EXTREMUM SANS CONDITION D'ORDRE 2

Exercice $\forall (x,y)\in]0,+\infty[\times]0,+\infty[,\ f(x,y)=\dfrac{xy}{(1+x^2)(1+y^2)}$.

Étudier les extrema de f.

Posons $\Omega =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme produit de deux ouverts de $\mathbb{R}$.

f est de classe C^1 sur Ω car f est la restriction à Ω d'une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur Ω.

Dans ces conditions si f admet un extremum local en un point A de Ω, $\nabla f(A)=0_{\mathbb{R}^2}$ donc A est un point critique de f. Cherchons les points critiques de f.

Soit $X=(x,y)\in\Omega$.

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(X)=\frac{\partial f}{\partial y}(X)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{1+y^2}\,\dfrac{(1+x^2)-x\times 2x}{(1+x^2)^2}=0 \\ \dfrac{x}{1+x^2}\,\dfrac{(1+y^2)-y\times 2y}{(1+y^2)^2}=0 \end{cases}$$

$X=(x,y)\in\Omega$, $x>0$ $y>0$

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2=0 \\ 1-y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

<u>f admet un point critique et un seul : $A=(1,1)$.</u>

Soit $X=(x,y)\in\Omega$. $f(X)-f(A)=\dfrac{xy}{(1+x^2)(1+y^2)}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{4xy-(1+x^2)(1+y^2)}{4(1+x^2)(1+y^2)}$.

$f(X)-f(A)$ est du signe de $4xy-(1+x^2)(1+y^2)$

$4xy-(1+x^2)(1+y^2)=2xy-1-x^2y^2+2xy-x^2-y^2$

$4xy-(1+x^2)(1+y^2)=-(xy-1)^2-(x-y)^2\leqslant 0$.

$\forall X=(x,y)\in\Omega,\ f(X)-f(A)\leqslant 0$.

<u>f admet en A un maximum global qui vaut $1/4$.</u>

<u>Exercice</u>.. Retrouver ce résultat en étudiant $t\mapsto \dfrac{t}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$!

EXTREMUM SANS CONDITION D'ORDRE 2

Exercice $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-2x+4}{x^2+y^2+2x+4}$.

Étudier les extrema de f.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2+y^2+2x+4 = (x+1)^2+y^2+3 > 0$.

$(x,y) \to x^2+y^2-2x+4$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynôme.

$(x,y) \to x^2+y^2+2x+4$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynôme et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$.

Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2$ est un ouvert. Alors si f admet un extremum local en un point A de $\mathbb{R}^2$, $\nabla f(A) = 0_{\mathbb{R}^2}$ et A est un point critique de f.

Cherchons les points critiques de f. Soit $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(X) = \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{(x^2+y^2+2x+4)^2}\left[(2x-2)(x^2+y^2+2x+4)-(x^2+y^2-2x+4)(2x+2)\right]=0 \\ \dfrac{1}{(x^2+y^2+2x+4)^2}\left[2y(x^2+y^2+2x+4)-(x^2+y^2-2x+4)2y\right]=0 \end{cases}$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2x(x^2+y^2+2x+4-x^2-y^2+2x-4) - 2(x^2+y^2+2x+4+x^2+y^2-2x+4) \\ 0 = 2y(x^2+y^2+2x+4-x^2-y^2+2x-4) = 8xy \end{cases}$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ 8x^2-4(x^2+y^2+4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2+4 = 0\ ! \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 0 \\ \text{ou} \\ 2x^2-(x^2+4) = 0 \end{cases}$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

<u>f admet deux points critiques : $A = (2,0)$ et $B = (-2,0)$.</u>

$$f(A) = \frac{4-4+4}{4+4+4} = \frac{1}{3} \text{ et } f(B) = \frac{4+4+4}{4-4+4} = 3.$$

Soit $H=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

$$f(A+H)-f(A)=\frac{(2+\alpha)^2+\beta^2-2(2+\alpha)+4}{(2+\alpha)^2+\beta^2+2(2+\alpha)+4}-\frac{1}{3}=\frac{\alpha^2+\beta^2+2\alpha+4}{\alpha^2+\beta^2+6\alpha+12}-\frac{1}{3}$$

$$f(A+H)-f(A)=\frac{3\alpha^2+3\beta^2+6\alpha+12-\alpha^2-\beta^2-6\alpha-12}{3\left[(\alpha+3)^2+\beta^2+3\right]}=\frac{2\alpha^2+2\beta^2}{3\left[(\alpha+3)^2+\beta^2+3\right]}\geqslant 0$$

$\forall H\in\mathbb{R}^2$, $f(A+H)-f(A)\geqslant 0$. f admet en A un minimum global qui vaut 1/3

Soit $X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$(-x,y)\in\mathbb{R}^2$ donc $f(-x,y)=\dfrac{x^2+y^2+2x+4}{x^2+y^2-2x+4}\geqslant f(A)=\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{x^2+y^2+2x+4}{x^2+y^2-2x+4}\geqslant\dfrac{1}{3}$

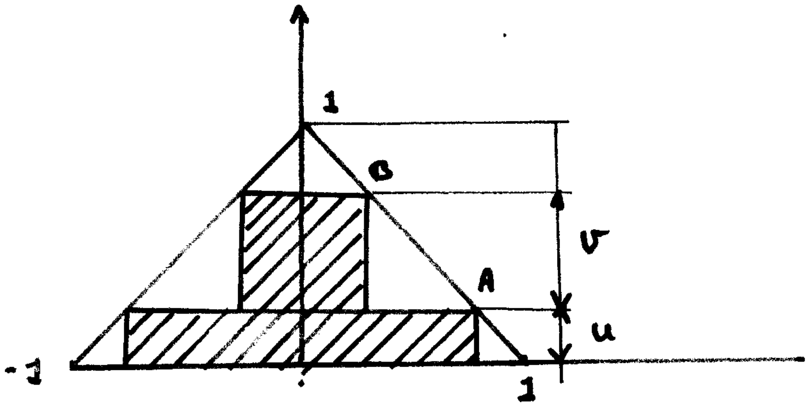
Alors $3\geqslant\dfrac{x^2+y^2-2x+4}{x^2+y^2+2x+4}=f(X)$ ou $f(B)\geqslant f(X)$.

$\forall X\in\mathbb{R}^2$, $f(X)\leqslant f(B)$. f admet en B un maximum global qui vaut 3.

EXTREMUM SANS CONDITION D'ORDRE 2

Exercice

Trouver u et v pour que la surface hachurée soit maximum.



Les points A et B sont sur la droite d'équation $y = -x + 1$.

Notons (x_A, y_A) et (x_B, y_B) les coordonnées de A et B.

$y_A = u$ et $y_B = u+v$. Alors $x_A = 1 - y_A = 1-u$ et $x_B = 1 - y_B = 1-u-v$.

La surface hachurée est $2u(1-u) + 2v(1-u-v) = 2[u+v-u^2-v^2-uv]$.

Posons alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = 2[x+y-x^2-y^2-xy]$.

f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Si f possède un extremum local en un point A de $\mathbb{R}^2$, A est un point critique de f. Cherchons les points critiques de f. Soit $X=(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(X) = \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x-y=0 \\ 1-2y-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x-y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{3}$.

$A=(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ est le seul point critique de f. Soit $H=(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

$f(A+H)-f(A) = 2\left[(\frac{1}{3}+\alpha)+(\frac{1}{3}+\beta)-(\frac{1}{3}+\alpha)^2-(\frac{1}{3}+\beta)^2-(\frac{1}{3}+\alpha)(\frac{1}{3}+\beta)\right] - 2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\right]$

$f(A+H)-f(A) = 2\left[\frac{1}{3}+\alpha+\frac{1}{3}+\beta-\frac{1}{9}-\frac{2}{3}\alpha-\alpha^2-\frac{1}{9}-\frac{2}{3}\beta-\beta^2-\frac{1}{9}-\frac{\alpha}{3}-\frac{\beta}{3}-\alpha\beta \quad -\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right]$

$f(A+H)-f(A) = 2(-\alpha^2-\beta^2-\alpha\beta) = -2\left[(\alpha+\frac{\beta}{2})^2+\frac{3\beta^2}{4}\right] \leq 0$.

$\forall H \in \mathbb{R}^2$, $f(A+H)-f(A) \leq 0$. f admet sur $\mathbb{R}^2$ un maximum global en $A=(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ qui vaut $\frac{2}{3}$.

Notons que $0 \leq \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3}+\frac{1}{3} \leq 1$.

Nous pouvons alors dire que la surface hachurée est maximum pour $u=v=\frac{1}{3}$.

EXTREMUM SANS CONDITION D'ORDRE 2

Exercice $\mathcal{R}$ est un repère orthonormé du plan $\mathcal{P}$.

$\mathcal{C}_1$ est la parabole d'équation $y = x^2$ dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{C}_2$ est la droite d'équation $y = x - 2$ dans $\mathcal{R}$.

Calculer la distance de $\mathcal{C}_1$ à $\mathcal{C}_2$.

Il s'agit de calculer $\alpha = \displaystyle\inf_{M \in \mathcal{C}_1, \, N \in \mathcal{C}_2} d(M,N)$.

Soit M un point de $\mathcal{C}_1$ d'abscisse a et N un point de $\mathcal{C}_2$ d'abscisse b.

L'ordonnée de M (resp. N) est a^2 (resp. $b-2$).

$d(M,N) = \sqrt{(b-a)^2+(b-2-a^2)^2}$; $d^2(M,N) = (b-a)^2+(b-2-a^2)^2$.

Notons que $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et que $\alpha^2 = \displaystyle\inf_{M \in \mathcal{C}_1, N \in \mathcal{C}_2} d^2(M,N)$. Cherchons donc $\displaystyle\inf_{M \in \mathcal{C}_1, \, N \in \mathcal{C}_2} d^2(M,N)$.

Ce qui revient à trouver $\displaystyle\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \left[(b-a)^2+(b-2-a^2)^2\right]$.

Posons $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x-y)^2+(x-2-y^2)^2$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynôme. Soit $X=(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $L_2 \leftarrow (L_1+L_2)/2$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(X) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(X) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x-y)+2(x-2-y^2)=0 \\ -2(x-y)+2(-2y)(x-2-y^2)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-y+(x-2-y^2)=0 \\ (x-2-y^2)\left[1-2y\right]=0 \end{cases}$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases} y = 1/2 \\ x-\frac{1}{2}+x-2-\frac{1}{4}=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x-2-y^2=0 \\ x-y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=1/2 \\ 2x = 2+\frac{3}{4} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = x \\ 0 = x-2-x^2 = -(x^2-x+2) \end{cases}$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{4}\right) = \frac{11}{8} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = x \\ 0 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 2 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \quad ! \end{cases}$$

$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff x = \dfrac{11}{8}$ et $y = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi $A = \left(\dfrac{11}{8}, \dfrac{1}{2}\right)$ est le seul point critique de f.

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y) = (y-x)^2 + (x-2-y^2)^2 = y^2+x^2-2xy+x^2+4+y^4-4x+4y^2-2xy^2$

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y) = y^4+5y^2+2x^2-4x-2xy-2xy^2+4$

$f(A) = f\left(\frac{11}{8},\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{11}{8}\right)^2 - \frac{44}{8} - 2\,\frac{11}{8}\,\frac{1}{2} - 2\,\frac{11}{8}\times\frac{1}{4} + 4]$

$f(A) = \frac{1}{32}[2+40+121-176-44-22+128] = \frac{49}{32}.$

Soit $H = (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

$f(A+H)-f(A) = \left(\frac{1}{2}+\beta\right)^4 + 5\left(\frac{1}{2}+\beta\right)^2 + 2\left(\frac{11}{8}+\alpha\right)^2 - 4\left(\frac{11}{8}+\alpha\right) - 2\left(\frac{11}{8}+\alpha\right)\left(\frac{1}{2}+\beta\right) - 2\left(\frac{11}{8}+\alpha\right)\left(\frac{1}{2}+\beta\right)^2 + 4 - \frac{49}{32}$

$f(A+H)-f(A) = \beta^4 + 4\times\frac{1}{2}\beta^3 + 6\times\frac{1}{4}\beta^2 + 4\times\frac{1}{8}\beta + 5\beta^2 + 5\beta + 2\alpha^2 + \frac{11}{2}\alpha - 4\alpha - \alpha - 2\alpha\beta - \frac{11}{4}\beta - 2\alpha\beta^2 - 2\alpha\beta - \frac{\alpha}{2}$
$- \frac{11}{4}\beta - \frac{11}{4}\beta^2.$ (les constantes partent !!)

