Exercice 1 **EDHEC 2005 ex 1**

Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par I la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q1 On note tr l'application linéaire qui à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.

a) Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}$.

b) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$.

c) Etablir que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I)$.

Q2 Soit f l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $f(M) = M + \mathrm{tr}(M)I$

a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Utiliser la première question pour déterminer les valeurs propres de f.

En déduire que f est un automorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q3 Soit g l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $g(M) = M + \mathrm{tr}(M)J$, où J désigne une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle. On admet que g est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Etablir que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de g.

b) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g.

c) g est-il diagonalisable ?

---

1) a) $\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ est de dimension 1. Alors $\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}$ est de dimension 0 ou 1.

Or $\mathrm{tr}(I) = n \neq 0_{\mathbb{R}}$ donc $\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}$ n'est pas égal à $\{0_{\mathbb{R}}\}$ et ainsi sa dimension n'est pas 0.

Par conséquent $\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}$ est de dimension 1. Ainsi $\mathrm{Im}\,\mathrm{tr} \subset \mathbb{R}$ et $\dim \mathrm{Im}\,\mathrm{tr} = 1 = \dim \mathbb{R}$. Il en résulte que :

$$\boxed{\mathrm{Im}\,\mathrm{tr} = \mathbb{R}.}$$

b) Le théorème du rang donne alors $\dim \mathrm{Ker}\,\mathrm{tr} = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \mathrm{Im}\,\mathrm{tr} = n^2 - 1$.

$$\boxed{\dim \mathrm{Ker}\,\mathrm{tr} = n^2 - 1.}$$

c) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant de dimension finie, pour montrer que les deux sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}\,\mathrm{tr}$ et $\mathrm{Vect}(I)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}\,\mathrm{tr} \cap \mathrm{Vect}(I) = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$ et que $\dim \mathrm{Ker}\,\mathrm{tr} + \dim \mathrm{Vect}(I) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le second point est clair car $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$, $\dim \mathrm{Ker}\,\mathrm{tr} = n^2 - 1$ et $\dim \mathrm{Vect}(I) = 1$ (puisque I n'est pas la matrice nulle). Montrons le premier point.

Soit M un élément commun à $\mathrm{Ker}\,\mathrm{tr}$ et à $\mathrm{Vect}(I)$. $\mathrm{tr}(M) = 0$ et il existe un réel α tel que $M = \alpha\, I$.

Alors $0 = \mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(\alpha\, I) = \alpha\ \mathrm{tr}(I) = \alpha\, n$. Comme n n'est pas nul, α l'est nécessairement.

Ainsi $M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Ceci achève de montrer que $\mathrm{Ker}\,\mathrm{tr} \cap \mathrm{Vect}(I) = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$.

Cela achève également de montrer que $\mathrm{Ker}\,\mathrm{tr}$ et $\mathrm{Vect}(I)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{tr} \oplus \mathrm{Vect}(I).}$$

2) a) • Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\mathrm{tr}(M)$ est un réel et I est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi $f(M) = M + \mathrm{tr}(M)\, I$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme combinaison linéaire de deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

f est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Soient M et N deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ un réel. Rappelons que tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$f(\lambda\, M + N) = \lambda\, M + N + \big(\mathrm{tr}(\lambda\, M + N)\big)\, I = \lambda\, M + N + \big(\lambda\, \mathrm{tr}(M) + \mathrm{tr}(N)\big)\, I = \lambda\, \big(M + \mathrm{tr}(M)\, I\big) + \big(N + \mathrm{tr}(N)\, I\big)$.

Ainsi $f(\lambda\, M + N) = \lambda\, f(M) + f(N)$.

f est donc une application linéaire. Finalement :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

b) *Version 1* • $\forall M \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{tr},\ f(M) = M + \mathrm{tr}(M)\, I = M$.

• Soit M un élément de $\mathrm{Vect}(I)$. Il existe un réel α tel que $M = \alpha\, I$.

$f(M) = \alpha\, f(I) = \alpha\big(I + \mathrm{tr}(I)\, I\big) = \alpha\,(1+n)\, I = (n+1)(\alpha\ I) = (n+1)\, M$.

Ainsi $\forall M \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{tr},\ f(M) = M$ et $\forall M \in \mathrm{Vect}(I),\ f(M) = (n+1)\, M$.

$\mathcal{B}_2 = (I)$ est base de $\mathrm{Vect}(I)$. Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $\mathrm{Ker}\,\mathrm{tr}$.

