z^2)$ existe et vaut $V(Z)+\big(E(Z)\big)^2$ donc $\dfrac{1}{2}\cdot$

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}\cdot$ Comme $t \to t^2\,\varphi(t)$ est paire sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{4}\cdot$

Par conséquent $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-t^2}\right)\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{4}$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}\cdot$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ convergent. } \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ et } \int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\cdot}$$

b) Notons que $t \to \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1]$.

$t \to \sqrt{tx}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. Ceci justifie le changement de variable $u = \sqrt{tx}$ dans ce qui suit.

Soit ε un élément de $]0,1[$. $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{\varepsilon\,x}}^{\sqrt{x}} \frac{e^{-u^2}}{\frac{u}{\sqrt{x}}} \times \frac{2u}{x}\,\mathrm{d}u = \int_{\sqrt{\varepsilon\,x}}^{\sqrt{x}} \frac{2}{\sqrt{x}}\,e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{x}}\int_{\sqrt{\varepsilon\,x}}^{\sqrt{x}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$

$\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ existe. Alors, comme $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}\sqrt{\varepsilon\,x} = 0$, $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\int_{\sqrt{\varepsilon\,x}}^{\sqrt{x}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right) = \frac{2}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle\frac{2}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ (ceci pour tout x dans $]0,+\infty[$).

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ converge et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$

Comme $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \neq 0$, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$ Alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{x}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{x}}\cdot$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \text{ converge et } \int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}\cdot}$$

c) Nous allons utiliser ici une démarche analogue à celle de **b)**.

Notons que $t \to e^{-xt}\sqrt{t}$ est continue sur $]0,1]$ et même sur $[0,1]$.

$t \to \sqrt{tx}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. Ceci justifie le changement de variable $u = \sqrt{tx}$ dans ce qui suit.

Soit ε un élément de $]0,1[$.

$$\int_\varepsilon^1 e^{-tx}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{\varepsilon\,x}}^{\sqrt{x}} e^{-u^2} \times \frac{u}{\sqrt{x}} \times \frac{2u}{x}\,\mathrm{d}u = \int_{\sqrt{\varepsilon\,x}}^{\sqrt{x}} \frac{2}{x\sqrt{x}}\,u^2\,e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{x\sqrt{x}}\int_{\sqrt{\varepsilon\,x}}^{\sqrt{x}} u^2\,e^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

$\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} u^2\,e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ existe et $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}\sqrt{\varepsilon\,x} = 0$. Donc :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 e^{-tx}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{2}{x\sqrt{x}}\int_{\sqrt{\varepsilon\,x}}^{\sqrt{x}} u^2\,e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right) = \frac{2}{x\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} u^2\,e^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 e^{-tx}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$ existe (normal !) et vaut $\displaystyle\frac{2}{x\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} u^2\,e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ (ceci pour tout x dans $]0,+\infty[$).

$\displaystyle\int_0^{+\infty} u^2\,e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ converge et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\sqrt{x}} u^2\,e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\cdot$

Comme $\dfrac{\sqrt{\pi}}{4} \neq 0$, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} u^2\,e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{4}\cdot$ Alors $\displaystyle\int_0^1 e^{-tx}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{x\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} u^2\,e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{x\sqrt{x}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,x\sqrt{x}}\cdot$

$$\boxed{\int_0^1 e^{-tx}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t \text{ existe et } \int_0^1 e^{-tx}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\,x\sqrt{x}}\cdot}$$

4) a) $t \to t+1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ceci justifie le changement de variable $u = 1+t$ dans ce qui suit.

Soit ε un élément de $]-1,0[$. $\displaystyle\int_\varepsilon^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{1+\varepsilon}^1 \frac{e^{-(u-1)\,x}}{\sqrt{1-(u-1)^2}}\,\mathrm{d}u.$

$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to(-1)^+}(1+\varepsilon) = 0$ et $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge.

Alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(u-1)\,x}}{\sqrt{1-(u-1)^2}}\,\mathrm{d}u$ converge et $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{e^{-(u-1)\,x}}{\sqrt{1-(u-1)^2}}\,\mathrm{d}u.$

$$\int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{e^{-(u-1)\,x}}{\sqrt{1-(u-1)^2}}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{e^x\,e^{-ux}}{\sqrt{1-(u^2+1-2u)}}\,\mathrm{d}u = e^x \int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{2u-u^2}}\,\mathrm{d}u.$$

$$\int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = e^x \int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{2}\sqrt{u-\frac{u^2}{2}}}\,\mathrm{d}u = \frac{e^x}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u\,\left(1-\frac{u}{2}\right)}}\,\mathrm{d}u.$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u\,\left(1-\frac{u}{2}\right)}}\,\mathrm{d}u \text{ converge et } \int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{e^x}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u\,\left(1-\frac{u}{2}\right)}}\,\mathrm{d}u.}$$

b) Soit u un élément de $]0,1]$. $\dfrac{u}{2}$ appartient à $\left]0,\dfrac{1}{2}\right]$. **2) b)** donne alors $1 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{u}{2}}} \leqslant 1+\dfrac{u}{2}\cdot$

Comme e^{-ux} et $\dfrac{1}{\sqrt{u}}$ sont positifs : $\dfrac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} \leqslant \dfrac{e^{-ux}}{\sqrt{u}\sqrt{1-\frac{u}{2}}} \leqslant \dfrac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\left(1+\dfrac{u}{2}\right).$

Ainsi $\forall u \in]0,1]$, $\dfrac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} \leqslant \dfrac{e^{-ux}}{\sqrt{u\,\left(1-\frac{u}{2}\right)}} \leqslant \dfrac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} + \dfrac{1}{2}\,e^{-ux}\sqrt{u}.$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u\,\left(1-\frac{u}{2}\right)}}\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^1 e^{-ux}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u$ convergent. Alors, comme $0 \leqslant 1$:

$\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u\,\left(1-\frac{u}{2}\right)}}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-ux}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u$. De plus $\sqrt{\dfrac{x}{\pi}}$ est positif donc :

$\displaystyle\sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \leqslant \sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u\,\left(1-\frac{u}{2}\right)}}\,\mathrm{d}u \leqslant \sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_0^1 e^{-ux}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u$ et ceci pour tout élément x de $]0,+\infty[$ $\quad(\bigstar)$.

D'après **3) b)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$ donc $\displaystyle\sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{x}{\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{x}} = 1.$

Alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\right) = 1.$

D'après **3) c)** $\displaystyle\int_0^1 e^{-ux}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\,x\sqrt{x}}$ donc $\displaystyle\sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_0^1 e^{-ux}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{x}{\pi}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2\,x\sqrt{x}} = \frac{1}{2\,x}\cdot$

Alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_0^1 e^{-ux}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\,x} = 0.$

Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_0^1 e^{-ux}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u\right)\right) = 1.$

L'encadrement $(\bigstar)$ permet alors de dire que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u\,\left(1-\frac{u}{2}\right)}}\,\mathrm{d}u\right) = 1.$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u\left(1-\frac{u}{2}\right)}}\,\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{\pi}{x}}}\right)=1$. Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u\,\left(1-\frac{u}{2}\right)}}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$.

Par conséquent $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t=\frac{e^x}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u\,\left(1-\frac{u}{2}\right)}}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{e^x}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{x}}=\frac{e^x\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\,x}}=\frac{e^x\times\pi}{\sqrt{2\,\pi\,x}}$.

Finalement $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{e^x}{\sqrt{2\,\pi\,x}}$.

Par croissance comparée $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\sqrt{2\,\pi\,x}}=+\infty$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t\right)=+\infty$.

Comme nous l'avons vu dans **2) a)** $\displaystyle x\to\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ est bornée sur $]0,+\infty[$.

Alors $\displaystyle x\to\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ est négligeable devant $\displaystyle x\to\frac{1}{\pi}\int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ au voisinage de $+\infty$. Donc :

$\displaystyle I(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{e^x}{\sqrt{2\,\pi\,x}}$. Ainsi :

$$\boxed{I(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{e^x}{\sqrt{2\pi\,x}}}$$

Partie 3

---

1) $\big(\{X=k\}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne alors :

$P(X=Y)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}P\big(\{X=k\}\cap\{X=Y\}\big)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}P\big(\{X=k\}\cap\{Y=k\}\big)$.

