ECRICOME 1992

EXERCICE 2

a désigne un réel strictement compris entre 0 et 1.

Un signal lumineux se déplace entre trois points A, B et C.

S'il est en A, la probabilité qu'il se déplace en B est égale à a et celle qu'il se déplace en C est 1 - a.

S'il est en B, la probabilité qu'il aille en A est a, et celle qu'il aille en C est 1 - a.

Enfin, s'il est en C, la probabilité qu'il aille en A est a et celle qu'il aille en B est 1 - a.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n (respectivement B_n et C_n) l'événement : "le signal est en A (respectivement en B et C) après le n-ième déplacement".

Si $n = 0$, on note A_0 (respectivement B_0 et C_0) l'événement : "le signal est en A (respectivement en B et C) avant le premier déplacement".

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{bmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{bmatrix}$

1°) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$ où $M = \begin{bmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 0 \end{bmatrix}$

On pose $N = {}^tM$

2°) a) Vérifier que le vecteur $\vec{u} = (1, 1, 1)$ est un vecteur propre de N.
A quelle valeur propre est-il associé ?

b) Déterminer les autres valeurs propres de N, et, suivant les valeurs de a, les sous-espaces propres associés.

c) N est-elle diagonalisable ?

3°) Soit $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a-1 \\ 1 & -a & a-1 \\ 1 & -a & 1 \end{bmatrix}$

Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}
(on fera apparaître les calculs).

Dans la suite de l'exercice, on fixe $a = \dfrac{1}{4}$

4°) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $N^n = PD^nP^{-1}$, où D est une matrice diagonale à préciser.

b) Calculer alors N^n pour tout entier naturel n.

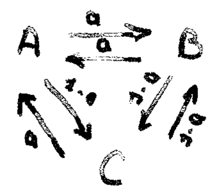
c) En déduire la valeur de M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

5°) On suppose qu'avant le premier déplacement, le signal est en A.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$ en fonction de n.

b) Déterminer alors les limites de ces suites lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2 (Q1) .. Soit $n \in \mathbb{N}$.



(A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements.

$p(A_{n+1}) = p(A_{n+1}|A_n)p(A_n) + p(A_{n+1}|B_n)p(B_n) + p(A_{n+1}|C_n)p(C_n)$

$p(A_{n+1}) = 0p(A_n) + ap(B_n) + 0p(C_n)$

de la même manière $p(B_{n+1}) = ap(A_n) + 0p(B_n) + (1-a)p(C_n)$

$p(C_{n+1}) = (1-a)p(A_n) + (1-a)p(B_n) + 0p(C_n)$

Donc
$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} p(A_{n+1}) \\ p(B_{n+1}) \\ p(C_{n+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap(B_n) + ap(C_n) \\ ap(A_n) + (1-a)p(C_n) \\ (1-a)p(A_n) + (1-a)p(B_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(A_n) \\ p(B_n) \\ p(C_n) \end{bmatrix} = MX_n$$

Remarque.. Le problème était ici presque terminé. En effet posons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$a_n = p(A_n)$, $b_n = p(B_n)$ et $c_n = p(C_n)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = ab_n + ac_n = a(b_n + c_n) = a[1 - a_n] = -a a_n + a \\ b_{n+1} = a a_n + (1-a)c_n \\ c_{n+1} = (1-a)(a_n + b_n) = (1-a)(1-c_n) = -(1-a)c_n + 1-a \end{cases}$$

$(a_n)_{n \geq 0}$ et $(c_n)_{n \geq 0}$ sont deux suites arithmético-géométriques.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x = -ax + a \iff x = \frac{a}{1+a}$ et $x = -(1-a)x + (1-a) \iff x = \frac{1-a}{2-a}$

$\left(a_n - \frac{a}{1+a}\right)_{n \geq 0}$ est géométrique de raison $-a$ et $\left(c_n - \frac{1-a}{2-a}\right)_{n \geq 0}$ est géométrique de raison $-(1-a)$.

Il vient $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-a)^n \left[a_0 - \frac{a}{1+a}\right] + \frac{a}{1+a}$ et $\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{a}{1+a}$ $(|a| < 1)$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = (a-1)^n \left[c_0 - \frac{1-a}{2-a}\right] + \frac{1-a}{2-a}$. $\lim_{n \to +\infty} c_n = \frac{1-a}{2-a}$ $(|a-1| < 1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$b_{n+1} = a a_n + (1-a)c_n = -(-a)^{n+1}\left[a_0 - \frac{a}{1+a}\right] - (a-1)^{n+1}\left[c_0 - \frac{1-a}{2-a}\right] + \frac{a^2}{1+a} + \frac{(1-a)^2}{2-a}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = (-a)^n \left[\frac{a}{1+a} - a_0\right] + (a-1)^n \left[\frac{1-a}{2-a} - c_0\right] + \frac{a^2 - a + 1}{(1+a)(2-a)}$.

Il est aisé de vérifier que cette formule vaut encore pour $n = 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = (-a)^n \left[\frac{a}{1+a} - a_0\right] + (a-1)^n \left[\frac{1-a}{2-a} - c_0\right] + \frac{a^2 - a + 1}{(1+a)(2-a)}$, $\lim_{n \to +\infty} b_n = \frac{a^2 - a + 1}{(1+a)(2-a)}$

Bravo pour le concepteur qui en 4 pages n'arrive pas à nous donner ce que l'on pouvait obtenir en 1/2 page (Les résultats sont donnés pour $a = 1/4$!)

Q2 a) $N = \begin{bmatrix} 0 & a & 1-a \\ a & 0 & 1-a \\ a & 1-a & 0 \end{bmatrix}$; $N\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+1-a \\ a+1-a \\ a+1-a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \neq 0_{M_3(\mathbb{R})}$.

Par conséquent $\underline{1 \in \mathrm{Spec}(N)}$ et $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ est un vecteur propre de N.

b) et c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $N - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} -\lambda & a & 1-a \\ a & -\lambda & 1-a \\ a & 1-a & -\lambda \end{bmatrix}$ cherchons une réduite de Gauss de cette matrice.

$$\begin{bmatrix} a & 1-a & -\lambda \\ a & -\lambda & 1-a \\ -\lambda & a & 1-a \end{bmatrix} \xrightarrow{a \neq 0} \begin{bmatrix} a & 1-a & -\lambda \\ 0 & -\lambda-1+a & 1-a+\lambda \\ 0 & +\lambda\frac{1-a}{a}+a & \frac{-\lambda^2}{a}+1-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1-a & -\lambda \\ 0 & -(\lambda+1-a) & \lambda+1-a \\ 0 & \lambda(1-a)+a^2 & -\lambda^2+a-a^2 \end{bmatrix}$$

1er cas : $\lambda = a-1$

$\begin{bmatrix} a & 1-a & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(1-a)+a^2 & -\lambda^2+a-a^2 \end{bmatrix}$ devient $\begin{bmatrix} a & 1-a & -\lambda \\ 0 & \lambda(1-a)+a^2 & -\lambda^2+a-a^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ par $L_2 \leftrightarrow L_3$. Cette matrice n'est pas inversible (elle est triangulaire supérieure avec un zéro sur la diagonale) donc $N - \lambda I_3$ n'est pas inversible. $\lambda \in \mathrm{Spec}\, N$

2ème cas : $\lambda \neq a-1$

$\begin{bmatrix} a & 1-a & -\lambda \\ 0 & -(\lambda+1-a) & \lambda+1-a \\ 0 & \lambda(1-a)+a^2 & -\lambda^2+a-a^2 \end{bmatrix}$ devient $\begin{bmatrix} a & 1-a & -\lambda \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda(1-a)+a^2 & -\lambda^2+a-a^2 \end{bmatrix}$ par $L_2 \leftarrow \frac{1}{\lambda+1-a} L_2$

$\begin{bmatrix} a & 1-a & -\lambda \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$ avec $t = \lambda(1-a)+a^2-\lambda^2+a-a^2 = -\lambda^2+(1-a)\lambda+a$

$t = -(\lambda-1)(\lambda+a)$

Dans ce cas $N - \lambda I_3$ est non inversible ssi $t = 0$ soit $\lambda = 1$ ou $\lambda = -a$.