$f(A+H)-f(A) = \beta^4 + 2\beta^3 + \frac{15}{4}\beta^2 + 2\alpha^2 - 4\alpha\beta - 2\alpha\beta^2.$

$f(A+H)-f(A) = 2\left(\alpha^2 - 2\alpha\beta - \alpha\beta^2\right) + \beta^4 + 2\beta^3 + \frac{15}{4}\beta^2.$

$f(A+H)-f(A) = 2\left[\left(\alpha-\beta-\frac{\beta^2}{2}\right)^2 - \left(\beta+\frac{\beta^2}{2}\right)^2\right] + \beta^4 + 2\beta^3 + \frac{15}{4}\beta^2$

$f(A+H)-f(A) = 2\left(\alpha-\beta-\frac{\beta^2}{2}\right)^2 - 2\beta^2 - \frac{\beta^4}{2} - 2\beta^3 + \beta^4 + 2\beta^3 + \frac{15}{4}\beta^2$

$f(A+H)-f(A) = 2\left(\alpha-\beta-\frac{\beta^2}{2}\right)^2 + \frac{\beta^4}{2} + \frac{7\beta^2}{2} \geqslant 0$!!

Alors f admet un minimum global atteint en le seul point $A = \left(\frac{11}{8},\frac{1}{2}\right)$ qui vaut $\frac{49}{32}$.

Alors $\min\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\left[(b-a)^2 + (b-2-a^2)^2\right]$ existe, vaut $\frac{49}{32}$ et est atteint uniquement au point $\left(\frac{1}{2},\frac{11}{8}\right)$ (ok !! ; "$b=x$ et $a=y$" !!)

Alors $d^2 = \frac{49}{32}$ et ainsi $\underline{\underline{d(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2) = \alpha = \frac{7}{4\sqrt{2}}}}.$

<u>Remarque..</u> $\exists!\ (M_0,N_0)\in\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2,\ d(M_0,N_0) = d(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2).$

M_0 a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ et N_0 a pour coordonnées $\left(\frac{11}{8},-\frac{5}{8}\right).$

EXTREMUM AVEC OU SANS CONDITION D'ORDRE 2

Exercice $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=x^4+2\,x^2+y^2-4\,xy+4\,x-4\,y+3.$

Montrer que f admet un point critique et un seul A.

f admet-elle un extremum en A ?

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynôme. Soit $X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(X)=\frac{\partial f}{\partial y}(X)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3+4x-4y+4=0 \\ 2y-4x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2 \\ x^3+x-2x-2+1=0 \end{cases}$$

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2 \\ x^3-x-1=0 \end{cases}.$$

Posons $\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi(x)=x^3-x-1$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi'(x)=3x^2-1=3\left(x-\frac{1}{\sqrt3}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt3}\right)$

x	$-\infty$		$-1/\sqrt3$		$1/\sqrt3$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	a	$\searrow$	b	$\nearrow$	$+\infty$

$a=\varphi\left(-\frac{1}{\sqrt3}\right)=-\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt3}+\frac{1}{\sqrt3}-1=\frac{1}{3\sqrt3}(-3\sqrt3+2)<0$

$b=\varphi\left(\frac{1}{\sqrt3}\right)=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt3}-\frac{1}{\sqrt3}-1=\frac{1}{3\sqrt3}(-2-3\sqrt3)<0$

φ est croissante sur $\left]-\infty,-\frac{1}{\sqrt3}\right]$ et décroissante sur $\left[-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right]$.

$\forall x\in\left]-\infty,\frac{1}{\sqrt3}\right],\ \varphi(x)\leq\varphi\left(-\frac{1}{\sqrt3}\right)<0.$

φ est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt3},+\infty\right[$, $\varphi\left(\frac{1}{\sqrt3}\right)=b$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$

φ définit une bijection de $\left[\frac{1}{\sqrt3},+\infty\right[$ sur $[b,+\infty[$.

$0\in[b,+\infty[$ car $b<0$, ainsi $\exists!\ \gamma\in[b,+\infty[,\ \varphi(\gamma)=0$.

Finalement l'équation $x\in\mathbb{R}$ et $\varphi(x)=0$ admet une solution et une seule : γ.

Alors $\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\gamma \\ y=2x+2=2\gamma+2 \end{cases}.$

f admet un point critique et un seul $A=(\gamma,2\gamma+2)$.

Exercice .. Notons que $\gamma = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{23}{27}}\right)} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{23}{27}}\right)}$ $(\simeq 1{,}324\,717\,957)$

Soit $H=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

$$f(A+H)-f(A) = (\gamma+\alpha)^4 + 2(\gamma+\alpha)^2 + (2\gamma+2+\beta)^2 - 4(\gamma+\alpha)(2\gamma+2+\beta) + 4(\gamma+\alpha) - 4(2\gamma+2+\beta) + 3 - \left[\gamma^4 + 2\gamma^2 + (2\gamma+2)^2 + 4\gamma - 4(2\gamma+2) + 3\right]$$

$$f(A+H)-f(A) = 4\gamma^3\alpha + 6\gamma^2\alpha^2 + 4\gamma\alpha^3 + \alpha^4 + 2\alpha^2 + 4\alpha\gamma + (4\gamma+4)\beta + \beta^2 - 4\alpha(2\gamma+2) - 4\alpha\beta - 4\gamma\beta + 4\alpha - 4\beta$$

(les constantes disparaissent)

$$f(A+H)-f(A) = \alpha^4 \underset{4\alpha^3\gamma}{\wedge} + 6\alpha^2\gamma^2 + 2\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha\beta + 4\alpha(\underbrace{\gamma^3+\gamma-2\gamma-2+1}_{=\gamma^3-\gamma-1=0}) + 4\beta(\underbrace{\gamma+1-\gamma-1}_{=0})$$

$$f(A+H)-f(A) = \alpha^4 + 4\alpha^3\gamma + 6\alpha^2\gamma^2 + 2\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha\beta$$

$$f(A+H)-f(A) = (\beta-2\alpha)^2 - 4\alpha^2 + \alpha^4 + 4\alpha^3\gamma + 6\alpha^2\gamma^2 + 2\alpha^2$$

$$f(A+H)-f(A) = (\beta-2\alpha)^2 + \alpha^2(\alpha^2 + 4\alpha\gamma + 6\gamma^2 - 2)$$

$$f(A+H)-f(A) = (\beta-2\alpha)^2 + \alpha^2\left((\alpha+2\gamma)^2 + 2(\gamma^2-1)\right)$$

φ est strictement croissante sur $]\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty[$.

Or $\gamma\in]\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty[$, $1\in]\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty[$, $\varphi(\gamma)=0$ et $\varphi(1)=-1$.

Ainsi $\gamma>1$. Donc $\gamma^2>1$.

Alors $f(A+H)-f(A)\geq 0$.

$\forall H\in\mathbb{R}^2$, $f(A+H)-f(A)\geq 0$.

f admet un minimum absolu en $A=(\gamma,2\gamma+2)$.

EXTREMUM AVEC OU SANS CONDITION D'ORDRE 2

Exercice Étudier les extrema de $f : (x, y) \to x^3 + xy + y^3$ sur $\mathbb{R}^2$.

f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car f est une fonction polynôme et $\mathbb{R}^2$ est ouvert. Ainsi si f admet un extremum en un point A de $\mathbb{R}^2$, A est un point critique de f.

Cherchons les points critiques de f. Soit $X=(x,y)$ un élément de $\mathbb{R}^2$.

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^2} \iff \frac{\partial f}{\partial x}(X)=\frac{\partial f}{\partial y}(X)=0 \iff \begin{cases} 3x^2+y=0 \\ x+3y^2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-3x^2 \\ 0=x+3(-3x^2)^2=x(1+27x^3) \end{cases}$$

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^3=\left(\frac{-1}{3}\right)^3 \\ y=-3x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=-1/3 \\ y=-1/3 \end{cases}.$$

f admet deux points critiques : $O=(0,0)$ et $A=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

→ VI Soit $H=(\alpha,\beta)$. $f(O+H)-f(O)=f(H)=\alpha^3+\alpha\beta+\beta^3$.

Remarque.. Si $\beta=0$ $f(O+H)-f(O)=\alpha^3$... qui ne garde pas ...

Montrons que f n'a pas d'extremum en O.

Soit $r\in\mathbb{R}_+^*$. Posons $H_1=\left(\frac{r}{2},0\right)$ et $H_2\left(-\frac{r}{2},0\right)$.

$H_1\in B(O,r)$, $H_2\in B(O,r)$, $f(O+H_1)-f(O)=\left(\frac{r}{2}\right)^3>0$ et $f(O+H_2)-f(O)=\left(-\frac{r}{2}\right)^3<0$.

$\forall r\in\mathbb{R}_+^*$, $\exists H_1\in B(O,r)$, $\exists H_2\in B(O,r)$, $f(O+H_1)-f(O)>0$ et $f(O+H_2)-f(O)<0$.

f n'a pas d'extremum en O.

$$f(A+H)-f(A)=\left(-\frac{1}{3}+\alpha\right)^3+\left(-\frac{1}{3}+\alpha\right)\left(-\frac{1}{3}+\beta\right)+\left(-\frac{1}{3}+\beta\right)^3-\left(-\frac{1}{3}\right)^3-\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)^3$$

$$f(A+H)-f(A)=3\left(-\frac{1}{3}\right)^2\alpha+3\left(-\frac{1}{3}\right)\alpha^2+\alpha^3-\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{3}\beta+\alpha\beta+3\left(-\frac{1}{3}\right)^2\beta+3\left(-\frac{1}{3}\right)\beta^2+\beta^3$$

$$f(A+H)-f(A)=-\alpha^2+\alpha^3+\alpha\beta-\beta^2+\beta^3 \leq -\alpha^2+\alpha^3-\beta^2+\beta^3+\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\beta^2.$$

$2\alpha\beta\leq\alpha^2+\beta^2$ donc $\alpha\beta\leq\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)$

$$f(A+H)-f(A)\leq-\left[\frac{\alpha^2}{2}-\alpha^3+\frac{\beta^2}{2}-\beta^3\right]=-\left[\alpha^2\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)+\beta^2\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\right]$$

Notons que si $\alpha \leq \frac{1}{2}$ et $\beta \leq \frac{1}{2}$: $f(A+H) - f(A) \leq -\left[\alpha^2\left(\frac{1}{2}-\alpha\right) + \beta^2\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\right] \leq 0$

$\alpha \leq \frac{1}{2}$ et $\beta \leq \frac{1}{2}$ dès que $\max(|\alpha|, |\beta|) \leq \frac{1}{2}$

Or $\max(|\alpha|, |\beta|) \leq \|(\alpha,\beta)\| = \|H\|$.

Supposons alors que $H \in B(0, \frac{1}{2})$.

$\max(|\alpha|,|\beta|) \leq \|(\alpha,\beta)\| = \|H\| < \frac{1}{2}$; $|\alpha| < \frac{1}{2}$ et $|\beta| < \frac{1}{2}$; $\alpha < \frac{1}{2}$ et $\beta < \frac{1}{2}$.

Alors $\left[\alpha^2\left(\frac{1}{2}-\alpha\right) + \beta^2\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\right] \geq 0$. Ainsi $f(A+H) - f(A) \leq 0$.

$\forall H \in B(0, \frac{1}{2})$, $f(A+H) - f(A) \leq 0$. <u>f admet un maximum local en A.</u>

→ f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car f est une fonction polynôme. Soit $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) = 6y$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) = 1$.

En O $rt - s^2 = 0 \times 0 - 1^2 = -1 < 0$. f n'a pas d'extremum en O

En A $rt - s^2 = \left(6\left(-\frac{1}{3}\right)\right)^2 - 1 = 3 > 0$ et $r = 6\left(-\frac{1}{3}\right) < 0$.

f admet un maximum local en A.

EXTREMUM AVEC OU SANS CONDITION D'ORDRE 2

Exercice $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{2} + xyz + y - z$. Éudier les extrema de f.

f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$ comme fonction polynôme.

Donc f est de classe C^1 (!) sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$. Ainsi si f admet en un point A de $\mathbb{R}^3$ un extremum local, $\nabla f(A) = 0$; A est un point critique de f.

Cherchons les points critiques de f. Soit $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(X) = \frac{\partial f}{\partial y}(X) = \frac{\partial f}{\partial z}(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + yz = 0 \\ xz + 1 = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ z = -1/x \\ y = 1/x \\ 0 = x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^3 - 1}{x^2} \end{cases}$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^3 = 1 \\ z = -1/x \\ y = 1/x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}.$$

f admet un point critique et un seul le point $A = (1,1,-1)$.