Comme X et Y sont indépendantes et suivent la loi de Poisson de paramètre λ :

$$P(X=Y)=\sum_{k=0}^{+\infty}\big(P(X=k)\,P(Y=k)\big)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda}\right)^2=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}\,e^{-2\lambda}\right)=e^{-2\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}.$$

$$\boxed{P(X=Y)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}\,e^{-2\lambda}\right)=e^{-2\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}.}$$

2) a) Soit t un réel de $[-1,1]$ et x un réel strictement positif.

Soit u un élément compris entre 0 et $-tx$. Notons que $|u|\leqslant|-tx|$. Alors :

$u\leqslant|u|\leqslant|-tx|=|tx|=|t|\,|x|=|t|\,x$. Or $|t|\leqslant 1$ et $x>0$ donc $u\leqslant|t|\,x\leqslant x$.

Par croissance de la fonction exponentielle on obtient : $e^u\leqslant e^x$.

$$\boxed{\text{Pour tout } u \text{ compris entre } 0 \text{ et } -tx,\ e^u\leqslant e^x.}$$

Notons ψ la fonction exponentielle. ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, $\forall k\in\mathbb{N},\ \psi^{(k)}=\psi$ et $\forall k\in\mathbb{N},\ \psi^{(k)}(0)=\psi(0)=1$.

Soit n un élément de $\mathbb{N}$. L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à ψ à l'ordre $2n$ sur le segment d'extrémités 0 et $-tx$ (que nous noterons $[0,-tx]$...) donne :

$$\left|\psi(-tx)-\sum_{k=0}^{2n}\left(\frac{(-tx-0)^k}{k!}\,\psi^{(k)}(0)\right)\right|\leqslant\frac{|-tx-0|^{2n+1}}{(2n+1)!}\underset{u\in[0,-tx]}{\mathrm{Max}}|\psi^{(2n+1)}(u)|.\ \text{Donc :}$$

$$\left|e^{-tx}-\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-tx)^k}{k!}\right|\leqslant\frac{|tx|^{2n+1}}{(2n+1)!}\underset{u\in[0,-tx]}{\mathrm{Max}}\,e^u=\frac{|t|^{2n+1}\,|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\underset{u\in[0,-tx]}{\mathrm{Max}}\,e^u=\frac{|t|^{2n+1}\,x^{2n+1}}{(2n+1)!}\underset{u\in[0,-tx]}{\mathrm{Max}}\,e^u.$$

De plus pour tout u compris entre 0 et $-tx$, $e^u\leqslant e^x$ donc $\underset{u\in[0,-tx]}{\mathrm{Max}}\,e^u\leqslant e^x$ et $\dfrac{|t|^{2n+1}\,x^{2n+1}}{(2n+1)!}\geqslant 0$.

Ainsi $\left|e^{-tx}-\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-tx)^k}{k!}\right|\leqslant\dfrac{|t|^{2n+1}\,x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,e^x$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall t\in[-1,1],\ \forall x\in]0,+\infty[,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \left|e^{-tx}-\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-tx)^k}{k!}\right|\leqslant\dfrac{|t|^{2n+1}\,x^{2n+1}}{(2n+1)!}\underset{u\in[0,-tx]}{\mathrm{Max}}\,e^u.\\ \forall t\in[-1,1],\ \forall x\in]0,+\infty[,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \left|e^{-tx}-\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-tx)^k}{k!}\right|\leqslant\dfrac{|t|^{2n+1}\,x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,e^x.\end{array}}$$

b) Soit k dans $\mathbb{N}$. $t\to\dfrac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0,1[$.

- $\forall t\in[0,1[,\ 0\leqslant t^k\leqslant 1.$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\geqslant 0$ donc $\forall t\in[0,1[,\ 0\leqslant\dfrac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.
- $I(0)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ converge donc $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ converge. Ainsi $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ converge.

Les deux points précédents et les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_0^1\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

Soit ε un élément de $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. $t\to\sin t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ceci autorise le changement de variable $u=\sin t$ dans ce qui suit.