IMPORTANT

Notons que dans ce cas $\lambda \neq a-1$ donc $\lambda = 1$ exige $a - 1 \neq 1$, c'est à dire $a \neq 2$ ce qui est !

$\lambda = -a$ exige $a-1 \neq -a$ soit $\underline{a \neq 1/2}$ ce qui n'est pas toujours !

<u>Conclusion..</u> $a=\frac{1}{2}$. $\mathrm{Spec}(N)=\{\frac{1}{2}-1, 1\}=\{-\frac{1}{2}, 1\}$

$a\neq\frac{1}{2}$ $\mathrm{Spec}(N)=\{a-1, 1, -a\}$

Notons dans ce dernier cas que $a-1$, 1 et $-a$ sont deux à deux distincts ($a\in]0,1[-\{1/2\}$)

Donc $N\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et N a trois valeurs propres distinctes ; N est diagonalisable

Remarquons encore que dans <u>les 2 cas on peut écrire $\mathrm{Spec}(N)=\{a-1, 1, -a\}$</u>.

Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, posons $F_\lambda=\{X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid NX=\lambda X\}$.

Soit $X=\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

<u>$NX=(a-1)X$</u> $\Leftrightarrow \begin{cases} ay+(1-a)z=(a-1)x\\ ax+(1-a)z=(a-1)y\\ ax+(1-a)y=(a-1)z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(1-a)x+ay+(1-a)z=0\\ (1-2a)(x-y)=0 & L_1-L_2\\ (1-2a)(x-y)=0 & L_1-L_3\end{cases}$

1er cas.. $a\neq 1/2$. $NX=(a-1)X \Leftrightarrow x=y$ et $x=(a-1)z$

$F_{a-1}=\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}a-1\\ a-1\\ 1\end{bmatrix}\right)$

2e cas.. $a=1/2$ $NX=(a-1)X \Leftrightarrow NX=(-1/2)X \Leftrightarrow x+y+z=0$

$E_{1/2}=\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 1\\ -1\end{bmatrix}\right)$

$NX=X \Leftrightarrow \begin{cases} ay+(1-a)z=x\\ ax+(1-a)z=y\\ ax+(1-a)y=z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-x+ay+(1-a)z=0\\ (a^2-1)(x-z)=0 & aL_2+L_1\\ (a^2-a+1)(y-z)=0 & aL_1+L_3\end{cases}$

$NX=X \Leftrightarrow \begin{cases} x=z\\ y=z\\ -z+az+(1-a)z=0\end{cases} \Leftrightarrow x=y=z$. $\quad$ <u>$F_1=\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}\right)$</u>.

$NX=-aX \Leftrightarrow \begin{cases} ay+(1-a)z=-ax\\ ax+(1-a)z=-ay\\ ax+(1-a)y=-az\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+ay+(1-a)z=0\\ ax+ay+(1-a)z=0\\ ax+(1-a)y+az=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+ay+(1-a)z=0\\ (2a-1)(y-z)=0 & L_1-L_3\end{cases}$

Si $a=1/2$ $F_{-a}=F_{-1/2}$ déjà fait.

Si $a\neq 1/2$ $NX=-aX \Leftrightarrow \begin{cases} y=z\\ ax+z=0\end{cases}$ $\quad F_{-a}=\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\ -a\\ -a\end{bmatrix}\right)$.

Remarque.. **1er cas.. $a = 1/2$** $\quad \mathrm{Spec}(N) = \{-1/2, 1\}$. $F_{-1/2} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right)$ et $F_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$

$\dim F_{-1/2} + \dim F_1 = 3$

N est diagonalisable

2ème cas.. $a \neq 1/2$ $\quad \mathrm{Spec}(N) = \{a-1, 1, -a\}$

$F_{a-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}a-1\\a-1\\1\end{bmatrix}\right)$, $F_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$, $F_{-a} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-a\\-a\end{bmatrix}\right)$

N est diagonalisable.

Remarque.. dans les deux cas $\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-a\\-a\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}a-1\\a-1\\1\end{bmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de N.

Q3. Soit $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$PX = Y \iff \begin{cases} x + y + (a-1)z = x' \\ x - ay + (a-1)z = y' \\ x - ay + z = z' \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + (a-1)z = x' \\ (1+a)y = x' - y' & L_1 - L_2 \\ (a-2)z = y' - z' & L_2 - L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{1}{a+1}(x'-y') \\ z = \frac{1}{a-2}(y'-z') \\ x = x' - y - (a-1)z \end{cases}$$

$$PX = Y \iff \begin{cases} x = \frac{1}{(a+1)(a-2)}\left[(a+1)(a-2)x' - (a-2)(x'-y') - (a-1)(a+1)(y'-z')\right] = (a)(a-2)x' + (-a^2+a-1)y' + (a^2-1)z' \\ y = \frac{1}{a+1}(x'-y') \\ z = \frac{1}{a-2}(y'-z') \end{cases}$$

Ceci prouve que P est inversible et que : $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a}{a+1} & \frac{-a^2+a-1}{(a+1)(a-2)} & \frac{a-1}{a-2} \\ \frac{1}{a+1} & -\frac{1}{a+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a-2} & -\frac{1}{a-2} \end{bmatrix}$

Normal pour une matrice de passage.

Q4 a) P est inversible et les colonnes de P sont des vecteurs propres de N respectivement associés aux valeurs propres 1, $-a$ et $a-1$. P étant inversible ces vecteurs constituent une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. P n'est autre que la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base $\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-a\\-a\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}a-1\\a-1\\1\end{bmatrix}\right)$; par conséquent $P^{-1}NP = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&-a&0\\0&0&a-1\end{bmatrix}$. Posons $D = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&-a&0\\0&0&a-1\end{bmatrix}$. $D = P^{-1}NP$

Une récurrence simple donne : $\forall n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}N^nP$ ou $N^n = PD^nP^{-1}$.

b) Supposons $a = 1/4$ $\quad D = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1/4&0\\0&0&-3/4\end{bmatrix}$; $P = \begin{bmatrix}1&1&-3/4\\1&-1/4&-3/4\\1&-1/4&1\end{bmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{bmatrix}1/5&13/35&3/7\\4/5&-4/5&0\\0&-4/7&4/7\end{bmatrix}$

Notons que $P^{-1} = \frac{1}{35}\begin{bmatrix}7&13&15\\28&-28&0\\0&-20&20\end{bmatrix}$

Soit $n\in\mathbb{N}$

$$N^n=\begin{bmatrix}1&1&-3/4\\1&-1/4&-3/4\\1&-1/4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\alpha^n&0\\0&0&\beta^n\end{bmatrix}\frac{1}{35}\begin{bmatrix}7&13&15\\28&-28&0\\0&-20&20\end{bmatrix}\quad \text{avec } \alpha=-1/4 \text{ et } \beta=-3/4$$

$$N^n=\frac{1}{35}\begin{bmatrix}1&\alpha^n&-3/4\,\beta^n\\1&-1/4\,\alpha^n&-3/4\,\beta^n\\1&-1/4\,\alpha^n&\beta^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&13&15\\28&-28&0\\0&-20&20\end{bmatrix}=\frac{1}{35}\begin{bmatrix}7+28\alpha^n&13-28\alpha^n+15\beta^n&15-15\beta^n\\7-7\alpha^n&13+7\alpha^n+15\beta^n&15-15\beta^n\\7-7\alpha^n&13+7\alpha^n-20\beta^n&15+20\beta^n\end{bmatrix}$$

Faut-il que les soirées soient longues à LILLE pour prendre son pied avec ce type de calculs !