Version 1. - Sans condition d'ordre 2

Soit $H = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

$$f(A+H) - f(A) = \frac{1}{2}(1+\alpha)^2 + (1+\alpha)(1+\beta)(-1+\gamma) + 1 + \beta - (-1+\gamma) - \left(\frac{1}{2} - 1 + 1 + 1\right).$$

$$f(A+H) - f(A) = \frac{1}{2} + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + (1 + \alpha + \beta + \alpha\beta)(-1+\gamma) + 1 + \beta + 1 - \gamma - \frac{3}{2}.$$

$$f(A+H) - f(A) = \frac{1}{2} + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} - 1 - \alpha - \beta - \alpha\beta + \gamma + \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\beta\gamma + \beta - \gamma + \frac{1}{2}$$

$$f(A+H) - f(A) = \frac{\alpha^2}{2} - \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\beta\gamma.$$

Notons que si $\beta = \gamma = 0$: $f(A+H) - f(A) = \dfrac{\alpha^2}{2}$ et si $\alpha = \beta$ et $\gamma = 0$:

$$f(A+H) - f(A) = -\frac{\alpha^2}{2}.$$

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $H_1 = \left(\frac{r}{3}, 0, 0\right)$. $\|H_1\| = \sqrt{\left(\frac{r}{3}\right)^2 + 0^2 + 0^2} = \frac{r}{3} < r$.

$H_1 \in B(0,r)$ et $f(A+H_1) - f(A) = \dfrac{(r/3)^2}{2} > 0$.

Pour $H_2 = (\frac{r}{3}, \frac{r}{3}, 0)$. $\|H_2\| = \sqrt{(\frac{r}{3})^2 + (\frac{r}{3})^2 + 0^2} = \sqrt{2}\,\frac{r}{3} < r$; $H_2 \in B(0,r)$.

De plus $f(A+H_2) - f(A) = -\frac{(r/3)^2}{2} < 0$.

$\forall r \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists H_1 \in B(0,r)$, $\exists H_2 \in B(0,r)$, $f(A+H_1) - f(A) > 0$ et $f(A+H_2) - f(A) < 0$.

f ne possède pas d'extremum local en A.

Version 2 Avec condition d'ordre 2. Nous avons vu que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$.

$\forall X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(X) = 0$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) = z$; $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(X) = y$ et

$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(X) = x$.

Ainsi $\nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $H = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

$q_A(H) = \alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma = (\alpha - \beta + \gamma)^2 - (-\beta + \gamma)^2 + 2\beta\gamma$

$q_A(H) = (\alpha - \beta + \gamma)^2 - (\beta^2 - 4\beta\gamma + \gamma^2) = (\alpha - \beta + \gamma)^2 - (\beta - 2\gamma)^2 + 3\gamma^2$.

Pour $H_1 = (1,0,0)$; $q_A(H_1) = 1 > 0$ Pour $H_2 = (1,1,0)$; $q_A(H_2) = -1 < 0$

Ainsi f ne possède pas d'extremum local en A.

Exercice Extremum de $f : (x, y) \to x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

f est une fonction polynôme donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ et même $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Si f admet un extremum local en un point A de l'ouvert $\mathbb{R}^2$: $\nabla f(A) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

Cherchons les points critiques de f. Soit $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(X) = \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4(x-y) = 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = x - y \\ -y^3 = x - y \end{cases}$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = -y^3 \\ x^3 = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^3 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2 = 2 \\ y = -x \end{cases}$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$$

Ainsi f admet trois points critiques $O = (0,0)$, $A = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $B = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Etudions si f admet en O, A ou B un extremum local.

Notons que $f(B) = f(A)$! mieux $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(-x, -y) = f(x, y)$.

__Version 1.__ A la main !

(*) Soit $H = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. $f(O+H) - f(O) = \alpha^4 + \beta^4 - 2(\alpha - \beta)^2$.

Si $\beta = \alpha$: $f(O+H) - f(O) = 2\alpha^4$ qui est strictement positif si $\alpha \neq 0$

Si $\beta = 0$: $f(O+H) - f(O) = \alpha^4 - 2\alpha^2 = \alpha^2(\alpha^2 - 2)$ qui est strictement négatif si $\alpha^2 < 2$ et $\alpha^2 \neq 0$.

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $H_1 = \left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right)$ et $H_2 = \left(\min\left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), 0\right)$!!

$\|H_1\|_2 = \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{4}} = \frac{r}{\sqrt{2}} < r$ donc $H_1 \in B(O, r)$ de plus $f(O + H_1) - f(O) = 2\left(\frac{r}{2}\right)^4 > 0$.

$\|H_2\| = \left|\min\left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| = \min\left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leqslant \frac{r}{2} < r$; $H_2 \in B(O, r)$.

Posons $\gamma = \min\left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. $f(O + H_2) - f(O) = \gamma^2(\gamma^2 - 2) < 0$ car $0 < \gamma < \sqrt{2}$.

$\forall r \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists H_1 \in B(0,r)$, $\exists H_2 \in B(0,r)$, $f(0+H_1)-f(0)>0$ et $f(0+H_2)-f(0)<0$.

<u>f n'admet pas d'extremum local en 0.</u>

⊛ Soit $H=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

$$f(A+H)-f(A) = (\sqrt{2}+\alpha)^4+(-\sqrt{2}+\beta)^4-2(\sqrt{2}+\alpha+\sqrt{2}-\beta)^2-(-8).$$

$$f(A+H)-f(A) = (\sqrt{2})^4+4(\sqrt{2})^3\alpha+6(\sqrt{2})^2\alpha^2+4\sqrt{2}\alpha^3+\alpha^4+(-\sqrt{2})^4+4(-\sqrt{2})^3\beta+6(-\sqrt{2})^2\beta^2$$
$$+4(-\sqrt{2})\beta^3+\beta^4-2\left((2\sqrt{2})^2+\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta+4\sqrt{2}\alpha-4\sqrt{2}\beta\right)+8$$

$$f(A+H)-f(A) = 4+8\sqrt{2}\alpha+12\alpha^2+4\sqrt{2}\alpha^3+\alpha^4+4-8\sqrt{2}\beta+12\beta^2-4\sqrt{2}\beta^3+\beta^4$$
$$-16-2\alpha^2-2\beta^2+4\alpha\beta-8\sqrt{2}\alpha+8\sqrt{2}\beta+8$$

$$f(A+H)-f(A) = \alpha^4+\beta^4+10\alpha^2+10\beta^2+4\sqrt{2}\alpha^3-4\sqrt{2}\beta^3+4\alpha\beta$$

$$f(A+H)-f(A) = \alpha^2[\alpha^2+4\sqrt{2}\alpha+10]+\beta^2[\beta^2-4\sqrt{2}\beta+10]+4\alpha\beta$$

$$f(A+H)-f(A) = \alpha^2[(\alpha+2\sqrt{2})^2+2]+\beta^2[(\beta-2\sqrt{2})^2+2]+4\alpha\beta$$

$$f(A+H)-f(A) = \alpha^2(\alpha+2\sqrt{2})^2+\beta^2(\beta-2\sqrt{2})^2+2\alpha^2+2\beta^2+4\alpha\beta.$$

$$f(A+H)-f(A) = \alpha^2(\alpha+2\sqrt{2})^2+\beta^2(\beta-2\sqrt{2})^2+2(\alpha+\beta)^2 \geq 0.$$

<u>f admet en A un minimum absolu qui vaut −8.</u>

Comme $f(B)=f(A)$: <u>f admet en B un minimum absolu qui vaut −8.</u>

<u>Version 2</u> utilisons les conditions d'ordre 2.

Nous avons vu que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et que :

$\forall X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(X)=4x^3-4(x-y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(X)=4y^3+4(x-y)$. Alors

$\forall X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X)=12x^2-4$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(X)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(X)=4$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X)=12y^2-4$

Alors la hessienne de f en X est $\nabla^2 f(X) = \begin{pmatrix} 12x^2-4 & 4 \\ 4 & 12y^2-4 \end{pmatrix}$.

$rt-s^2 = (12x^2-4)(12y^2-4)-16 = (12)^2x^2y^2-4\times12y^2-4\times12x^2$

$rt-s^2 = 48\,[3x^2y^2-x^2-y^2]$

Si $X=0$, $rt-s^2=0$ et on ne peut pas conclure !!

Si $X = A$ ou B $\quad rt-s^2 = 48\,[3\times2\times2-2-2] > 0$ et $r = 12\times2-4 > 0$

Alors f admet en A et B un minimum ...local...

EXTREMUM AVEC OU SANS CONDITION D'ORDRE 2

Exercice $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = xy - x^2y - xy^2$. Etudier les extrema de f.

f est de classe C^1 et même C^2, comme fonction polynôme, sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

Si f admet un extremum local en un point A de $\mathbb{R}^2$, $\nabla f(A)=0$ donc A est un point critique de f. Cherchons les points critiques de f. Soit $X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(X)=\frac{\partial f}{\partial y}(X)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y-2xy-y^2=0 \\ x-x^2-2xy=0 \end{cases}$$

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1-2x-y)=0 \\ x(1-x-2y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x(1-x)=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y\neq 0 \\ y=1-2x \\ x(1-x-2+4x)=0 \end{cases}$$

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y\neq 0 \\ y=1-2x \\ x(3x-1)=0 \end{cases}$$

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=1/3 \\ y=1/3 \end{cases}.$$

f admet quatre points critiques $O=(0,0)$, $A=(1,0)$, $B=(0,1)$ et $C=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

<u>Version 1.</u> Avec les conditions d'ordre 2.

$\forall X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X)=-2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X)=-2x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(X)=1-2x-2y$

	O	A	B	C
$rt-s^2$	-1	-1	-1	$1/3$
r				$-2/3$
	RIEN	RIEN	RIEN	MAX LOC.

f ne possède pas d'extremum en O, A et B.

f possède un maximum local en C.

Version 2 .. Sans les conditions d'ordre 2.

$\boxed{O}$ * Soit $H=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. $f(O+H)-f(O)=\alpha\beta-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2=\alpha\beta(1-\alpha-\beta)$

$O=(0,0)$

si $\alpha=\beta$ $f(O+H)-f(O)=\alpha^2(1-2\alpha)$

si $\alpha=-\beta$ $f(O+H)-f(O)=-\alpha^2$

Soit $r\in\mathbb{R}_+^*$. Posons $H_1=(-\frac{r}{2},-\frac{r}{2})$ et $H_2=(\frac{r}{2},-\frac{r}{2})$.

$\|H_1\|=\|H_2\|=\frac{1}{\sqrt{2}}r<r$ donc $H_1\in B(O,r)$ et $H_2\in B(O,r)$.

$f(O+H_1)-f(O)=(-\frac{r}{2})^2(1-2(-\frac{r}{2}))>0$. $f(O+H_2)-f(O)=-(\frac{r}{2})^2<0$.

$\forall r\in\mathbb{R}_+^*, \exists H_1\in B(O,r), \exists H_2\in B(O,r), f(O+H_1)-f(O)>0$ et $f(O+H_2)-f(O)<0$.

f n'admet pas d'extremum local en O.

$\boxed{A}$ * Soit $H=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. $f(A+H)-f(A)=(1+\alpha)\beta-(1+\alpha)^2\beta-(1+\alpha)\beta^2-0$

$A=(1,0)$

$f(A+H)-f(A)=\beta+\alpha\beta-\beta-2\alpha\beta-\alpha^2\beta-\beta^2-\alpha\beta^2=-\alpha\beta-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2-\beta^2=-\beta(\alpha+\beta)(1+\alpha)$

$$f(A+H)-f(A)=\begin{cases}-\beta^2 & \text{si } \alpha=0\\ \frac{\alpha^2}{4}(1+\alpha) & \text{si } \beta=-\frac{\alpha}{2}.\end{cases}$$

Soit $r\in\mathbb{R}_+^*$. Posons $H_1=(\frac{r}{2},-\frac{r}{4})$. $\|H_1\|=\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{r^2}{16}}<r$; $H_1\in B(O,r)$ et

$f(A+H_1)-f(A)=\frac{(r/2)^2}{4}(1+\frac{r}{2})>0$.

Posons $H_2=(0,\frac{r}{2})$. $\|H_2\|=\sqrt{0^2+\frac{r^2}{4}}<r$; $H_2\in B(O,r)$ et

$f(A+H_2)-f(A)=-(\frac{r}{2})^2<0$.

$\forall r\in\mathbb{R}_+^*, \exists H_1\in B(O,r), \exists H_2\in B(O,r), f(A+H_1)-f(A)>0$ et $f(A+H_2)-f(A)<0$.

f n'a pas d'extremum local en A.

$\boxed{B}$ * f est symétrique en x et y ; l'étude précédente permet de

$B=(0,1)$ dire que f n'a pas d'extremum local en B.

$\boxed{C}$ * Soit $H = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$C = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ $\quad f(C+H) - f(C) = (\frac{1}{3}+\alpha)(\frac{1}{3}+\beta) - (\frac{1}{3}+\alpha)^2(\frac{1}{3}+\beta) - (\frac{1}{3}+\alpha)(\frac{1}{3}+\beta)^2 - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27}$.