Notons que si $t\in[0,\varepsilon]$, $\cos t\geqslant 0$ et alors $\cos t=\sqrt{(\cos t)^2}=\sqrt{1-(\sin t)^2}$.

$$\int_0^\varepsilon(\sin t)^k\,\mathrm{d}t=\int_0^\varepsilon\frac{(\sin t)^k}{\cos t}\cos t\,\mathrm{d}t=\int_0^\varepsilon\frac{(\sin t)^k}{\sqrt{1-(\sin t)^2}}\cos t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\sin\varepsilon}\frac{u^k}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u.$$

Or $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to\frac{\pi}{2}}\sin\varepsilon=1$ et $\displaystyle\int_0^1\frac{u^k}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u$ converge. Donc en faisant tendre ε vers $\dfrac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures il vient :

$$u_k=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^k\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{u^k}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u=\int_0^1\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N},\ \int_0^1\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } u_k.}$$

► *Remarque* *Soit k un élément de $\mathbb{N}$. $t\to\dfrac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et a la parité de k sur $]-1,1[$. Alors ce qui précède permet de dire que $\displaystyle\int_{-1}^0\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle\int_0^1\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ si k est pair et $-\displaystyle\int_0^1\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ si k est impair.*

Dans ces conditions $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $2\displaystyle\int_0^1\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ si k est pair et 0 si k est impair.

$$\boxed{\textit{Pour tout élément } k \textit{ de } \mathbb{N},\ \int_{-1}^1\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \textit{ converge et vaut } 2\,u_k \textit{ si } k \textit{ est pair et } 0 \textit{ si } k \textit{ est impair.}}$$ ◄

c) Soit x un réel strictement positif et soit n un élément de $\mathbb{N}$.

Soient α et β deux éléments de $]-1,1[$ tels que $\alpha<\beta$.

Si t appartient à $[\alpha,\beta]$, t appartient à $]-1,1[$ donc $\left|e^{-tx}-\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-tx)^k}{k!}\right|\leqslant \dfrac{|t|^{2n+1}\,x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,e^x$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\geqslant 0$.

Alors $\forall t\in[\alpha,\beta]$, $\left|\dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}-\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-tx)^k}{k!\,\sqrt{1-t^2}}\right|=\left|e^{-tx}-\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-tx)^k}{k!}\right|\times\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\leqslant\dfrac{|t|^{2n+1}\,x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,e^x\times\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

Donc $\forall t\in[\alpha,\beta]$, $\left|\dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}-\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\left(\frac{(-x)^k}{k!}\,\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\right)\right|\leqslant\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,e^x\,\dfrac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}$.

$\alpha<\beta$ donc en intégrant on obtient : $\displaystyle\int_\alpha^\beta\left|\frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}-\sum_{k=0}^{2n}\left(\frac{(-x)^k}{k!}\,\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\right)\right|\mathrm{d}t\leqslant\int_\alpha^\beta\left(\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,e^x\,\frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\right)\mathrm{d}t$.

Or $\left|\displaystyle\int_\alpha^\beta\left(\frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}-\sum_{k=0}^{2n}\left(\frac{(-x)^k}{k!}\,\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\right)\right)\mathrm{d}t\right|\leqslant\displaystyle\int_\alpha^\beta\left|\frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}-\sum_{k=0}^{2n}(\frac{(-x)^k}{k!}\,\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\right|\mathrm{d}t$ car $\alpha<\beta$. Donc :

$\left|\displaystyle\int_\alpha^\beta\left(\frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}-\sum_{k=0}^{2n}\left(\frac{(-x)^k}{k!}\,\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\right)\right)\mathrm{d}t\right|\leqslant\displaystyle\int_\alpha^\beta\left(\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,e^x\,\frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\right)\mathrm{d}t$. Par conséquent :

$$\left|\int_\alpha^\beta\frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t-\sum_{k=0}^{2n}\left(\frac{(-x)^k}{k!}\int_\alpha^\beta\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t\right)\right|\leqslant\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,e^x\int_\alpha^\beta\frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t\qquad(\bigstar).$$

- $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\pi\,I(x)$.

- Pour tout k dans $\mathbb{N}$ $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $2\,u_k$ si k est pair et 0 si k est impair d'après la remarque de **2) b)**.

- $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{t^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge donc $\displaystyle\int_{-1}^0\frac{-t^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1\frac{t^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ convergent.

Alors $\displaystyle\int_{-1}^0\frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1\frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ convergent donc $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge.