Par conséquent : $$N^n=\frac{1}{35}\begin{bmatrix}7+28(-1/4)^n&13-28(-1/4)^n+15(-3/4)^n&15-15(-3/4)^n\\7-7(-1/4)^n&13+7(-1/4)^n+15(-3/4)^n&15-15(-3/4)^n\\7-7(-1/4)^n&13+7(-1/4)^n-20(-3/4)^n&15+20(-3/4)^n\end{bmatrix}$$

Par conséquent : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\Pi^n={}^tN^n=$ $$\frac{1}{35}\begin{bmatrix}7+28(-1/4)^n&7-7(-1/4)^n&7-7(-1/4)^n\\13-28(-1/4)^n+15(-3/4)^n&13+7(-1/4)^n+15(-3/4)^n&13+7(-1/4)^n-20(-3/4)^n\\15-15(-3/4)^n&15-15(-3/4)^n&15+20(-3/4)^n\end{bmatrix}$$

Q5 a) Ici $X_0=\begin{bmatrix}p(A_0)\\p(B_0)\\p(C_0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $X_{n+1}=\Pi X_n$ donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $X_n=\Pi^n X_0$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $$\begin{bmatrix}p(A_n)\\p(B_n)\\p(C_n)\end{bmatrix}=\frac{1}{35}\begin{bmatrix}7+28(-1/4)^n\\13-28(-1/4)^n+15(-3/4)^n\\15-15(-3/4)^n\end{bmatrix}$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $p(A_n)=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$, $p(B_n)=\frac{13}{35}-\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n+\frac{3}{7}\left(-\frac{3}{4}\right)^n$ et $p(C_n)=\frac{3}{7}-\frac{3}{7}\left(-\frac{3}{4}\right)^n$

b) Clairement : $\lim_{n\to+\infty}p(A_n)=\frac{1}{5}$, $\lim_{n\to+\infty}p(B_n)=\frac{13}{35}$ et $\lim_{n\to+\infty}p(C_n)=\frac{3}{7}$.

Notons que ce résultat ne dépend pas de la position initiale ce qui ne surprendra pas les spécialistes des chaînes de MARKOV ... et oui encore !

ECRICOME 1993

EXERCICE 2

N.B. On pourra utiliser le fait qu'une matrice $\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Si $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $\phi(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

1°) a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λ est valeur propre de $\phi(A)$ si et seulement si :

$(a - \lambda^2)(d - \lambda^2) - bc = 0$

b) En déduire l'équivalence suivante :

<u>λ est valeur propre de $\phi(A)$ $\Leftrightarrow$ λ^2 est valeur propre de A.</u>

c) Exemple : si $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, quelles sont les valeurs propres de $\phi(A)$?

$\phi(A)$ est-elle diagonalisable ?

2°) On suppose maintenant que <u>$a = 1$ et $b = 0$</u>.

a) Pour λ fixé dans $\mathbb{R}$, on note $\mathrm{V}(\lambda)$ l'ensemble des vecteurs (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$ tels que :

$$\phi(A)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

(i) Déterminer V(1) et V(-1), ainsi que leurs dimensions, dans le cas où $d \neq 1$ ou $c \neq 0$

(ii) Même question si $d = 1$ et $c = 0$.

b) Etablir l'équivalence suivante : $\phi(A)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} (d = 1 \text{ et } c = 0) \\ \text{ou} \\ (d > 0 \text{ et } d \neq 1) \end{cases}$

c) Déterminer la probabilité pour que $\phi(A)$ ait quatre valeurs propres réelles distinctes dans chacun des deux cas suivants :

(i) c et d sont des *entiers* choisis au hasard et indépendamment l'un de l'autre dans [-5 ; 3].

(ii) c et d sont des *réels* choisis au hasard et indépendamment l'un de l'autre dans [-5 ; 3].

d) Déterminer la probabilité pour que $\phi(A)$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dans chacun des cas (i) et (ii) précédents.

Exercice 2. Q0. Soit $\hat{A}=\begin{bmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{bmatrix}$. Montrons que $\hat{A}$ est inversible si et seulement si $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$.

Envisageons pour cela deux cas.

1er cas. $\alpha=0$. Alors $\alpha\delta-\beta\gamma=-\beta\gamma$ et $\hat{A}=\begin{bmatrix}0 & \gamma\\ \beta & \delta\end{bmatrix}$.

Donc $\begin{bmatrix}\beta & \delta\\ 0 & \gamma\end{bmatrix}$ est une réduite de Gauss de $\hat{A}$ ($L_1 \leftrightarrow L_2$!)

Par conséquent : $\hat{A}$ inversible $\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\beta & \delta\\ 0 & \gamma\end{bmatrix}$ inversible $\Leftrightarrow \beta\neq 0$ et $\gamma\neq 0 \Leftrightarrow -\beta\gamma\neq 0 \overset{\alpha=0}{\Leftrightarrow} \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$.

2ème cas. $\alpha\neq 0$. Effectuons l'opération $L_2\leftarrow L_2-\frac{\beta}{\alpha}L_1$ sur $\hat{A}$. On obtient :

$$\begin{bmatrix}\alpha & \gamma\\ 0 & \delta-\frac{\beta\gamma}{\alpha}\end{bmatrix}$$ qui est donc une réduite de Gauss de $\hat{A}$.

Par conséquent : $\hat{A}$ inversible $\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\alpha & \gamma\\ 0 & \delta-\frac{\beta\gamma}{\alpha}\end{bmatrix}$ inversible $\Leftrightarrow \delta-\frac{\beta\gamma}{\alpha}\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$.

$\alpha\neq 0$

CL. $\hat{A}=\begin{bmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{bmatrix}$ est inversible si et seulement si $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$.

Soit $A=\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

$\lambda\in\operatorname{Spec}(A) \Leftrightarrow A-\lambda I$ non inversible $\Leftrightarrow \begin{bmatrix}a-\lambda & c\\ b & d-\lambda\end{bmatrix}$ non inversible $\Leftrightarrow (a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0$

CL. $\lambda\in\operatorname{Spec} A \Leftrightarrow (a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0$

Q1 a)+b). Soit $\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{bmatrix}\in M_{4,1}(\mathbb{R})$. et soit $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\Phi(A)\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}z=\lambda x\\ t=\lambda y\\ ax+cy=\lambda z\\ bx+dy=\lambda t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=\lambda x\\ t=\lambda y\\ ax+cy=\lambda^2 x\\ bx+dy=\lambda^2 y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=\lambda x\\ t=\lambda y\\ (A-\lambda^2 I)\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\end{cases} \quad (1)$$

1er cas. $A-\lambda^2 I$ est inversible.

Alors $(A-\lambda^2 I)\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow x=y=0$

Par conséquent : $\Phi(A)\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}z=\lambda x\\ t=\lambda y\\ x=y=0\end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=t=0$.

Donc $\lambda\notin\operatorname{Spec}\Phi(A)$.

2ième Cas.. $A-\lambda^2 I$ n'est pas inversible.

On peut donc trouver $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que : $\begin{cases} (A-\lambda^2 I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{cases}$

En posant $z = \lambda x$ et $t = \lambda y$ on obtient un élément $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$ de $M_{4,1}(\mathbb{R})$ tel que :

$\phi(A)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Donc $\lambda \in \operatorname{Spec} \phi(A)$.