$\frac{1}{9} - \frac{1}{9} = 0$!!

$$f(C+H) - f(C) = \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \alpha\beta - (\frac{1}{9} + \frac{2}{3}\alpha + \alpha^2)(\frac{1}{3}+\beta) - (\frac{1}{3}+\alpha)(\frac{1}{9} + \frac{2}{3}\beta + \beta^2) + \frac{2}{27}.$$

$$f(C+H) - f(C) = \overline{\frac{1}{3}\alpha} + \overline{\frac{1}{3}\beta} + \alpha\beta - \overline{\frac{1}{27}} - \overline{\frac{2}{9}\alpha} - \frac{1}{3}\alpha^2 - \overline{\frac{\beta}{9}} - \frac{2}{3}\alpha\beta - \alpha^2\beta - \overline{\frac{1}{27}} - \overline{\frac{2}{9}\beta} - \frac{1}{3}\beta^2 - \overline{\frac{\alpha}{9}} - \frac{2}{3}\alpha\beta - \alpha\beta^2 + \overline{\frac{2}{27}}$$

$$f(C+H) - f(C) = \alpha\beta - \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{2}{3}\alpha\beta - \alpha^2\beta - \frac{1}{3}\beta^2 - \frac{2}{3}\alpha\beta - \alpha\beta^2.$$

$$f(C+H) - f(C) = -\frac{1}{3}\left[+\alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2\right]$$

$$f(C+H) - f(C) = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta) + \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2) + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2\right]$$

$$f(C+H) - f(C) = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2 + \alpha^2(\frac{1}{2}+3\beta) + \beta^2(\frac{1}{2}+3\alpha)\right]$$

Notons que si $\frac{1}{2}+3\beta \geq 0$ et $\frac{1}{2}+3\alpha \geq 0$ alors $f(C+H) - f(C) \leq 0$.

donc si $\beta \geq -\frac{1}{6}$ et $\alpha \geq -\frac{1}{6}$ alors $f(C+H) - f(C) \leq 0$.

Supposons que $H \in B(0, \frac{1}{6})$. Alors $\mathrm{Max}(|\alpha|, |\beta|) \leq \|H\| < \frac{1}{6}$.

Alors $|\alpha| < \frac{1}{6}$ et $|\beta| < \frac{1}{6}$; $-\frac{1}{6} < \alpha$ et $-\frac{1}{6} < \beta$; $3\alpha + \frac{1}{2} > 0$ et $3\beta + \frac{1}{2} > 0$.

Donc $f(C+H) - f(C) \leq 0$.

$\forall H \in B(0, \frac{1}{6})$, $f(C+H) - f(C) \leq 0$.

f admet un maximum local en C.

ECHEC DES CONDITIONS D'ORDRE 2

Exercice .. Etudier les extremums de $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to x^4 - xy^3 + 3y^4 \end{array}$

f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynômiale et $\mathbb{R}^2$ est un ouvert.

Ainsi, si f admet un extremum local en un point A de $\mathbb{R}^2$, $\nabla f(A) = 0_{\mathbb{R}^2}$ donc A est un point critique de f. Cherchons les points critiques de f.

Soit $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. $\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(X) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - y^3 = 0 \\ -3xy^2 + 12y^3 = 0 \end{cases}$

$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y^2(x-4y) = 0 \\ 4x^3 - y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 4x^3 - y^3 = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 4y \\ 4x^3 - y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 4y \\ 4^4 y^3 - y^3 = 0 \end{cases}$

$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 4y \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0.$

<u>$O = (0,0)$ est le seul point critique de f.</u>

f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynômiale.

$\forall X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) = 12x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) = -6xy + 36y^2$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) = -3y^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(O) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(O) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(O) = 0.$ $\quad rt - s^2 = 0$! On ne peut pas conclure.

Soit $H = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

(VI) $f(O+H) - f(O) = \alpha^4 - \alpha\beta^3 + 3\beta^4 = \alpha(\alpha^3 - \beta^3) + 3\beta^4 = \alpha(\alpha-\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) + 3\beta^4.$

1er cas .. $\alpha(\alpha-\beta) \geqslant 0$. $\quad \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\beta^2 \geqslant 0$. Alors $f(O+H) - f(O) \geqslant 0$

2e cas .. $\alpha(\alpha-\beta) < 0$. $\underline{\text{si}}$ $0 < \alpha < \beta$. $\quad f(O+H) - f(O) = \alpha^4 - \alpha\beta^3 + 3\beta^4 \geqslant -\alpha\beta^3 + 3\beta^4$

$$f(O+H) - f(O) \geqslant 2\beta^4 + \underbrace{\beta^3(\beta - \alpha)}_{\geqslant 0} \geqslant 0$$

b) $0 > \alpha > \beta$. $f(0+H)-f(0) = \alpha^4 - \alpha\beta^3 + 3\beta^4 \geqslant -\alpha\beta^3 + 3\beta^4 = \underbrace{\beta^3}_{<0}\underbrace{(\beta-\alpha)}_{<0}$

Finalement $\forall H \in \mathbb{R}^2$, $f(0+H)-f(0) \geqslant 0$

f admet en 0 un minimum global.

V2 Fixons β dans $\mathbb{R}$ et étudions $\psi : \begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\\ \alpha \longmapsto \alpha^4 - \alpha\beta^3 + 3\beta^4\end{array}$.

ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\psi'(\alpha) = 4\alpha^3 - \beta^3$.

$\psi'(\alpha) \geqslant 0 \Leftrightarrow 4\alpha^3 \geqslant \beta^3 \Leftrightarrow \alpha \geqslant \frac{\beta}{\sqrt[3]{4}}$.

ψ est décroissante sur $\left]-\infty, \frac{\beta}{\sqrt[3]{4}}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{\beta}{\sqrt[3]{4}}, +\infty\right[$.

Ainsi $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\psi(\alpha) \geqslant \psi\left(\frac{\beta}{\sqrt[3]{4}}\right)$.

$$\psi\left(\frac{\beta}{\sqrt[3]{4}}\right) = \frac{\beta^4}{4\sqrt[3]{4}} - \frac{\beta^4}{\sqrt[3]{4}} + 3\beta^4 = \beta^4\left[3 - \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}\right] = 3\beta^4\,\frac{4\sqrt[3]{4}-1}{4\sqrt[3]{4}} \geqslant 0.$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\psi(\alpha) \geqslant 0$.

Alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha^4 - \alpha\beta^3 + 3\beta^4 \geqslant 0$ et ceci pour tout β dans $\mathbb{R}$.

Donc $\forall H \in \mathbb{R}^2$, $f(0+H) - f(0) \geqslant 0$

V3 $f(0+H)-f(0) = \alpha^4 - \alpha\beta^3 + 3\beta^4 = \alpha^4 - \underbrace{\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\beta^2}_{=0\,!} - \alpha\beta^3 + 3\beta^4$

$$f(0+H)-f(0) = \underbrace{\left[\left(\alpha^2 - \frac{\beta^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{\beta^2}{2}\right)^2\right]}_{\alpha^4-\alpha^2\beta^2} + \underbrace{\left[\left(\alpha\beta - \frac{\beta^2}{2}\right)^2 - \frac{\beta^4}{4}\right]}_{\alpha^2\beta^2-\alpha\beta^3} + 3\beta^4$$

$$f(0+H)-f(0) = \underbrace{\left(\alpha^2 - \frac{\beta^2}{2}\right)^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{\left(\alpha\beta - \frac{\beta^2}{2}\right)^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{3\beta^4 - \frac{\beta^4}{4} - \frac{\beta^4}{4}}_{\geqslant 0} \geqslant 0.$$

ECHEC DES CONDITIONS D'ORDRE 2

Exercice .. Etudier les extremums de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2+y^2+2xy+xy^3$

f est donc $\mathcal{C}^1$ et même $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynômiale.

$\mathbb{R}^2$ étant ouvert, si f admet un extremum local en un point A de $\mathbb{R}^2$, A est un point critique de f. Cherchons les points critiques de f.

Soit $X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^2} \iff \frac{\partial f}{\partial x}(X)=\frac{\partial f}{\partial y}(X)=0 \iff \begin{cases} 2x+2y+y^3=0 \\ 2y+2x+3xy^2=0 \end{cases} \overset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\iff} \begin{cases} 2x+2y+y^3=0 \\ y^2(3x-y)=0 \end{cases}$$

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=3x \\ 0=2x+6x+27x^3=x(27x^2+8) \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=3x \\ x=0 \end{cases}$$

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}.$$

f admet un point critique et un seul : $O=(0,0)$.

$\forall X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X)=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X)=2+6xy$ / $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(X)=2+3y^2$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(O)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(O)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(O)=2$; $rt-s^2=0$!!

Soit $H=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. $f(O+H)-f(O)=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta+\alpha\beta^3$.

Remarque.. Si $\beta=-\alpha$: $f(O+H)-f(O)=-\alpha^4$ et si $\beta=\alpha$ $f(O+H)-f(O)=4\alpha^2+\alpha^4$.

Soit $r\in\mathbb{R}_+^*$. Posons $H_1=\left(\frac{r}{2},\frac{r}{2}\right)$ et $H_2=\left(\frac{r}{2},-\frac{r}{2}\right)$.

$\|H_1\|=\|H_2\|=\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{r^2}{4}}=\frac{r}{\sqrt{2}}<r$; $H_1\in B(O,r)$ et $H_2\in B(O,r)$.

De plus $f(O+H_1)-f(O)=4\left(\frac{r}{2}\right)^2+\left(\frac{r}{2}\right)^4>0$ et $f(O+H_2)-f(O)=-\left(\frac{r}{2}\right)^4<0$.

Donc $\forall r\in\mathbb{R}_+^*$, $\exists H_1\in B(O,r)$, $\exists H_2\in B(O,r)$, $f(O+H_1)-f(O)>0$ et $f(O+H_2)-f(O)<0$.

f n'admet pas d'extremum en O.

EXTREMUM AVEC CONDITION D'ORDRE DEUX

Exercice : $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et $\forall (x,y)\in\Omega$, $f(x,y) = x\ln y + y\ln x$

Etudier les extremums de f.

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme produit de deux ouverts de $\mathbb{R}$.

$(x,y)\mapsto y$ est de classe C^2 et strictement positive sur Ω. Comme $\ln$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition $(x,y)\mapsto \ln y$ est de classe C^2 sur Ω.

Comme $(x,y)\mapsto x$ est de classe C^2 sur Ω, $(x,y)\mapsto x\ln y$ est (par produit) de classe C^2 sur Ω.

De même $(x,y)\mapsto y\ln x$ est de classe C^2 sur Ω.

Par somme f est de classe C^2 sur Ω. Donc f est de classe C^1 sur Ω !

Dans ces conditions si f admet un extremum local en un point A de Ω, A est un point critique de f. Cherchons les points critiques de f.

Soit $X=(x,y)\in\Omega$.

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \frac{\partial f}{\partial x}(X) = \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0 \iff \begin{cases}\ln y + \dfrac{y}{x}=0\\ \dfrac{x}{y}+\ln x = 0\end{cases} \iff \begin{cases} y=1\\ \dfrac{y}{x}=0 \ !\\ \dfrac{x}{y}+\ln x=0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y\neq 1\\ x=-\dfrac{y}{\ln y}\\ \dfrac{x}{y}+\ln x=0\end{cases}$$

$\begin{cases} y>0 \\ x>0 \end{cases}$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases} y\neq 1\\ x=-\dfrac{y}{\ln y}\\ -\dfrac{1}{\ln y}+\ln x=0\end{cases} \iff \begin{cases} y<1\\ x=-\dfrac{y}{\ln y}\\ -\dfrac{1}{\ln y}+\ln\left(-\dfrac{y}{\ln y}\right)=0\end{cases}$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases} y<1\\ x=-\dfrac{y}{\ln y}\\ -\dfrac{1}{\ln y}+\ln y-\ln(-\ln y)=0\end{cases}$$

Posons $\forall u \in]-\infty, 0[$, $\varphi(u) = -\frac{1}{u} + u - \ln(-u)$.

φ est dérivable sur $]-\infty,0[$ et $\forall u \in]-\infty,0[$, $\varphi'(u) = \frac{1}{u^2} + 1 - \frac{-1}{-u} = \frac{1+u^2-u}{u^2}$

$\forall u \in]-\infty,0[$, $\varphi'(u) = \frac{(u-1/2)^2+3/4}{u^2} > 0$.

φ est donc strictement croissante sur $]-\infty,0[$ et continue.

φ définit donc une bijection de $]-\infty,0[$ sur $]\lim_{u\to-\infty}\varphi(u), \lim_{u\to 0^-}\varphi(u)[$.