Ces trois points permettent de faire tendre α vers -1 par valeurs supérieures et β vers 1 par valeurs inférieures dans $(\bigstar)$ et l'on obtient ainsi :

$\left|\displaystyle\int_{-1}^1\frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t-\sum_{k=0}^{2n}\left(\frac{(-x)^k}{k!}\int_{-1}^1\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t\right)\right|\leqslant\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,e^x\displaystyle\int_{-1}^1\frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$. Ce qui donne encore :

$\left|\pi\,I(x)-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-x)^{2k}}{(2k)!}\,(2\,u_k)\right)\right|\leqslant\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,e^x\displaystyle\int_{-1}^1\frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$. Ainsi :

$$\left|\pi\,I(x)-\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x^{2k}}{(2k)!}\,(2\,u_k)\right)\right|\leqslant\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,e^x\int_{-1}^1\frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

$t\to\dfrac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}$ est paire sur $]-1,1[$. Alors $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t=2\int_0^1\frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t=2\,u_{2n+1}$. Donc

$$\left|\pi\,I(x)-\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x^{2k}}{(2k)!}\,(2\,u_k)\right)\right|\leqslant\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,e^x\,(2\,u_{2n+1})=\frac{2\,x^{2n+1}\,e^x}{(2n+1)!}\,u_{2n+1}.$$

En divisant par π il vient : $\left|I(x)-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\,\frac{x^{2k}}{(2k)!}\,(2\,u_k)\right)\right|\leqslant\dfrac{2\,x^{2n+1}\,e^x}{\pi\,(2n+1)!}\,u_{2n+1}$.

Or $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = \dfrac{(2k)!}{(2^k \times k!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$ donc $\forall k \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{\pi}\,\dfrac{x^{2k}}{(2k)!}\,(2\,u_k) = \dfrac{1}{\pi}\,\dfrac{x^{2k}}{(2k)!}\,2\,\dfrac{(2k)!}{(2^k \times k!)^2}\,\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{x^{2k}}{(2^k \times k!)^2} = \dfrac{x^{2k}}{(k!)^2\,2^{2k}}\cdot$

Ainsi $\left| I(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(k!)^2\,2^{2k}} \right| \leqslant \dfrac{2\,x^{2n+1}\,e^x}{\pi\,(2n+1)!}\,u_{2n+1}.$

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left| I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(k!)^2\,2^{2k}} \right| \leqslant \frac{2\,x^{2n+1}\,e^x}{\pi\,(2n+1)!}\,u_{2n+1}.}$$

d) Soit x un réel strictement positif.

La série de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ converge donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$. Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$.

Nous avons vu dans la partie 1 que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2\,n}}$. Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{\pi}{2\,n}} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$.

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2\,x^{2n+1}\,e^x}{\pi\,(2n+1)!}\,u_{2n+1} \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2\,e^x}{\pi}\,\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,u_{2n+1} \right) = 0$.

L'encadrement de **c)** permet alors de dire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(k!)^2\,2^{2k}} = I(x)$.

Donc la série de terme général $\dfrac{x^{2k}}{(k!)^2\,2^{2k}}$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2k}}{(k!)^2\,2^{2k}} = I(x)$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif la série de terme général } \frac{x^{2k}}{(k!)^2\,2^{2k}} \text{ converge et } I(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(k!)^2\,2^{2k}}.}$$

3) $P(X=Y) = e^{-2\lambda} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda^{2k}}{(k!)^2} = e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(2\,\lambda)^{2k}}{(k!)^2\,2^{2k}} = e^{-2\lambda}\,I(2\lambda)$ car λ est un réel strictement positif.

La partie 2 a montré que $I(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{\sqrt{2\,\pi\,x}}$ donc $I(2\,\lambda) \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{2\lambda}}{\sqrt{2\,\pi\,2\,\lambda}} = \dfrac{e^{2\lambda}}{2\,\sqrt{\pi\,\lambda}}\cdot$

$P(X=Y) = e^{-2\lambda}\,I(2\lambda) \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} e^{-2\lambda}\,\dfrac{e^{2\lambda}}{2\,\sqrt{\pi\,\lambda}} = \dfrac{1}{2\,\sqrt{\pi\,\lambda}}\cdot$

$$\boxed{P(X=Y) \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\,\sqrt{\pi\,\lambda}}.}$$