CL.. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda \in \operatorname{Spec}(\phi(A))$

$\Updownarrow$

$A-\lambda^2 I$ n'est pas inversible

$\Updownarrow$

$\lambda^2 \in \operatorname{Spec}(A)$

$\Updownarrow$

$(a-\lambda^2)(d-\lambda^2) - bc = 0.$

c) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda \in \operatorname{Spec}(A) \Leftrightarrow (-1-\lambda)(4-\lambda) - (-3)\times 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\lambda \in \operatorname{Spec}(A) \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = 2$

$\operatorname{Spec}(A) = \{1, 2\}$

Par conséquent $\operatorname{Spec}(\phi(A)) = \{-1, 1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ $\quad$ ($\lambda \in \operatorname{Spec} \phi(A) \Leftrightarrow \lambda^2 \in \{1,2\}$ ...).

CL.. $\phi(A)$ est diagonalisable car c'est un élément de $M_4(\mathbb{R})$ ayant 4 valeurs propres distinctes.

(Q2) Notons que $A = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{bmatrix}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\lambda \in \operatorname{Spec}(A) \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-d) - 0\times c = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = d$.

Nous pouvons donc dire que : $\operatorname{Spec} \phi(A) = \begin{cases} \{-1, 1, \sqrt{d}, -\sqrt{d}\} \text{ si } d > 0 \\ \{-1, 1, 0\} \text{ si } d = 0 \\ \{-1, 1\} \text{ si } d < 0 \end{cases}$

a) Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$(x,y,z,t) \in V(1) \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ t = y \\ x + cy = x \\ dy = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ t = y \\ cy = 0 \\ (d-1)y = 0 \end{cases}$

$(x,y,z,t) \in V(-1) \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ t = -y \\ x + cy = x \\ dy = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ t = -y \\ cy = 0 \\ (d-1)y = 0 \end{cases}$

i) $d \neq 1$ ou $c \neq 0$

$(x,y,z,t) \in V(1) \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ t = y \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ t = y = 0 \end{cases}$. $\underline{\underline{V(1) = \text{Vect}\,((1,0,1,0))}}$. $\dim V(1) = 1$.

$(x,y,z,t) \in V(-1) \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ t = -y \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ t = y = 0 \end{cases}$. $\underline{\underline{V(-1) = \text{Vect}\,((1,0,-1,0))}}$. $\dim V(-1) = 1$.

ii) $(d,c) = (1,0)$.

$(x,y,z,t) \in V(1) \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ t = y \end{cases}$. $\underline{\underline{V(1) = \text{Vect}\,((1,0,1,0),(0,1,0,1))}}$. $\dim V(1) = 2$.

$(x,y,z,t) \in V(-1) \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ t = -y \end{cases}$. $\underline{\underline{V(1) = \text{Vect}\,((1,0,-1,0),(0,1,0,-1))}}$. $\dim V(-1) = 2$.

b) Envisageons trois grands cas..

1er cas.. $d < 0$. $\text{Spec}\,\phi(A) = \{-1,1\}$ comme $\dim V(1) = \dim V(-1) = 1$, $\phi(A)$ n'est pas diagonalisable.

2e cas.. $d = 0$. $\text{Spec}\,\phi(A) = \{-1,1,0\}$ et $\dim V(1) = \dim V(-1) = 1$.

cherchons alors $\dim V(0)$. soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

$(x,y,z,t) \in V(0) \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0.x \\ t = 0.y \\ x + cy = 0^2 x \\ 0 = 0^2 y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = t = 0 \\ x = -cy \end{cases}$. $V(0) = \text{Vect}\,((-c,1,0,0))$. $\dim V(0) = 1$

$\dim V(1) + \dim V(-1) + \dim V(0) = 3$; $\phi(A)$ n'est pas diagonalisable.

3e cas.. $d > 0$. $\text{Spec}\,\phi(A) = \{-\sqrt{d}, \sqrt{d}, -1, 1\}$

* $d \neq 1$. $\phi(A)$ a quatre valeurs propres distinctes donc $\phi(A)$ est diagonalisable car $\phi(A) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

* $d = 1$ $\text{Spec}\,\phi(A) = \{-1,1\}$

si $c \neq 0$ $\dim V(1) + \dim V(-1) = 2$; $\phi(A)$ n'est pas diagonalisable.
si $c = 0$ $\dim V(1) + \dim V(-1) = 4$; $\phi(A)$ est diagonalisable.

<u>conclusion</u>.. $\phi(A)$ est diagonalisable $\Leftrightarrow \begin{cases} d > 0 \text{ et } d \neq 1 \\ \text{ou} \\ d = 1 \text{ et } c = 0 \end{cases}$

c) Notons X_c et X_d les var prenant respectivement les valeurs c et d.

$\phi(A)$ a quatre valeurs propres distinctes si et seulement si $d > 0$ et $d \neq 1$.

Notons E_1 l'événement $\phi(A)$ a quatre valeurs propres distinctes.

$p(E_1) = p(X_d > 0$ et $X_d \neq 1) = p(\{X_d > 0\} \cap \{X_d \neq 1\})$.

(i) $p(E_1) = p(X_d = 2) + p(X_d = 3) = 2 \times \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$; $\underline{\underline{p(E_1) = 2/9}}$

(ii) $p(E_1) = p(0 < X_d < 1) + p(1 < X_d < 3) = \frac{1-0}{3-(-5)} + \frac{3-1}{3-(-5)} = \frac{3}{8}$; $\underline{\underline{p(E_1) = 3/8}}$

d) Notons E_2 l'événement $\phi(A)$ est diagonalisable.

$p(E_2) = p(E_1 \cup (\{X_d = 1\} \cap \{X_c = 0\})) = p(E_1) + p(X_d = 1)\, p(X_c = 0)$.

incompatibilité + indépendance ...

(i) $p(E_2) = 2/9 + \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{19}{81}$; $\underline{\underline{p(E_2) = \frac{19}{81}}}$

(ii) $p(E_2) = p(E_1) = 3/8$; $\underline{\underline{p(E_2) = \frac{3}{8}}}$

ECRICOME 1995

EXERCICE 1

Recherche des valeurs propres d'un endomorphisme

Dans cet exercice :
E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
$M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
$GL_3(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $M_3(\mathbb{R})$ des matrices inversibles.
On considère l'application f qui, à tout élément P de E, associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = (2X+1)\cdot P(X) - (X^2-1)\cdot P'(X)$$

1° Montrer que f est un endomorphisme de E.

2° Soit B un vecteur propre pour f, c'est-à-dire un élément non nul de E tel qu'il existe un réel λ satisfaisant à la relation : $f(B) = \lambda B$.

a) Montrer que B est nécessairement de degré 2.

b) On suppose que $\lambda = 3$. Montrer que -1 est racine de B.
Soit k l'ordre de multiplicité de la racine -1 ; il existe donc un polynôme A tel que :

$$B(X) = (X+1)^k A(X) \quad \text{avec} \quad A(-1) \neq 0$$

- Montrer que $k = 2$ et que A est constant.
- En déduire que $\lambda = 3$ est valeur propre de f et déterminer les vecteurs propres associés.

c) En supposant $\lambda = -1$, étudier de même la multiplicité de la racine 1. En déduire que $\lambda = -1$ est valeur propre de f et déterminer les vecteurs propres associés.

d) On suppose maintenant que $\lambda \neq 3$ et $\lambda \neq -1$. Montrer que -1 et 1 sont racines de B. En déduire une factorisation des polynômes B obtenus, ainsi que la valeur propre associée à B.

3° Étude d'un cas particulier
Soit F le sous-espace vectoriel de E constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à deux et g la restriction de f à F. On désigne par $\mathbf{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de F.

a) Montrer que g est un endomorphisme de F.

b) Écrire la matrice A de g relativement à la base $\mathbf{B}$.

c) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D de $M_3(\mathbb{R})$ et une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad A^n = PD^nP^{-1}$$

d) Expliciter alors A^n en fonction de n.