φ définit donc une bijection de $]-\infty,0[$ sur $]-\infty,+\infty[$ (*)

(*) $\lim_{u\to-\infty}\varphi(u) = \lim_{u\to-\infty}\left[u\left(-\frac{1}{u^2}+1+\frac{\ln(-u)}{-u}\right)\right] = -\infty$ et

$\lim_{u\to 0^-}\varphi(u) = \lim_{u\to 0^-}\left[-\frac{1}{u}\left(1-u^2-(-u)\ln(-u)\right)\right] = +\infty$.

Donc $\exists!\ \alpha \in]-\infty,0[$, $\varphi(\alpha) = 0$.

Or $\varphi(-1) = -\frac{1}{-1} - 1 - \ln(-(-1)) = 1 - 1 - 0 = 0$. Donc $\alpha = -1$.

Ainsi $u \in]-\infty,0[$ et $-\frac{1}{u} + u - \ln(-u) = 0 \Leftrightarrow u = -1$

Alors $y \in]0,1[$ et $-\frac{1}{\ln y} + \ln y - \ln(-\ln y) = 0 \Leftrightarrow \ln y = -1$ (ou $y = \frac{1}{e}$).

Donc $\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1/e \\ x = -\frac{y}{\ln y} = 1/e \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{e}$.

f admet un point critique et un seul le point $A = \left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.

$\forall X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) = -\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) = -\frac{x}{y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) = \frac{1}{y} + \frac{1}{x}$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = -e$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) = 2e$.

$rt - s^2 = (-e)(-e) - (2e)^2 = -3e^2 < 0$.

<u>f n'admet pas d'extremum en A.</u>

Exercice $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2xyz$. Etudier les extrema de f.

f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$ comme fonction polynôme.

Si f admet un extremum local en un point A de l'ouvert $\mathbb{R}^3$ alors $\nabla f(A)=0_{\mathbb{R}^3}$.

Cherchons alors les points critiques de f. Soit $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(X)=\frac{\partial f}{\partial y}(X)=\frac{\partial f}{\partial z}(X)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2yz=0\\ 2y+2xz=0\\ 2z+2xy=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-yz\\ y=-xz\\ z=-xy\end{cases}$$

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-yz\\ y=yz^2\\ z=y^2z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1-z^2)=0\\ z(1-y^2)=0\\ x=-yz\end{cases}$$

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0\\ z=0\\ x=0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} z^2=1 \text{ (car } z\neq 0 \text{ !)}\\ 1-y^2=0\\ x=-yz\end{cases}$$

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0\\ y=0\\ z=0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} z=1\\ y=1\\ x=-1\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} z=1\\ y=-1\\ x=1\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} z=-1\\ y=1\\ x=1\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} z=-1\\ y=-1\\ x=-1\end{cases}$$

f admet cinq points critiques : $O=(0,0,0)$, $A=(-1,1,1)$, $B=(1,-1,1)$, $C=(1,1,-1)$

$D=(-1,-1,-1)$.

Soit $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X)=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X)=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(X)=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(X)=2z$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(X)=2y$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(X)=2x$. $\nabla^2 f(X)=\begin{pmatrix} 2 & 2z & 2y\\ 2z & 2 & 2x\\ 2y & 2x & 2\end{pmatrix}$.

Etude en O.

$\forall H=(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3,\ q_0(H)=2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2\geqslant 0$

$\forall H=(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3,\ q_0(H)=0 \Rightarrow 2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2=0 \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$.

Ainsi $\forall H\in\mathbb{R}^3-\{0\},\ q_0(H)>0$. <u>$f$ admet en O un minimum local strict.</u>

Etude en $A=(-1,1,1)$. $\quad \nabla^2 f(A)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

$H=(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$. $q_A(H)=2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2+4\alpha\beta+4\alpha\gamma-4\beta\gamma$.

$q_A(H)=2[\alpha^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma]+2\beta^2+2\gamma^2-4\beta\gamma$

$q_A(H)=2[(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\beta+\gamma)^2]+2\beta^2+2\gamma^2-4\beta\gamma$

$q_A(H)=2(\alpha+\beta+\gamma)^2-2\beta^2-2\gamma^2-4\beta\gamma+2\beta^2+2\gamma^2-4\beta\gamma$

$q_A(H)=2(\alpha+\beta+\gamma)^2-8\beta\gamma=2(\alpha+\beta+\gamma)^2-8\dfrac{(\beta+\gamma)^2-(\beta-\gamma)^2}{4}$

$q_A(H)=2(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\beta+\gamma)^2+2(\beta-\gamma)^2$

Posons $H_1=(0,1,-1)$ et $H_2=(-2,1,1)$

$q_A(H_1)=8>0$ et $q_A(H_2)=-8<0$. f n'a pas d'extremum local en A.

Etude en $B=(1,-1,1)$

Notons que la transformation "$(x,y,z)\to(-x,-y,z)$" transforme A en B et laisse f invariant. Dans ces conditions f n'a pas d'extremum local en B

Etude en $C=(1,1,-1)$

La transformation "$(x,y,z)\to(x,-y,-z)$" transforme B en C et laisse f invariant

Dans ces conditions f n'a pas d'extremum local en C.

Etude en $D=(-1,-1,-1)$. La transformation "$(x,y,z)\to(x,-y,-z)$" transforme A en D et laisse f invariant. Dans ces conditions f n'a pas d'extremum local en D.

AVEC CONDITIONS D'ORDRE 2

Exercice .- Etudier les extremums de f définie par :
$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=x^3+y^2-xy+z^2$

f est une fonction polynôme donc f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$.

$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=3x^2-y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=2y-x$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=2z$.

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}3x^2-y=0\\2y-x=0\\z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=0\\x=2y\\y(12y-1)=0\end{cases}$

Donc clairement f possède deux points critiques : $O=(0,0,0)$ et $A=(\frac{1}{6},\frac{1}{12},0)$.

* Etude de f au voisinage de O.

(V1) $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x,0,0)=x^3$; $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x,0,0)-f(O)=x^3$

Ainsi $\forall x\in\mathbb{R}^*_+$, $f(x,0,0)-f(O)>0$ et $\forall x\in\mathbb{R}^*_-$, $f(x,0,0)-f(O)<0$.

f n'admet donc pas d'extremum en O.

(V2) Soit $H(f,O)$ la hessienne de f en O (f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$... voir plus haut)

Soit $X=(x,y,z)$. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X)=6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X)=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(X)=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(X)=-1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(X)=0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(X)=0$. Ainsi $H(f,O)=\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

Soit $H=(h_1,h_2,h_3)$. $\varphi(H)={}^tH\,H(f,O)\,H=2(\beta^2-\alpha\beta+\gamma^2)=2\left[\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)^2-\frac{\alpha^2}{4}+\gamma^2\right]$.

Posons $H_1=(0,1,0)$ et $H_2=(2,1,0)$. $\varphi(H_1)=2>0$ et $\varphi(H_2)=-2<0$

donc f n'admet pas d'extremum en O.

* Etude de f au voisinage de $A=(\frac{1}{6},\frac{1}{12},0)$.

$H(f,A)=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. Soit $H=(h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3$. $\varphi(H)={}^tH\,H(f,A)\,H=\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2+2\gamma^2$

$\varphi(H)=\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)^2-\frac{\beta^2}{4}+2\beta^2+2\gamma^2=\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\beta^2+2\gamma^2$

Notons que 1° $\varphi(H)\geq 0$ 2°. $\varphi(H)=0\Leftrightarrow \alpha-\frac{\beta}{2}=\beta=\gamma=0\Leftrightarrow H=0$

Ainsi $\forall H\in\mathbb{R}^3-\{0\}$, $\varphi(H)>0$.

Donc <u>f admet un minimum local en $A=(\frac{1}{6},\frac{1}{12},0)$.</u> Notons que $f(A)=-\frac{1}{432}$.

Remarques 1.. $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x,0,0)=x^3$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x,0,0)=-\infty$: le minimum n'est pas global.

2.. Les valeurs propres de $H(f,A)$ sont 2, $\frac{3+\sqrt5}{2}$ et $\frac{3-\sqrt5}{2}$ (... >0 !).

Exercice .. $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) \longrightarrow (y-z)^2 + y^3x^2 \end{array}$. Etudier les extremums de f.

ESCP 98

f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$ car f est une fonction polynôme.
En particulier f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$, donc si f possède un extremum local en un point A de $\mathbb{R}^3$ alors $\text{grad} f(A) = 0$.
Soit $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X) = \frac{\partial f}{\partial y}(X) = \frac{\partial f}{\partial z}(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^3x = 0 \\ 2(y-z) + 3y^2x^2 = 0 \\ -2(y-z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ 2y^3x = 0 \\ 3y^2x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{et} \\ z = 0 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x = 0 \\ \text{et} \\ y = z \end{cases}$$

L'ensemble des points critiques de f est $\{(a,0,0)\ ;\ a \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,b,b)\ ;\ b \in \mathbb{R}\}$.

- Soit $A = (a,0,0)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

$\forall X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) = 2y^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) = 2 + 6yx^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(X) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) = 6y^2x$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(X) = 0$; $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(X) = -2$.

$$\forall X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad H(f,X) = \begin{pmatrix} 2y^3 & 6y^2x & 0 \\ 6y^2x & 2+6yx^2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

En particulier $H(f,a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Alors $\forall H = (h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3$, $q(H) = {}^tH\, H(f,A)\, H = 2h_2^2 - 4h_2h_3 + 2h_3^2 = 2(h_2-h_3)^2$.

On a donc : $\forall H \in \mathbb{R}^3, q(H) \geq 0$ sans avoir $\forall H \in \mathbb{R}^3, H \neq 0 \Rightarrow q(H) > 0$.

Nous ne pouvons pas conclure ... en utilisant les conditions d'ordre 2.

Soit $H = (\alpha, \beta, \gamma)$. $f(A+H) - f(A) = f(a+\alpha, \beta, \gamma) - f(a,0,0) = f(a+\alpha, \beta, \gamma)$

$f(A+H) - f(A) = (\beta - \gamma)^2 + \beta^3(a+\alpha)^2$.

Ainsi si $H = (\alpha, \beta, \underline{\underline{\beta}})$, $f(A+H) - f(A) = \beta^3(a+\alpha)^2$... quantité qui ne semble pas garder un signe constant au voisinage de 0. Notons alors que f n'a pas d'extremum en A.

1er Cas.- $a \neq 0$. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $H_1 = (0, \frac{r}{2}, \frac{r}{2})$ et $H_2 = (0, -\frac{r}{2}, -\frac{r}{2})$.

$f(A+H_1) - f(A) = (\frac{r}{2})^3 a^2 > 0$ et $f(A+H_2) - f(A) = -(\frac{r}{2})^3 a^2 < 0$. De plus $H_1 \in B_\infty(0,r)$ et $H_2 \in B_\infty(0,r)$.

Ainsi $\forall r \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists H_1 \in B_\infty(0,r)$, $\exists H_2 \in B_\infty(0,r)$, $f(A+H_1) - f(A) > 0$ et $f(A+H_2) - f(A) < 0$

f n'a pas d'extremum local en A.

2ème Cas.- $a = 0$. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $H_1 = (\frac{r}{2}, \frac{r}{2}, \frac{r}{2})$ et $H_2 = (\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}, -\frac{r}{2})$.

$H_1 \in B_\infty(0,r)$, $H_2 \in B_\infty(0,r)$, $f(A+H_1) - f(A) = \left(\frac{r}{2}\right)^5 > 0$ et $f(A+H_2) - f(A) = -(\frac{r}{2})^5 < 0$.

$\forall r \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists H_1 \in B_\infty(0,r)$, $\exists H_2 \in B_\infty(0,r)$, $f(A+H_1) - f(A) > 0$ et $f(A+H_2) - f(A) < 0$.

f n'a pas d'extremum local en A.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, f n'a pas d'extremum local en $A = (a,0,0)$.

• Soit $B = (0,b,b)$ avec $b \in \mathbb{R}^*$ (le cas $b=0$ vient d'être traité non ?).

$$H(f,B) = \begin{pmatrix} 2b^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\forall H = (h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3$, $\varphi(H) = {}^tH\,H(f,B)\,H = 2b^3 h_1^2 + 2h_2^2 + 2h_3^2 - 4h_2h_3 = 2b^3 h_1^2 + 2(h_2 - h_3)^2$.

1er Cas.- $b < 0$. Posons $H_1 = (0,1,0)$ et $H_2 = (1,0,0)$.

$\varphi(H_1) = 2 > 0$ et $\varphi(H_2) = 2b^3 < 0$; f n'a pas d'extremum en B.

2ème Cas.- $b > 0$. $\forall H = (h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3$, $\varphi(H) = 2b^3 h_1^2 + 2(h_2 - h_3)^2 \geqslant 0$ mais on n'a pas $\forall H \in \mathbb{R}^3, H \neq 0 \Rightarrow \varphi(H) > 0$.