Exercice 1.. Q1 - f est clairement une application de E dans E.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(P,S) \in E^2$

$f(\lambda P+S) = (2X+1)(\lambda P+S)(X) - (X^2-1)(\lambda P+S)'(X)$. Comme $(\lambda P+S)' = \lambda P' + S'$ il vient :

$f(\lambda P+S) = \lambda\left[(2X+1)P(X) - (X^2-1)P'(X)\right] + \left[(2X+1)S(X) - (X^2-1)S'(X)\right]$; c'est à dire :

$f(\lambda P+S) = \lambda f(P) + f(S)$.

Ceci achève de montrer que f est un endomorphisme de E.

Q2 a) Notons r le degré de B ($r \in \mathbb{N}$ car $B \neq 0$). Notons a_r le coefficient de X^r dans B

le coefficient de X^{r+1} dans $f(B)$ est : $2a_r - ra_r$.

le coefficient de X^{r+1} dans λB est 0.

$f(B) = \lambda B$ fournit alors : $2a_r - ra_r = 0$; soit $r = 2$ car a_r n'est pas nul.

Par conséquent le degré de B est nécessairement 2.

b) $\lambda = 3$. $(2X+1)B(X) - (X^2-1)B'(X) = 3B(X)$.

En prenant la valeur en -1 il vient : $-B(-1) - 0 = 3B(-1)$; donc $B(-1) = 0$;

-1 est racine de B.

$B(X) = (X+1)^k A(X)$ avec $A(-1) \neq 0$. Notons que $k = 1$ ou 2.

$f(B) = 3B$ donne : $(2X+1)(X+1)^k A(X) - (X^2-1)\left(k(X+1)^{k-1}A(X) + (X+1)^k A'(X)\right) = 3(X+1)^k A(X)$

En divisant par $(X+1)^k$ il vient :

$(2X+1)A(X) - (X-1)kA(X) - (X^2-1)A'(X) = 3A(X)$. En prenant la valeur en -1 et en divisant par $A(-1)$ ($A(-1) \neq 0$!) on obtient $-1 + 2k = 3$ c'est à dire $k = 2$.

$B(X) = (X+1)^2 A(X)$. Comme le degré de B est 2, A est constant.

$\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $B(X) = \alpha(X+1)^2$.

Nous venons de montrer que : $B \neq 0$ et $f(B) = 3B \Rightarrow B \in \mathrm{Vect}((X+1)^2)$.

Ceci permet de dire que $\mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Vect}((X+1)^2)$. Cela ne permet pas de dire que 3 est valeur propre de f !

Pour montrer cela montrons que : $\mathrm{Vect}((X+1)^2) \subset \mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id}_E)$. Il suffit de prouver que : $f((X+1)^2) = 3(X+1)^2$.

$f((X+1)^2) = (2X+1)(X+1)^2 - (X^2-1)(2(X+1)) = (X+1)^2(2X+1 - 2(X-1)) = 3(X+1)^2$

Finalement : $\mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}((X+1)^2)$. Donc 3 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $(X+1)^2$.

c) Ici $\lambda = -1$. $f(B) = -B$

$(2X+1)B(X) - (X^2-1)B'(X) = -B(X)$

En prenant la valeur en 1 on obtient : $3B(1) - 0 = -B(1)$; $B(1) = 0$.

Soit p l'ordre de multiplicité de 1 dans B.

$\exists C \in E$, $B(X) = (X-1)^p C(X)$ avec $C(1) \neq 0$.

$f(B) = -B$ donc $(2X+1)(X-1)^p C(X) - (X^2-1)p(X-1)^{p-1}C(X) - (X^2-1)(X-1)^p C'(X) = -(X-1)^p C(X)$

En divisant par $(X-1)^p$ il vient :

$(2X+1)C(X) - (X+1)p\,C(X) - (X^2-1)C'(X) = -C(X)$; donc :

$3C(1) - 2p\,C(1) - 0 = -C(1)$. Comme $C(1) \neq 0$: $3 - 2p = -1$; $p = 2$

$B(X) = (X+1)^2 C(X)$. Comme $\deg B = 2$: C est constant

Par conséquent $B \in \mathrm{Vect}((X-1)^2)$, donc $\mathrm{Ker}(f + Id_E) \subset \mathrm{Vect}((X-1)^2)$

Réciproquement : $f((X-1)^2) = (2X+1)(X-1)^2 - (X^2-1)2(X-1) = (X-1)^2(2X+1-2(X+1)) = -(X-1)^2$

Donc $\mathrm{Vect}((X-1)^2) \subset \mathrm{Ker}(f + Id_E)$.

Finalement : $\mathrm{Ker}(f + Id_E) = \mathrm{Vect}((X-1)^2)$. -1 est alors valeur propre de f et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $(X+1)^2$.

d) $\lambda \neq 3$ et $\lambda \neq -1$.

$(2X+1)B(X) - (X^2-1)B'(X) = \lambda B(X)$

En prenant la valeur en 1 il vient $3B(1) = \lambda B(1)$ et donc $B(1) = 0$ car $\lambda \neq 3$

" " " -1 il vient $-B(-1) = \lambda B(-1)$ et donc $B(-1) = 0$ car $\lambda \neq -1$

Donc 1 et -1 sont racines de B comme $\deg B = 2$:

$\exists \delta \in \mathbb{R}$, $B(X) = \delta(X+1)(X-1) = \delta(X^2-1)$. δ n'est pas nul car B ne l'est pas.

Calculons, rien que pour s'amuser $f(X^2-1)$!

$f(X^2-1) = (2X+1)(X^2-1) - (X^2-1)2X = (X^2-1)(2X+1-2X) = (X^2-1)$

Donc $f(B) = f(\delta(X^2-1)) = \delta f(X^2-1) = \delta(X^2-1) = B$ or $f(B) = \lambda B$ et $B \neq 0$ donc $\lambda = 1$

Ceci prouve que :

1°. Si λ est une valeur propre de f distincte de 3 et -1 alors $\lambda = 1$

2°. $\mathrm{Ker}(f - Id_E) \subset \mathrm{Vect}(X^2-1)$

Or nous avons vu que $f(X^2-1) = X^2-1$ donc $\mathrm{Ker}(f - Id_E) = \mathrm{Vect}(X^2-1)$

1 est effectivement valeur propre de f et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par X^2-1.

Résumons même si cela n'est pas demandé.

1°.. Spec $f = \{-1, 1, 3\}$

2°.. Les sous-espaces propres associés sont respectivement : $\mathrm{Vect}((X-1)^2)$, $\mathrm{Vect}((X-1)(X+1))$, $\mathrm{Vect}((X+1)^2)$.

Q3 .. a) Soit $P \in F = \mathbb{R}_2[X]$

$g(P) = (2X+1)P(X) - (X^2-1)P'(X)$ donc $g(P)$ est de degré au plus 3

Soit a le coefficient de X^2 dans P

Le coefficient de X^3 dans $g(P)$ est : $2a - 2a = 0$. Finalement $g(P)$ est de degré au plus 2.

$\forall P \in F$, $g(P) \in F$.

De plus : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (P,S) \in F^2$, $g(\lambda P + S) = f(\lambda P + S) = \lambda f(P) + f(S) = \lambda g(P) + g(S)$.

<u>g est un endomorphisme de F.</u>

b) $g(1) = (2X+1) = 1 + 2X$

$g(X) = (2X+1)X - (X^2-1) = X^2 + X + 1 = 1 + X + X^2$

$g(X^2) = (2X+1)X^2 - (X^2-1)2X = X^2 + 2X = 2X + X^2$

Finalement : $M_B(g) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Notons encore que $(X-1)^2$, $(X-1)(X+1)$ et $(X+1)^2$ sont des éléments de F et : $\begin{cases} g((X-1)^2) = f((X-1)^2) = -(X-1)^2 \\ g((X-1)(X+1)) = f((X-1)(X+1)) = (X-1)(X+1) \\ g((X+1)^2) = 3(X+1)^2 \end{cases}$

c) Posons $\mathcal{B}' = ((X-1)^2, (X-1)(X+1), (X+1)^2)$

$\mathcal{B}'$ est une famille libre de F car elle constituée de vecteurs propres de g associés à des valeurs propres <u>distinctes</u>. Comme $\dim F = 3$, $\mathcal{B}'$ est une base de F comme famille libre de trois éléments de F.

La matrice de g dans $\mathcal{B}'$ est $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. <u>$g$ et A sont diagonalisables.</u>

Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

1°.. $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2°.. $D = P^{-1}AP$ ou $A = PDP^{-1}$

Une récurrence simple montre alors que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ et achève la question.

d) P^{-1} n'est autre que la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ et

$(X-1)^2 = X^2 - 2X + 1$, $X^2 - 1 = X^2 - 1$!, $(X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$.

$$X = \frac{1}{4}\left[(X+1)^2 - (X-1)^2\right] = -\frac{1}{4}(X-1)^2 + \frac{1}{4}(X+1)^2$$

$$1 = \frac{1}{4}\left[X^2 + 2X + 1 + X^2 - 2X + 1 - 2(X^2-1)\right] = \frac{1}{4}(X-1)^2 - \frac{1}{2}(X^2-1) + \frac{1}{4}(X+1)^2$$

$$X^2 = \frac{1}{4}\left[X^2 + 2X + 1 + X^2 - 2X + 1 + 2(X^2-1)\right] = \frac{1}{4}(X-1)^2 + \frac{1}{2}(X^2-1) + \frac{1}{4}(X+1)^2$$

Finalement $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^n & -(-1)^n & (-1)^n \\ -2 & 0 & 2 \\ 3^n & 3^n & 3^n \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} (-1)^n + 2 + 3^n & -(-1)^n + 3^n & (-1)^n - 2 + 3^n \\ -2(-1)^n + 2\times 3^n & 2(-1)^n + 2\times 3^n & -2(-1)^n + 2\times 3^n \\ (-1)^n - 2 + 3^n & -(-1)^n + 3^n & (-1)^n + 2 + 3^n \end{bmatrix}$$

ECRICOME 1998

EXERCICE 2

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur $\mathbb{R}$.

A toute fonction f de E, on associe la fonction F définie par :

$$x \to F(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt$$

1 - Montrer que F est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $F'(x)$.

2 - Déterminer F dans les cas suivants :

a) $x \to f(x) = \sin 2\pi x$;

b) $x \to f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

3 - Soit T l'application de E dans lui-même définie par : $f \to T(f) = F$

a) Montrer que T est linéaire.

b) Est-elle injective ? surjective ?

4 - On dit que le réel λ est valeur propre de T s'il existe une fonction non nulle f de E vérifiant $T(f) = \lambda f$; f est appelée fonction propre associée à la valeur propre λ.

a) Montrer que 0 est valeur propre de T.

b) Montrer que pour tout réel a, la fonction $x \to e^{ax}$ est une fonction propre associée à une valeur propre $\lambda(a)$ que l'on déterminera.

c) Etudier les variations de cette fonction λ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que tout réel positif est valeur propre de l'application T.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 2

(Q1) Soit $f \in E$. Notons φ_f une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\int_x^{x+1} f(t)dt$ puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[x, x+1]$

Par conséquent F est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \varphi_f(x+1) - \varphi_f(x)$.

φ_f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'_f = f$; par une composition banale, $x \mapsto \varphi_f(x+1)$ est alors dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $x \mapsto \varphi'_f(x+1)$. Par soustraction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \varphi'_f(x+1) - \varphi'_f(x) = f(x+1) - f(x)$, en particulier F est continue sur $\mathbb{R}$.

Finalement 1°.. F est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2°.. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x+1) - f(x)$.

(Q2) a) $f : x \mapsto \sin(2\pi x)$. Notons que f est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_x^{x+1} \sin(2\pi t)dt = -\frac{1}{2\pi}\left[\cos(2\pi t)\right]_x^{x+1} = -\frac{1}{2\pi}\left[\cos(2\pi(x+1)) - \cos(2\pi x)\right]$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = -\frac{1}{2\pi}\left[\cos(2\pi x + 2\pi) - \cos(2\pi x)\right] = 0.$$

Si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(2\pi x)$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt = 0$.

b) $\forall x \in]-\infty, 1[$, $f(x) = 1 - x$ et $\forall x \in [1, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x-1}$. Ainsi :

$\forall x \in]-\infty, 1]$, $f(x) = 1 - x$ et $\forall x \in [1, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Ainsi f est continue sur $]-\infty, 1]$ et sur $[1, +\infty[$ car $x \mapsto 1-x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \sqrt{1-x}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

Donc f est continue en tout point de $]-\infty, 1[$ et de $]1, +\infty[$ et f est continue à droite et à gauche en 1.

Finalement f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

ci f est continue sur $\mathbb{R}$.

Avant de déterminer F observons que

- Si $x \in]-\infty, 0[$, $[x, x+1] \subset]-\infty, 1[$
- Si $x \in [1, +\infty[$, $[x, x+1] \subset [1, +\infty[$
- Si $x \in [0, 1[$, $x < 1 \leq x+1$

Rappelons encore que $x \mapsto -\frac{1}{2}(1-x)^2$ est une primitive de $x \mapsto 1-x$ sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}$ est une primitive de $x \mapsto \sqrt{x-1}$ sur $[1,+\infty[$

Soit $x \in]-\infty, 0[$ (ou $]-\infty,0]$!)

$$F(x)=\int_x^{x+1} f(t)\,dt=\int_x^{x+1}(1-t)\,dt=\left[-\frac{1}{2}(1-t)^2\right]_x^{x+1}=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(1-x)^2.$$

Soit $x \in [1,+\infty[$

$$F(x)=\int_x^{x+1} f(t)\,dt=\int_x^{x+1}\sqrt{t-1}\,dt=\left[\frac{2}{3}(t-1)^{3/2}\right]_x^{x+1}=\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}.$$

Soit $x \in [0,1[$.

$$F(x)=\int_x^{x+1} f(t)\,dt=\int_x^{1} f(t)\,dt+\int_1^{x+1} f(t)\,dt=\left[-\frac{1}{2}(1-t)^2\right]_x^{1}+\left[\frac{2}{3}(t-1)^{3/2}\right]_1^{x+1}$$

$$F(x)=\frac{1}{2}(1-x)^2+\frac{2}{3}x^{3/2}$$

Finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(1-x)^2 \text{ si } x \in]-\infty,0[\text{ ou }]-\infty,0] \\ \frac{1}{2}(1-x)^2+\frac{2}{3}x^{3/2} \text{ si } x \in [0,1[\text{ ou } [0,1] \\ \frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{2}{3}(x-1)^{3/2} \text{ si } x \in [1,+\infty[. \end{cases}$

Q3 a) Soient f et g deux éléments de E et λ un réel.

$\forall x \in \mathbb{R},\ T(\lambda f+g)(x)=\int_x^{x+1}(\lambda f+g)(t)\,dt=\lambda\int_x^{x+1} f(t)\,dt+\int_x^{x+1} g(t)\,dt=\lambda T(f)(x)+T(g)(x)$

$\forall x \in \mathbb{R},\ T(\lambda f+g)(x)=(\lambda T(f)+T(g))(x)$; $T(\lambda f+g)=\lambda T(f)+T(g)$.