Les conditions d'ordre 2 ne donnent pas de conclusion.

Soit $H = (\alpha, \beta, \delta) \in \mathbb{R}^3$. $f(B+H) - f(B) = f(\alpha, b+\beta, b+\delta) - f(0,b,b) = (\beta - \delta)^2 + (b+\beta)^3 \alpha^2$.

Il semble que cette différence soit positive au voisinage de 0. Montrons que f possède un minimum local en B. Posons $r = b$.

Si $H \in B_\infty(0,r)$: $|\alpha| < b$, $|\beta| < b$, $|\delta| < b$, alors $b + \beta > 0$ et ainsi $f(B+H) - f(B) \geqslant 0$.

$\exists r \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall H \in B_\infty(0,r)$, $f(B+H) \geqslant f(B)$. f possède un minimum local en B.

plus de place pour récapituler!

Exercice $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 4\}$ et $\forall (x,y) \in D,\ f(x,y) = (2x^2 + 3y^2)\, e^{-x^2-y^2}$.

Q1. Montrer que f admet sur D un maximum M et un minimum m.

Q2. Trouver m (resp. M) et l'ensemble des points qui réalisent ce minimum (resp. maximum).

Q1 $D = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid \|X\|^2 \leqslant 4\} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid \|X\| \leqslant 2\}$

Ainsi D est la boule fermée de centre $O = (0,0)$ et de rayon 2.

D est donc une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$.

$(x,y) \to -x^2 - y^2$ est continue sur D (restriction à D d'une fonction polynôme)

et $t \mapsto e^t$ est continue sur $\mathbb{R}$; par composition $(x,y) \to e^{-x^2-y^2}$ est continue sur D.

$(x,y) \to 2x^2 + 3y^2$ est continue sur D (restriction à D d'une fonction polynôme) ;

alors par produit f est continue sur D.

f est continue sur D et D est un fermé borné ainsi <u>f possède un maximum M et un minimum m sur D.</u>

Q2 $\forall (x,y) \in D,\ f(x,y) \geqslant 0$ et $f(0,0) = 0$.

Donc $\forall (x,y) \in D,\ f(x,y) \geqslant f(0,0) = 0$.

Alors <u>$m = 0$ et $O = (0,0)$ réalise le minimum de f.</u>

$\forall (x,y) \in D,\ f(x,y) = 0 \Leftrightarrow (2x^2 + 3y^2)\, e^{-x^2-y^2} = 0 \underset{e^{-x^2-y^2} \neq 0}{\Leftrightarrow} 2x^2 + 3y^2 = 0 \underset{x^2 \geqslant 0,\ y^2 \geqslant 0}{\Leftrightarrow} x^2 = y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$

<u>O est le seul point de D qui réalise le minimum de f.</u>

Posons $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$. Ω est la boule ouverte de centre O et de rayon 2.

Donc <u>Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.</u>

$(x,y) \to -x^2 - y^2$ est de classe C^1 sur D (restriction d'une fonction polynôme) et $t \mapsto e^t$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; par composition $(x,y) \to e^{-x^2-y^2}$ est de classe C^1 sur D.

$(x,y) \to (2x^2+3y^2)$ est de classe C^1 sur D (fonction polynôme). Par produit f est de classe C^1 sur D donc sur Ω.

Comme Ω est un ouvert si f admet un extremum local en un point A de Ω : $\nabla f(A) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

Donc si f réalise son maximum en un point A de Ω : $\nabla f(A) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

Cherchons les points critiques de la restriction de f à Ω. Soit $X=(x,y)\in\Omega$.

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(X)=\frac{\partial f}{\partial y}(X)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 4xe^{-x^2-y^2}+(2x^2+3y^2)(-2x)e^{-x^2-y^2} \\ 0 = 6ye^{-x^2-y^2}+(2x^2+3y^2)(-2y)e^{-x^2-y^2} \end{cases}$$

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2xe^{-x^2-y^2}[2-2x^2-3y^2] \\ 0 = 2ye^{-x^2-y^2}[3-2x^2-3y^2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2-2x^2-3y^2)=0 \\ y(3-2x^2-3y^2)=0 \end{cases}$$

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y(3-3y^2)=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=0 \\ x(2-2x^2)=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x\neq 0,\ y\neq 0 \\ 2x^2+3y^2=2 \\ 2x^2+3y^2=3 \end{cases} \quad !!$$

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases}.$$

f admet cinq points critiques : $O=(0,0)$, $A=(0,1)$, $B=(0,-1)$, $C=(1,0)$, $D=(-1,0)$.

Notons que $f(O)=0$, $f(A)=f(B)=3e^{-1}$ et $f(C)=f(D)=2e^{-1}$

Etudions alors f sur $D\setminus\Omega$.

$D\setminus\Omega = D\cap\bar{\Omega}$ est un fermé comme intersection de deux fermés de $\mathbb{R}^2$.

$D\setminus\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=4\}$.

Soit $(x,y)\in D\setminus\Omega$. $y^2=4-x^2$. $y^2\geq 0$ donc $x^2\leq 4$; $x\in[-2,2]$.

De plus $f(x,y)=(2x^2+3(4-x^2))e^{-4}=(12-x^2)e^{-4}\leq 12e^{-4}$.

De plus $f(x,y)=12e^{-4} \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

Notons que $\begin{cases} =0 \\ y^2=4-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$

f admet un maximum sur $D \setminus \Omega$ qui vaut $12e^{-4}$ et atteint en les points $(0,2)$ et $(0,-2)$.

$12e^{-4} < 3e^{-1} \Leftrightarrow 4 < e^3$. Or $e > 2$ donc $e^3 > 8$.

Ainsi $12e^{-4} < 3e^{-1} = f(A) = f(B)$. Alors le maximum de f n'est pas atteint en un point de $D \setminus \Omega$ car il existe un point de Ω dont l'image par f a une valeur strictement supérieure au maximum de f sur $D \setminus \Omega$.

Ainsi le maximum de f est atteint en un point de Ω qui ne peut être que O, A, B, C ou D.

Or $f(O) < f(C) = f(D) < f(A) = f(B) = 3e^{-1}$.

Plus de doute le maximum de f sur D vaut $3e^{-1}$ et il est atteint en les seuls points $A = (0,1)$ et $B = (0,-1)$.

Exercice **V1** Etudier les extremums de la fonction f définie par :

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=x^2+y^2-2xyz^2$$

Ou : **V2** $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=x^2+y^2-2xyz^2$.

Q1. Montrer que (x,y,z) est un point critique de f si et seulement si $x=y=0$.

Q2. z est un réel et $A=(0,0,z)$. On se propose d'étudier l'existence d'un extremum pour f en A.

a) On suppose que $z^2>1$. Montrer que l'on peut conclure avec les conditions d'ordre 2 et conclure !

b) On suppose que $z^2\leqslant 1$. Montrer que l'on peut pas conclure avec les conditions d'ordre 2.

c) $z^2<1$. En revenant à $f(A+H)-f(A)$ montrer que f possède un extremum local en A (on pourra remarquer que $\gamma\to 1-(\gamma+z)^4$ à une limite strictement positive en 0).

d) $z^2=1$. En revenant à $f(A+H)-f(A)$ montrer que f ne possède pas d'extremum local en A (faire $\alpha=\beta$).

Q1 f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$ comme fonction polynôme.

Notons également que si f possède un extremum en un point A de l'ouvert $\mathbb{R}^3$ alors $\operatorname{grad} f(A)=0_{\mathbb{R}^3}$

Soit $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. $\frac{\partial f}{\partial x}(X)=2x-2yz^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(X)=2y-2xz^2$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(X)=-4xyz$.

$$\operatorname{grad} f(X)=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-2yz^2=0\\2y-2xz^2=0\\-4xyz=0\end{cases}\underset{\text{En s'appuyant sur }-4xyz=0}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}x\neq 0\\y=0\\z=0\\x=0\ !\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}x\neq 0\\y\neq 0\\z=0\\x=0\ !\\y=0\ !\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}.$$

Si $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$: (x,y,z) est un point critique de $f\Leftrightarrow x=y=0$.

Q2 Soit $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X)=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X)=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(X)=-4xy$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(X)=-2z^2$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(X)=-4yz$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(X)=-4xz$.

Soit $z\in\mathbb{R}$ et soit $A=(0,0,z)$. $H(f,A)=\begin{pmatrix}2&-2z^2&0\\-2z^2&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

Posons $\forall H\in\mathbb{R}^3$, $\varphi(H)={}^tH\,H(f,A)\,H$.

$\forall H=(h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3$, $\varphi(H)=2h_1^2+2h_2^2-4z^2h_1h_2=2\left[(h_1-z^2h_2)^2+h_2^2(1-z^4)\right]$

<u>a</u> Supposons $z^2>1$. Alors $1-z^4<0$

Posons $H_1=(1,0,0)$ et $H_2=(z^2,1,0)$. $\varphi(H_1)=2>0$ et $\varphi(H_2)=1-z^4<0$.

<u>f n'a pas d'extremum local en A lorsque $z^2>1$.</u>

b) Supposons $z^2 \leq 1$. Alors $1-z^4 \geqslant 0$.

Soit $H=(h_1,h_2,h_3)$.

$\varphi(H) = 2\left[(h_1-z^2h_2)^2+h_2^2(1-z^4)\right] \geqslant 0$

$\varphi(H)=0 \Leftrightarrow (h_1-z^2h_2)^2= h_2^2(1-z^4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} h_1 = z^2 h_2 \\ h_2(1-z^4)=0 \end{cases}$.

Comme $H=(h_1,h_2,h_3)$, $\varphi(H)=0$ ne donne pas nécessairement $H=0$ ($\varphi(0,0,1)=0\ldots$!)

Ainsi on a $\forall H \in \mathbb{R}^3$, $\varphi(H) \geqslant 0$ sans avoir $\forall H \in \mathbb{R}^3-\{0\}$, $\varphi(H)>0$.

On ne peut donc pas conclure.

c) Soit $H=(\alpha,\beta,\gamma)$. Notons que $f(A)=f(0,0,z)=0$.

$f(A+H)-f(A) = f(A+H) = \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta(\gamma+z)^2 = (\alpha-\beta(\gamma+z)^2)^2-\beta^2(\gamma+z)^4+\beta^2$

$f(A+H)-f(A) = (\alpha-\beta(\gamma+z)^2)^2+\beta^2\left[1-(\gamma+z)^4\right]$.

Supposons $z^2<1$. Alors $\lim\limits_{\gamma\to 0} 1-(\gamma+z)^4 = 1-z^4>0$.

Posons $\varepsilon = 1-z^4$.

$\exists h \in \mathbb{R}^*_+$, $\forall \gamma\in\mathbb{R}$, $|\gamma|<h \Rightarrow \left|(1-(\gamma+z)^4)-(1-z^4)\right| < \varepsilon = 1-z^4$

En particulier $-\left((1-(\gamma+z)^4)-(1-z^4)\right) < 1-z^4$ pour $\gamma\in\mathbb{R}$ et $|\gamma|<h$.

Donc $-((1-(\gamma+z)^4)+(1-z^4) < 1-z^4$ pour $\gamma\in\mathbb{R}$ et $|\gamma|<h$

Donc $\forall \gamma\in\mathbb{R}$, $|\gamma|<h \Rightarrow 1-(\gamma+z)^4>0$.

Supposons que $H\in B_\infty(0,h)$. $|\alpha|<h$, $|\beta|<h$ et $|\gamma|<h$

Donc $f(A+H)-f(A) = (\alpha-\beta(\gamma+z)^2)^2+\beta^2(1-(\gamma+z)^4) \geqslant 0$.

Donc $\forall H \in B_\infty(0,h)$, $f(A+H)-f(A)\geqslant 0$ ou $\forall X\in B_\infty(\underline{A},h)$, $f(X)\geqslant f(A)$.

f admet en A un minimum local lorsque $z^2<1$.

c) Supposons $z^2=1$. Soit $H=(\alpha,\beta,\delta)\in\mathbb{R}^3$.

$f(A+H)-f(A)=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta(\delta+z)^2$.

<u>Supposons $\alpha=\beta$.</u> $f(A+H)-f(A)=2\alpha^2-2\alpha^2(\delta+z)^2=2\alpha^2[1-\delta^2-2\delta z-z^2]$

$f(A+H)-f(A)\underset{z^2=1}{=}2\alpha^2(-\delta^2-2\delta z)=-2\alpha^2\delta(\delta+2z)$

<u>1er cas</u>.- $z=1$. $f(A+H)-f(A)=-2\alpha^2\delta(\delta+2)$

Soit $r\in\mathbb{R}_+^*$. Posons $H_1=\left(\frac{r}{2},\frac{r}{2},\frac{r}{2}\right)$.