Ainsi T est une application linéaire de E dans E (d'après Q1, $\forall f \in E,\ T(f) \in E$).

b) D'après Q2 a) si l'on pose $\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x)=\sin(2\pi x)$:

$f_0 \in E$, $f_0 \neq 0_E$ et $T(f_0)=0_E$. Ainsi $\operatorname{Ker} T \neq \{0_E\}$.

<u>T n'est pas injective.</u>

D'après Q1, si f est un élément de E, $T(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $\operatorname{Im} T$ est contenu dans l'espace vectoriel E_1 des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$h : x \mapsto |x|$ est continue sur IR et pas dérivable en 0. Donc $h \in E$ et $h \notin E_1$. Ainsi $h \in E$ et $h \notin \mathrm{Im}\,T$.

<u>T n'est pas surjective.</u>

Q4 a) T n'est pas injective donc <u>0 est valeur propre de T.</u>

b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a(x) = e^{ax}$. $f_a \in E$ et $f_a \neq 0_E$. <u>Supposons $a \neq 0$.</u>

$\forall x \in \mathbb{R}$, $T(f_a)(x) = \int_x^{x+1} e^{at}\,dt = \left[\frac{1}{a} e^{at}\right]_x^{x+1} = \frac{1}{a}\left[e^{a(x+1)} - e^{ax}\right] = \frac{1}{a}(e^a - 1)e^{ax}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $T(f_a)(x) = \frac{1}{a}(e^a - 1) f_a(x)$; $f_a \neq 0_E$ et $T(f_a) = \frac{e^a - 1}{a} f_a$

Ainsi $f_a : x \mapsto e^{ax}$ est une fonction propre de T associée à la valeur $\frac{e^a - 1}{a}$ si $a \in \mathbb{R}^*$

<u>Supposons $a = 0$.</u>

$\forall x \in \mathbb{R}$, $T(f_a)(x) = \int_x^{x+1} 1\,dt = 1 = 1 \times f_a(x)$; $T(f_0) = 1 \times f_0$ et $f_0 \neq 0_E$

Ainsi $f_0 : x \to 1$ est une fonction propre de T associée à la valeur propre 1.

Finalement <u>$f_a : x \mapsto e^{ax}$ est une fonction propre de T associée à la valeur propre</u>

$$\lambda(a) = \begin{cases} \frac{e^a - 1}{a} & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{cases}.$$

c) λ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. $\lim_{a \to 0} \lambda(a) = \lim_{a \to 0} \frac{e^a - 1}{a} = 1 = \lambda(0)$

$\forall a \in \mathbb{R}^*$, $\lambda'(a) = \frac{1}{a^2}\left[e^a a - (e^a - 1)\right] = \frac{1}{a^2}\left[e^a a - e^a + 1\right]$.

$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2} + o(a^2)$; $e^a - 1 = a + \frac{a^2}{2} + o(a^2)$; $\frac{e^a - 1}{a} = 1 + \frac{a}{2} + o(a)$.

$\lambda(a) = 1 + \frac{a}{2} + o(a)$; $\frac{\lambda(a) - \lambda(0)}{a - 0} = \frac{1}{a}\left[1 + \frac{a}{2} - 1 + o(a)\right] = \frac{1}{2} + o(1)$.

Ainsi $\lim_{a \to 0} \frac{\lambda(a) - \lambda(0)}{a - 0} = \frac{1}{2}$; λ est dérivable en 0 et $\lambda'(0) = \frac{1}{2}$.

Pour étudier le signe de λ' sur $\mathbb{R}^*$ posons $\forall a \in \mathbb{R}$, $u(a) = e^a a - e^a + 1$

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall a \in \mathbb{R}$, $u'(a) = e^a a + e^a - e^a = a e^a$. Notons que $u(0) = 0$.

a	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(a)$		$-$	0	$+$	
$u(a)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Ainsi $\forall a \in \mathbb{R}$, $u(a) \geq 0$; mieux $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $u(a) > 0$

Donc λ' est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ car $\lambda'(0) = \frac{1}{2}$

Par conséquent λ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Notons que $\lim\limits_{a \to +\infty} \lambda(a) = \lim\limits_{a \to +\infty} \left(\frac{e^a}{a} - \frac{1}{a} \right) = +\infty$ et $\lim\limits_{a \to -\infty} \lambda(a) = \lim\limits_{a \to -\infty} \left(\frac{1}{a}(e^a - 1) \right) = 0$

λ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; λ définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\lambda(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$.

Par conséquent d'après b) tout élément de $]0, +\infty[$ est une valeur propre de T

Comme 0 est également une valeur propre de T : tout réel positif est valeur propre de T.

Exercice 2 **Ecricome 1999 ex 2**

Q1. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Montrer que les valeurs propres de M sont 1 et 2 et déterminer les sous-espaces propres associés.

b) M est-elle diagonalisable ?

On se propose de calculer M^n pour tout entier naturel n.

Q2. Soit H et H' deux matrices réelles carrées d'ordre 4 écrites sous forme de blocs :

$H = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C & A \end{pmatrix}$ avec $O = (\,0 \quad 0 \quad 0\,)$, $C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $A = (\,a_{i,j}\,)_{1 \leqslant i \leqslant 3, 1 \leqslant j \leqslant 3}$

$H' = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C' & A' \end{pmatrix}$ avec $O = (\,0 \quad 0 \quad 0\,)$, $C' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$, $A' = (\,a'_{i,j}\,)_{1 \leqslant i \leqslant 3, 1 \leqslant j \leqslant 3}$

Vérifier que le produit HH' s'écrit sous forme de blocs : $HH' = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C'' & AA' \end{pmatrix}$ où $C'' = C + AC'$.

Q3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe une matrice colonne U_n à 3 lignes telle que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & O \\ U_n & V^n \end{pmatrix}$ où V est la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q4. *Calcul de V^n*

On pose $W = V - 2I$, où I est la matrice identité d'ordre 3.

Pour tout entier naturel n, calculer W^n et écrire explicitement la matrice V^n.

Q5. *Calcul de U_n.*

a) Soit X la matrice colonne représentant dans la base canonique l'unique vecteur propre de M associé à la valeur propre 1, dont la première composante vaut 1.

Calculer MX puis M^nX.

b) On pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Déduire du 5 a) les valeurs de a_n, b_n et c_n.

Exercice 2

Q1 Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$MX=X\Leftrightarrow\begin{cases}x=x\\-x+4y+z-2t=y\\2x+y+2z-t=z\\x+2y+z=t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+3y+z-2t=0\\2x+y+z-t=0\\x+2y+z-t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=0 & (L_3-L_2)\\5y+2z-3t=0 & (L_1+L_3)\\x+2y+z-t=0 & L_3\end{cases}$$

$$MX=X\Leftrightarrow\begin{cases}y=x\\5y+2z-3t=0\\3y+z-t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x\\y+t=0 & 2L_3-L_2\\z=t-3y\end{cases}.\quad MX=X\Leftrightarrow\begin{cases}y=x\\t=-y=-x\\z=-x-3x=-4x\end{cases}$$

Ainsi $\{X\in\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})\mid MX=X\}=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-4\\-1\end{pmatrix}\right)$.

1 est valeur propre de M et $SEP(M,1)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-4\\-1\end{pmatrix}\right)$.

$$MX=2X\Leftrightarrow\begin{cases}x=2x\\-x+4y+z-2t=2y\\2x+y+2z-t=2z\\x+2y+z=2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\2y+z-2t=0\\y=t\\2y+z-2t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\t=y\\z=0\\0=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=z=0\\y=t\end{cases}$$

2 est valeur propre de M et $SEP(M,2)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Cherchons l'ensemble des valeurs propres de M. 1 et 2 sont des valeurs propres de M. Prenons donc λ dans $\mathbb{R}-\{1,2\}$ et cherchons une réduite de Gauss de $M-\lambda I$ avec "le pivot".

$$M-\lambda I=\begin{pmatrix}1-\lambda&0&0&0\\-1&4-\lambda&1&-2\\2&1&2-\lambda&-1\\1&2&1&-\lambda\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&4-\lambda&1&-2\\2&1&2-\lambda&-1\\1&2&1&-\lambda\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&4-\lambda&1&-2\\0&1&2-\lambda&-1\\0&2&1&-\lambda\end{pmatrix}$$

$L_1\leftarrow\frac{1}{1-\lambda}L_1\ (\lambda\neq1)$; $L_2\leftarrow L_2+L_1$; $L_3\leftarrow L_3-2L_1$; $L_4\leftarrow L_4-L_1$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&1&-\lambda\\0&1&2-\lambda&-1\\0&4-\lambda&1&-2\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&1&-\lambda\\0&0&3-2\lambda&-2+\lambda\\0&0&\lambda-2&-(\lambda-2)^2\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&1&-\lambda\\0&0&3-2\lambda&\lambda-2\\0&0&1&-(\lambda-2)\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&1&-\lambda\\0&0&1&-(\lambda-2)\\0&0&3-2\lambda&\lambda-2\end{pmatrix}$$

$L_4\leftrightarrow L_2$; $L_3\leftarrow 2L_3-L_2$; $L_4\leftarrow 2L_4-(4-\lambda)L_2$; $L_4\leftarrow\frac{1}{\lambda-2}L_4$; $L_4\leftrightarrow L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 & -(\lambda-2) \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2+(3-2\lambda)(\lambda-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 & -(\lambda-2) \\ 0 & 0 & 0 & -2(\lambda-2)^2 \end{pmatrix}$$

$L_4 \leftarrow L_4 - (3-2\lambda)L_3$

Comme λ n'est pas 2 cette dernière matrice est inversible.

Ainsi si λ est distinct de 1 et 2, $M - \lambda I$ est inversible.

Par conséquent 1 et 2 sont les seules valeurs propres de M.

Comme dim $SEP(M,1)$ + dim $SEP(M,2) = 1+1 = 2 \neq 4$: M n'est pas diagonalisable.

Remarque.. M n'est ni diagonalisable dans $\mathbb{R}$ ni diagonalisable dans $\mathbb{C}$!

Q2 $HH' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c'_1 & a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ c'_2 & a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ c'_3 & a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 + \sum_{k=1}^3 a_{1k}c'_k & \sum_{k=1}^3 a_{1k}a'_{k1} & \sum_{k=1}^3 a_{1k}a'_{k2} & \sum_{k=1}^3 a_{1k}a'_{k3} \\ c_2 + \sum_{k=1}^3 a_{2k}c'_k & \sum_{k=1}^3 a_{2k}a'_{k1} & \sum_{k=1}^3 a_{2k}a'_{k2} & \sum_{k=1}^3 a_{2k}a'_{k3} \\ c_3 + \sum_{k=1}^3 a_{3k}c'_k & \sum_{k=1}^3 a_{3k}a'_{k1} & \sum_{k=1}^3 a_{3k}a'_{k2} & \sum_{k=1}^3 a_{3k}a'_{k3} \end{pmatrix}$

défini je préfère par $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ et $C' = \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \end{pmatrix}$

Or $C'' = C + AC' = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^3 a_{1k}c'_k \\ \sum_{k=1}^3 a_{2k}c'_k \\ \sum_{k=1}^3 a_{3k}c'_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + \sum_{k=1}^3 a_{1k}c'_k \\ c_2 + \sum_{k=1}^3 a_{2k}c'_k \\ c_3 + \sum_{k=1}^3 a_{3k}c'_k \end{pmatrix}$

et $AA' = \left(\sum_{k=1}^3 a_{ik} a'_{kj} \right)$

Ainsi $HH' = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C'' & AA' \end{pmatrix}$ avec $O = (0\ 0\ 0)$ et $C'' = C + AC'$

Q3 Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists U_n \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n & V^n \end{pmatrix}$

C'est clair pour $n=1$ (prendre $U_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$).

Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

$$M^{n+1} = M^n M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n & V^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_1 & V \end{pmatrix} \underset{Q2}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n + V^n U_1 & V^n V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n + V^n U_1 & V^{n+1} \end{pmatrix}$$

Posons $U_{n+1} = U_n + V^n U_1$.

$U_{n+1} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ et $M^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_{n+1} & V^{n+1} \end{pmatrix}$; ceci achève la récurrence.

Remarques 1.. En posant $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a encore $M^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_0 & V^0 \end{pmatrix}$

2.. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique élément U_n de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n & V^n \end{pmatrix}$

Q4 $W = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $W^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$W^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $W^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\forall n \in [\![3, +\infty[\![$, $W^n = 0$.

$V = W + 2I$ et W et $2I$ commutent par conséquent :

$$V^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k W^k (2I)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} C_n^k W^k$$

Supposons $n \geq 2$. $V^n = \sum_{k=0}^{2} 2^{n-k} C_n^k W^k = 2^n I + 2^{n-1} n W + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} W^2$ car $W^k = 0$ pour $k > 2$.

$V^n = 2^n I + n 2^{n-1} W + n(n-1) 2^{n-3} W^2$. Notons que ceci vaut encore pour $n = 0$ et $n = 1$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $V^n = 2^n I + n 2^{n-1} W + n(n-1) 2^{n-3} W^2$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ V^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2n2^{n-1} & n2^{n-1} & -2n2^{n-1} \\ n2^{n-1} & 0 & -n2^{n-1} \\ 2n2^{n-1} & n2^{n-1} & -2n2^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n(n-1)2^{n-3} & 0 & -n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 0 & 0 \\ n(n-1)2^{n-3} & 0 & -n(n-1)2^{n-3} \end{pmatrix}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad V^n = \begin{pmatrix} (n+1)2^n + n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & -n2^n - n(n-1)2^{n-3} \\ n2^{n-1} & 2^n & -n2^{n-1} \\ n2^n + n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & (-n+1)2^n - n(n-1)2^{n-3} \end{pmatrix}$$

Q5 a) $SEP(M,1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-4\\-1\end{pmatrix}\right)$ ainsi $X = \begin{pmatrix}1\\1\\-4\\-1\end{pmatrix}$

$MX = X$ et une récurrence évidente donne $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n X = X$.

b) Posons $T = \begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{pmatrix}1\\T\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-4\\-1\end{pmatrix} = X = M^n X = \begin{pmatrix}1 & 0\\ U_n & V^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\T\end{pmatrix} \uparrow= \begin{pmatrix}1\\ U_n + V^n T\end{pmatrix}$$

matrice à calculer par bloc !

Donc $T = U_n + V^n T$; $U_n = T - V^n T$. Ainsi

$$a_n = 1 - \left[(n+1)2^n + n(n-1)2^{n-3} - 4n2^{n-1} + n2^n + n(n-1)2^{n-3}\right] = 1 - 2^n - n(n-1)2^{n-2}$$

$$b_n = -4 - \left[n2^{n-1} - 4\times 2^n + n2^{n-1}\right] = -4 + 2^{n+2} - n2^n$$

$$c_n = -1 - \left[n2^n + n(n-1)2^{n-3} - 4n2^{n-1} - (-n+1)2^n + n(n-1)2^{n-3}\right] = -1 + 2^n - n(n-1)2^{n-2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^{(*)},\quad \begin{cases} a_n = 1 - 2^n - n(n-1)2^{n-2} \\ b_n = -4 + 2^{n+2} - n2^n \\ c_n = -1 + 2^n - n(n-1)2^{n-2} \end{cases}$$