Alors $H_1\in B_\infty(0,r)$ et clairement $f(A+H_1)-f(A)<0$

Posons $H_2=\left(\frac{r}{2},\frac{r}{2},\max\left(-\frac{r}{2},-1\right)\right)=\left(\frac{r}{2},\frac{r}{2},-\min\left(\frac{r}{2},1\right)\right)$

$H_2=(\alpha,\beta,\delta)$ avec $\alpha=\beta=\frac{r}{2}$ et $\delta=-\min\left(\frac{r}{2},1\right)$.

$-\delta=\min\left(\frac{r}{2},1\right)$ donc $0<-\delta\leqslant\frac{r}{2}<r$ et $0<-\delta\leqslant 1<2$

Alors $|\alpha|<r$, $|\beta|<r$, $|\delta|<r$ donc $H_2\in B_\infty(0,r)$.

De plus $\alpha>0,\beta>0,\delta<0$ et $\delta+2>0$; $f(A+H_2)-f(A)=-2\alpha^2\delta(\delta+2)<0$.

Nous avons donc prouvé que $\forall r\in\mathbb{R}_+^*$, $\exists H_1\in B_\infty(0,r)$, $\exists H_2\in B_\infty(0,r)$,

$f(A+H_1)-f(A)>0$ et $f(A+H_2)-f(A)<0$. <u>f n'a pas d'extremum local en A si $z=1$.</u>

<u>2ième cas</u>.- $z=-1$ $f(A+H)-f(A)=-2\alpha^2\delta(\delta-2)=2\alpha^2\delta(2-\delta)$.

Soit $r\in\mathbb{R}_+^*$. Posons $H_1=\left(\frac{r}{2},\frac{r}{2},\min\left(\frac{r}{2},1\right)\right)$ et $H_2=\left(\frac{r}{2},\frac{r}{2},-\frac{r}{2}\right)$

Alors $H_1\in B_\infty(0,r)$, $H_2\in B_\infty(0,r)$, $f(A+H_1)-f(A)>0$ et $f(A+H_2)-f(A)<0$.

$\forall r\in\mathbb{R}_+^*$, $\exists H_1\in B_\infty(0,r)$, $\exists H_2\in B_\infty(0,r)$, $f(A+H_1)-f(A)>0$ et $f(A+H_2)-f(A)<0$.

<u>f n'a pas d'extremum local en A si $z=-1$.</u>

Conclusion. Si $z\in]-1,1[$, f possède un minimum local en $A=(0,0,z)$

si $z\in\mathbb{R}-]-1,1[$, f ne possède pas d'extremum local en $A=(0,0,z)$

Exercice a) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$. Etudier les extremums éventuels de f.

b) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Etudier les extremums éventuels de f.

c) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R},\ f(x,y) = x\big((\ln x)^2 + y^2\big)$. Etudier les extremums éventuels de f.

d) $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = x^2y + y^2z + 2x - z$. Etudier les extremums éventuels de f.

Quelques pistes...

a) Un point critique $A=(-\frac{1}{3},-\frac{4}{3})$ $r=2>0$ $rt-s^2=4-1=3>0$

f possède un minimum local strict en A.

Mieux $H=(\alpha,\beta)$ donne $f(A+H)-f(A)=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\beta^2 \geqslant 0$

f admet en A un minimum global strict.

b) Deux points critiques $A=(0,0)$ et $B=(1,1)$.

$A=(0,0)$, $rt-s^2=-9$ RIEN. $B=(1,1)$ $rt-s^2=27$ et $r=6>0$: mini loc. strict

c) Deux points critiques $A=(1,0)$ et $B=(1,e^{-2})$.

- Pour $A=(1,0)$, $rt-s^2=4$ et $r=2$; mini local strict

Mieux $f(A)=0$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$, $f(x,y)=x[(\ln x)^2+y^2] \geqslant 0$

Donc en $A=(1,0)$ f admet un minimum global (strict).

- Pour $B=(1,e^{-2})$, $rt-s^2=-4<0$. RIEN.

d) Deux points critiques $A=(-1,1,-\frac{1}{2})$ et $B=(1,-1,\frac{1}{2})$.

$$\nabla^2 f(A)=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad q_A(H) \overset{H=(\alpha,\beta,\gamma)}{=} 2\alpha^2-\beta^2-4\alpha\beta+4\beta\gamma$$

$$q_A(H)=2(\alpha-\beta)^2-3\left(\beta-\frac{2}{3}\gamma\right)^2+\frac{4}{3}\gamma^2$$

Rien car si $H_1=(2,2,3)$, $q_A(H_1)>0$ et si $H_2=(1,1,0)$, $q_A(H_2)<0$

$$\nabla^2 f(B)=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad q_B(H) \overset{H=(\alpha,\beta,\gamma)}{=} -2\alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta-4\beta\gamma=-2(\alpha-\beta)^2+3\left(\beta-\frac{2}{3}\gamma\right)^2-\frac{4}{3}\gamma^2$$

Rien car si $H_1=(1,1,0)$, $q_B(H_1)>0$ et si $H_2=(2,2,3)$, $q_B(H_2)<0$

Exercice .. $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x+y \leq 1\}$
$\forall (x,y) \in U^2$, $f(x,y) = x^2 - 2y^2 - 5xy + x + y$.

Q1.. Montrer que U est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$. Montrer que f possède un maximum et un minimum sur U

Q2.. $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0 \text{ et } x+y < 1\}$
montrer que V est un ouvert et déterminer les extremums locaux de f sur V.

Q3.. Etudier f sur $\{(x,y) \in U \mid x=0\}$, $\{(x,y) \in U \mid y=0\}$ et $\{(x,y) \in U \mid x+y=1\}$.

Q4.. Déterminer le maximum M de f sur U et $\{X \in U \mid f(X) = M\}$.
Même chose avec le minimum.

Q1 Pour $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $u(x,y) = x+y$. u est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc l'image réciproque par u du fermé $]-\infty, 1]$ de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
Ainsi $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \leq 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
$[0,+\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$ donc $[0,+\infty[\times [0,+\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
$U = [0,+\infty[\times [0,+\infty[\cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \leq 1\}$ est alors un fermé de $\mathbb{R}^2$ comme intersection de deux fermés de $\mathbb{R}^2$.
Soit $(x,y) \in U$. $|x| \underset{x \geq 0}{=} x \overset{y \geq 0}{\leq} x+y \leq 1$ et $|y| \underset{y \geq 0}{=} y \overset{x \geq 0}{\leq} x+y \leq 1$. Max $(|x|,|y|) \leq 1$.

Donc $\forall X \in U$, $\|X\|_\infty \leq 1$. U est alors un borné de $\mathbb{R}^2$.
Finalement U est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$.
f est continue sur U car f est la restriction d'une fonction polynôme.
f est continue sur un fermé borné U de $\mathbb{R}^2$ donc f possède sur U un maximum et un minimum.

Q2 $V = (]0,+\infty[\times]0,+\infty[) \cap u^{-1}(]-\infty, 1[)$.
$]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ est un ouvert comme produit de deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $u^{-1}(]-\infty,1[)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}$ par une fonction continue.
Ainsi V est un ouvert comme intersection de deux ouverts de $\mathbb{R}^2$.
f est de classe C^1 sur V et V est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ donc si f possède

un extremum local en A sur V alors $\operatorname{grad} f(A)=0$.

Soit $A=(x,y)\in V$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A)=2x-5y+1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(A)=-4y-5x+1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A)=\frac{\partial f}{\partial y}(A)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5y+1=0 \\ -4y-5x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1/33 \\ y=7/33 \end{cases}$$

$A=\left(\frac{1}{33},\frac{7}{33}\right)$ est le seul point critique de f sur V. Notons que f est de classe C^2 sur V et que : $r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)=2$, $s=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(A)=-5$ et $t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)=-4$

Ainsi $s^2-rt=25+8>0$. f n'admet pas d'extremum local en A.

Donc <u>f n'a pas d'extremum local sur V.</u>

Par conséquent le maximum (resp. minimum) de f ne peut être atteint qu'en un point de $\{(x,y)\in U \mid x=0 \text{ ou } y=0 \text{ ou } x+y=1\}$.

Q3) Posons $U_1=\{(x,y)\in U \mid x=0\}$; $U_1=\{0\}\times[0,1]$.

Posons $\forall y\in[0,1]$, $\varphi(y)=f(0,y)=-2y^2+y$; $\forall y\in[0,1]$, $\varphi'(y)=-4y+1$.

y	0		$1/4$		1
$\varphi'(y)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(y)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	-1

Ainsi le maximum (resp. minimum) de f sur U_1 est $\frac{1}{8}$ (resp. -1) et il est atteint en le seul point $(0,\frac{1}{4})$ (resp. $(0,1)$)

Posons $U_2=\{(x,y)\in U \mid y=0\}$; $U_2=[0,1]\times\{0\}$.

Posons $\forall x\in[0,1]$, $\psi(x)=f(x,0)=x^2+x$. $\forall x\in[0,1]$, $\psi'(x)=2x+1$

x	0		1
$\psi'(x)$		$+$	
$\psi(x)$	0	$\nearrow$	2

le maximum de f sur U_2 est 2 et il est atteint en le seul point $(1,0)$;
le minimum de f sur U_2 est 0 ——— $(0,0)$.

Posons $U_3=\{(x,y)\in U \mid x+y=1\}$. $U_3=\{(x,1-x) ; x\in[0,1]\}$.

Posons $\forall x\in[0,1]$, $\ell(x)=f(x,1-x)=x^2-2(1-x)^2-5x(1-x)+x+1-x=4x^2-x-1$.

$\forall x\in[0,1]$, $\ell'(x)=8x-1$.

x	0		$1/8$		1
$\ell'(x)$		$-$	0	$+$	
$\ell(x)$	-1	$\searrow$	$-17/16$	$\nearrow$	2

Le maximum (resp. minimum) de f sur U_3 est 2 (resp. $-\frac{17}{16}$) et il est atteint en le seul point $(1/8, 7/8)$.

Le maximum (resp. minimum) de f sur U est 2 (resp. $-\frac{17}{16}$) il est atteint en un seul point $(1,0)$ (resp. $(\frac{1}{8},\frac{7}{8})$).

EXTREMA

RÉPONSES DONNÉES SOUS TOUTE RÉSERVE

(1) $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longrightarrow x[(\ln x)^2 + y^2]$
Points critiques : $(1,0)$ minimum loc ; $(e^{-2},0)$ Rien. — 2 — Ⓡ

(2) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \rightarrow \frac{1}{2}xy + (47-x-y)\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)$
P.C. $(21,20)$ Max. abs. str. — 1 — Ⓡ

(3) $a>1, b>1$. $\underline{a \neq b}$ $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \rightarrow \frac{x^2}{a^2-1} + \frac{2xy}{ab-1} + \frac{y^2}{b^2-1}$
P.C. $(0,0)$ min abs str. — 1 — Ⓡ

(4) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y,z) \longrightarrow \frac{x^2}{2} + xyz + y - z$
P.C. $(1,1,-1)$ Rien. — 2

(5) $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longrightarrow 4xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
P.C. $(4^{-1/3}, 4^{-1/3})$ Mini loc st. — 2

(6) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \rightarrow x^3+y^3-9xy+27$
P.C. $(0,0)$ et $(3,3)$. $(0,0)$ Rien ; $(3,3)$ Mini. loc. st. — 2

(7) $f : \mathbb{R}_+^{*2} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \rightarrow x \ln y - y \ln x$.
P.C. (e,e) Rien — 2 — Ⓡ

(8) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longrightarrow \frac{x^2+y^2-2x+4}{x^2+y^2+2x+4}$
P.C. $(2,0)$ Mini abs ; $(-2,0)$ Max abs — 1 — Ⓡ

(9) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longrightarrow (x+y)^2 - (x^4+y^4)$
PC $(1,1)$, $(0,0)$, $(-1,-1)$. $(0,0)$ Rien ; $(1,1)$ et $(-1,-1)$ max loc st. — 2

(10) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \rightarrow y^2 - 3x^2y + 2x^4$
P.C. $(0,0)$ Rien.

(11) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \rightarrow (y^2-x^2)(y^2-2x^2)$
P.C. $(0,0)$ Rien

(12) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y,z) \rightarrow x^2+y^2+z^2+2xyz$
P.C. $(0,0,0)$ mini loc. ; $(1,1,-1)$, $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(-1,-1,-1)$ Rien — 1 — Ⓡ

(13) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \rightarrow x^4+y^4-2(x-y)^2$
PC $(0,0)$ Rien — 2 ; $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ Min. Abs. — Ⓡ

(14) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \rightarrow x^2 + (y^3-y)^2$
P.C. $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$ ← Mini abs ; $(0,\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(0,-\frac{1}{\sqrt{3}})$ ← Rien — 2 — Ⓡ

(15) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy + 2x^2y + 2xy^2$ P.C. $(0,0), (-2,0), (0,-2)$ rien; $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6})$ max loc. R 2

(16) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy - x^2y - xy^2$ P.C. $(0,0), (1,0), (0,1)$ rien; $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ max loc. R 2

(17) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto x e^x y + z^2(1+x)$ P.C. $(0,0,0)$ rien. 2

(18) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto x^3 + y^2 - xy + z^2$ P.C. $(0,0,0)$ rien; $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, 0)$ mini loc. 2 R

(19) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto 4x^2 + y^2 + 3z^2 - 4xz - 2yz - 4x + 2$ $(1,1,1)$ mini abs 1 R

(20) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$ P.C. $(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$ mini abs. 1 R

(21) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$ P.C. $(0,0)$ rien; $(1,1)$ mini loc. 1 R

(22) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 + y^2 + x^3$ P.C. $(0,0)$ mini loc; $(-\frac{2}{3}, 0)$ rien 1 R

(24) $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$ P.C. $(1,1)$ max abs. 1 R

(25) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \dfrac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ P.C. $(1,-1)$ max abs. 1 R

Exercice $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 9\}$. $\forall (x,y) \in D,\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + y^2 - 1$.

Montrer que f possède un maximum et minimum absolus sur D et les déterminer.

Notons que D est la boule fermée de centre 0 et de rayon 3 pour la norme $\| \ \|_2$;
ainsi D est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$.

$(x,y) \to x^2+y^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$; $t \mapsto \sqrt{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Par composition $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ est alors continue sur $\mathbb{R}^2$.

Comme $(x,y) \mapsto y^2-1$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ (fonction polynômiale), $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}+y^2-1$ est alors continue sur $\mathbb{R}^2$ comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$.

En particulier f est continue sur D.

f est continue sur le fermé borné D donc <u>f possède un maximum M et un minimum m sur D.</u>

Notons que $\forall (x,y) \in D$, $f(x,y) = \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}+y^2}_{\geqslant 0} - 1 \geqslant -1 = f(0,0)$.

Ainsi $\underline{m = -1}$. Notons que $(0,0)$ est l'unique point de D qui réalise $m = -1$.

Soit $(x,y) \in D$. $x^2+y^2 \leqslant 9$ et en particulier $y^2 \leqslant 9$.

Ainsi $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + y^2 - 1 \leqslant \sqrt{9} + 9 - 1 = 11 = f(0,3)$.

Alors $\underline{M = 11.}$

Notons que $(0,3)$ et $(0,-3)$ sont les seuls points de D qui réalisent M.

<u>Remarque</u>.– Il est aisé de voir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D - \{0\}$.
Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 9\} - \{0\}$.
Sur cet ouvert f n'a pas de point critique $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \Leftrightarrow \right.$
$\left. \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \text{ et } \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2y \Leftrightarrow x = y = 0\ ! \right)$

Ainsi f ne peut réaliser m ou M qu'en 0 ou qu'en un point de $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 9\}$. Ceci constitue une bonne piste pour chercher m et M.

EXTREMUM SUR UN FERMÉ... NON BORNÉ

Exercice .. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x\sqrt{1-y} + y\sqrt{1-x}$. Étudier les extremums de f.

Notons que le domaine de définition de f est $D =]-\infty, 1] \times]-\infty, 1]$.

Posons $\Omega =]-\infty, 1[\times]-\infty, 1[$. Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme produit de deux ouverts de $\mathbb{R}$.

$(x,y) \mapsto 1-y$ est de classe C^2 sur Ω et strictement positive. Comme $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition $(x,y) \mapsto \sqrt{1-y}$ est de classe C^2 sur Ω. Comme $(x,y) \to x$ est de classe C^2 sur Ω, par produit $(x,y) \to x\sqrt{1-y}$ est de classe C^2 sur Ω.

De même $(x,y) \to y\sqrt{1-x}$ est de classe C^2 sur Ω.

Par somme f est de classe C^2 sur Ω. En particulier f est de classe C^1 sur Ω.

Dans ces conditions si f admet un extremum local en un point A de Ω, $\nabla f(A) = 0_{\mathbb{R}^2}$ donc A est un point critique de f. Cherchons les points critiques de f sur Ω.

Soit $X = (x,y) \in \Omega$.

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \frac{\partial f}{\partial x}(X) = \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0 \iff \begin{cases} \sqrt{1-y} + y\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} = 0 \\ x\dfrac{-1}{2\sqrt{1-y}} + \sqrt{1-x} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2\sqrt{1-x}\sqrt{1-y} \\ x = 2\sqrt{1-x}\sqrt{1-y} \end{cases}$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases} x = y \\ x = 2\sqrt{1-x}\sqrt{1-x} \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ x = 2(1-x) \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \iff x = y = \frac{2}{3}.$$

$A = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ est l'unique point critique. Soit $X = (x,y)$ un élément de Ω.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) = -\frac{y}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)(1-x)^{-3/2} = -\frac{y}{4}\frac{1}{(1-x)^{3/2}} \ ; \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3/2}$$

De même $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = -\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3/2}$. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-y}} - \dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) = -\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1/2}$.

"En A" $rt - s^2 = \left(-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3/2}\right)^2 - \left(-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1/2}\right)^2 = \frac{1}{36}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{27}{36} - 3 < 0.$

f n'admet pas d'extremum local en A.

Donc f n'admet pas d'extremum local en tous les points de Ω.

Soit A un point de $D \setminus \Omega$.

1er Cas. $\exists a \in]-\infty, 1[$, $A = (a, 1)$. $\forall X = (x,y) \in D$, $f(X) - f(A) = x\sqrt{1-y} + y\sqrt{1-x} - \sqrt{1-a}$

En particulier $\forall x \in]-\infty, 1]$, $f(x,1) - f(A) = \sqrt{1-x} - \sqrt{1-a} = \dfrac{a - x}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1-a}}$

$a \in]-\infty, 1[$ et $]-\infty, 1[$ est ouvert donc $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $]a-\alpha, a+\alpha[\subset]-\infty, 1[$.

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $\delta = \min\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{r}{2}\right)$, $X_1 = (a+\delta, 1)$ et $X_2 = (a-\delta, 1)$.

$\|X_1 - A\| = \sqrt{(a+\delta) - a)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{\delta^2} = \delta$ et $\|X_2 - A\| = \sqrt{(a-\delta-a)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{\delta^2} = \delta$.

Donc $\|X_1 - A\| = \|X_2 - A\| = \delta < r$; $X_1 \in B(A,r)$ et $X_2 \in B(A,r)$.

$a + \delta \leq a + \frac{\alpha}{2} < a + \alpha < 1$ donc $X_1 = (a+\delta, 1) \in D$; $X_1 \in D$.

$a - \delta < a < 1$; $X_2 = (a-\delta, 1) \in D$; $X_2 \in D$.

Enfin $f(X_1) - f(A) = \dfrac{a - (a+\delta)}{\sqrt{1-(a+\delta)} + \sqrt{1-a}} = -\dfrac{\delta}{\sqrt{1-(a+\delta)} + \sqrt{1-a}} < 0$.

$f(X_2) - f(A) = \dfrac{a - (a-\delta)}{\sqrt{1-(a-\delta)} + \sqrt{1-a}} = \dfrac{\delta}{\sqrt{1-(a-\delta)} + \sqrt{1-a}} > 0$.

Donc $\forall r \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists X_1 \in B(A,r) \cap D$, $\exists X_2 \in B(A,r) \cap D$, $f(X_1) - f(A) < 0$ et $f(X_2) - f(A) > 0$.

f n'a pas d'extremum local en A.

2ème Cas. $\exists b \in]-\infty, 1[$, $A = (1, b)$. On montre comme dans le premier cas que f

n'a pas d'extremum en A (f est symétrique en x et y...).

3ième cas : $A=(1,1)$.

$\forall X=(x,y)\in D,\ f(X)-f(A) = x\sqrt{1-y}+y\sqrt{1-x}$.

Alors $\forall X=(x,y)\in D\cap[0,1]\times[0,1],\ f(X)-f(A)\geqslant 0$.

Soit $X=(x,y)\in D\cap B(A,1)$.

$\max(|x-1|,|y-1|)\leqslant \|X-A\|<1$. $|x-1|<1$ et $|y-1|<1$; $-1<x-1$ et $-1<y-1$

Donc $x>0$ et $y>0$. Alors $x\sqrt{1-y}+y\sqrt{1-x}\geqslant 0$ ($x\leqslant 1$ et $y\leqslant 1$ car $X=(x,y)\in D$!)

Donc $\forall X\in D\cap B(A,1),\ f(X)\geqslant f(A)$.

$\exists r\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall X\in D\cap B(A,r),\ f(X)\geqslant f(A)$.

f admet un minimum local en $A=(1,1)$.

Finalement $A=(1,1)$ est le seul point de D où f admette un extremum local.

Exercice LYON 99 (sujet de remplacement ?) A est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On note $\mathcal{S}_A$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) + A(x,y).$$

Q1. Montrer que si f est un élément de $\mathcal{S}_A$ alors :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f''(x+y) = \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}(x,y)$$

Q2. Montrer que si A est l'application $(x,y) \to x^3 y^3$, alors $\mathcal{S}_A$ est vide.

Q3. Désormais A est l'application $(x,y) \to 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3$.

Soit f un élément de $\mathcal{S}_A$. Montrer que : $f(0) = 0$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ f''(t) = 12t^2$.

En déduire $\mathcal{S}_A$ (double inclusion).

Q4. Etudier les extremum de A.

(Q1) Posons $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $u(x,y) = x+y$, $v(x,y) = x$ et $w(x,y) = y$.

u, v, w sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Par composition

$\varphi_1 = f \circ u$, $\varphi_2 = f \circ v$ et $\varphi_3 = f \circ w$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Notons que $\varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_3 + A$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\, f'(u(x,y)) = f'(x+y)$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\, f''(x+y) = f''(x+y)$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\, f'(v(x,y)) = f'(v(x,y))$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\, f''(v(x,y)) = 0 \times f''(v(x,y)) = 0$.

De même $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y \partial x}(x,y) = 0$.

Alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}(x,y)$. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\underline{\underline{f''(x+y) = \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}(x,y)}}$.

(Q2) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $\frac{\partial A}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^3$; $\frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}(x,y) = 9x^2y^2$.

Comme $f \in \mathcal{S}_A$: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f''(x+y) = 9x^2y^2$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = f''(x+0) = 9x^2 \times 0^2 = 0$. f'' est nulle. Ainsi $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $9x^2y^2 = 0$!!!

Ainsi $\mathcal{S}_A = \emptyset$.

(Q3) Soit $f \in \mathcal{F}_A$. $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) + A(0,0) = 2f(0)$; $f(0) = 0$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f''(x+y) = \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}(x,y) = 12x^2 + 24xy + 12y^2 = 12(x+y)^2$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $f''(t) = f''(t+0) = 12(t+0)^2 = 12t^2$.

Ainsi $\exists c \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = 4t^3 + c$.

$\exists d \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = t^4 + ct + d$. Or $f(0) = 0$ donc $d = 0$.

Ainsi si $f \in \mathcal{F}_A$, $\exists c \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = t^4 + ct$.

Réciproquement supposons que : $\exists c \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = t^4 + ct$.

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$

- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = (x+y)^4 + c(x+y) = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + cx + cy = f(x) + f(y) + A(x,y)$!

Ainsi $f \in \mathcal{F}_A$.

Alors $\underline{\underline{\mathcal{F}_A = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \exists c \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = t^4 + ct \}}}$.

(Q4) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial A}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial A}{\partial y}(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2y + 12xy^2 + 4y^3 = 0 \\ 4x^3 + 12x^2y + 12xy^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(3x^2 + 3xy + y^2) = 0 \\ x(x^2 + 3xy + 3y^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \neq 0, \\ y = 0 \\ x^2 = 0 \,! \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y \neq 0 \\ x = 0 \\ y^2 = 0 \,! \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \neq 0, y \neq 0 \\ 3x^2 + 3xy + y^2 = 0 \\ x^2 + 3xy + 3y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \neq 0, y \neq 0 \\ 3x^2 + 3xy + y^2 = 0 \\ 2x^2 - 2y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \neq 0, y \neq 0 \\ x = y \\ 7x^2 = 0 \,! \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \neq 0, y \neq 0 \\ x = -y \\ y^2 = 0 \,! \end{cases}$$

$O = (0,0)$ est le seul point critique de A.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $A(x,x) = 14x^4$ et $A(x,-x) = -2x^4$.

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. $X_1 = (\frac{r}{2}, \frac{r}{2}) \in B_\infty(O,r)$ et $A(X_1) > 0$. $X_2 = (\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}) \in B_\infty(O,r)$ et $A(X_2) < 0$.

Ainsi A ne possède pas d'extremum en O.