$\mathrm{Ker}\,\mathrm{tr}$ et $\mathrm{Vect}(I)$ étant supplémentaires, en concaténant $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ on obtient une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans laquelle f a pour matrice la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n+1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$ oui de $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$!

Ainsi f est diagonalisable et ses valeurs propres sont 1 et $n+1$.

De plus 0 n'est pas valeur propre de f donc f est un endomorphisme injectif de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi f est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Finalement f est un automorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont 1 et $n+1$.

Version 2 Cherchons les valeurs propres de f.

Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit λ un réel.

Il existe un unique élément (M_1, α) de $\mathrm{Ker}\,\mathrm{tr} \times \mathbb{R}$ tel que $M = M_1 + \alpha\, I$.

$f(M) = f(M_1 + \alpha\, I) = f(M_1) + \alpha\, f(I) = M_1 + \mathrm{tr}(M_1)\, I + \alpha\big(I + \mathrm{tr}(I)\, I\big) = M_1 + \alpha\,(1+n)\, I = M_1 + \alpha\,(n+1)\, I$.

$f(M) = \lambda\, M \iff M_1 + \alpha\,(n+1)\, I = \lambda\, M_1 + \lambda\,\alpha\, I$.

Or M_1 et $\lambda\, M_1$ sont deux éléments de $\mathrm{Ker}\,\mathrm{tr}$, $\alpha(n+1)\, I$ et $\lambda\,\alpha\, I$ sont deux éléments de $\mathrm{Vect}(I)$, et $\mathrm{Ker}\,\mathrm{tr}$ et $\mathrm{Vect}(I)$ sont en somme directe. Alors :

$$f(M) = \lambda\, M \iff \begin{cases} M_1 = \lambda\, M_1 \\ \alpha\,(n+1)\, I = \lambda\,\alpha\, I \end{cases} \iff \begin{cases} (1-\lambda)\, M_1 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \\ \alpha\,((n+1)-\lambda)\, I = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \end{cases}.$$

$$f(M) = \lambda\, M \iff \begin{cases} (1-\lambda)\, M_1 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \\ \alpha\,((n+1)-\lambda) = 0 \end{cases}$$

• <u>Premier cas</u> Supposons $\lambda = 1$. $f(M) = \lambda\, M \iff \alpha\, n = 0 \iff \alpha = 0 \iff M \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{tr}$.

Comme $\mathrm{Ker}\,\mathrm{tr}$ n'est pas réduit au vecteur nul, 1 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est $\mathrm{Ker}\,\mathrm{tr}$.

• <u>Deuxième cas</u> Supposons $\lambda \neq 1$.

$$f(M) = \lambda\, M \iff \begin{cases} M_1 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \\ \alpha\,((n+1) - \lambda) = 0 \end{cases} .$$

Si $\lambda \neq n+1$, $f(M) = \lambda\, M \iff M_1 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $\alpha = 0 \iff M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et λ n'est pas valeur propre de f.

Si $\lambda = n+1$, $f(M) = \lambda\, M \iff M_1 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \iff M \in \mathrm{Vect}(I)$; alors $\lambda = n+1$ est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est $\mathrm{Vect}(I)$.

Finalement f admet deux valeurs propres 1 et $n+1$, et les deux sous-espace propres respectivement associés sont $\mathrm{Ker}\,\mathrm{tr}$ et $\mathrm{Vect}(I)$. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{tr} \oplus \mathrm{Vect}(I)$, f est diagonalisable.

De plus 0 n'est pas valeur propre de f donc f est un endomorphisme injectif de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi f est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\boxed{f \text{ est un automorphisme diagonalisable de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et ses valeurs propres sont 1 et } n+1.}$

3) a) Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$g\big(g(M)\big) = g(M) + \mathrm{tr}\,\big(g(M)\big)\, J = M + \mathrm{tr}(M)\, J + \mathrm{tr}\,\big(M + \mathrm{tr}(M)\, J\big)\, J = M + \mathrm{tr}(M)\, J + \big(\mathrm{tr}(M) + \mathrm{tr}(M)\ \mathrm{tr}(J)\big)\, J.$

$g\big(g(M)\big) = M + 2\ \mathrm{tr}(M)\, J$ car $\mathrm{tr}(J) = 0$. Alors $g\big(g(M)\big) = 2\, M + 2\ \mathrm{tr}(M)\, J - M = 2\, g(M) - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}(M)$.

$g\big(g(M)\big) - 2\, g(M) + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ donc $\big(g \circ g - 2\, g + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\big)(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Ainsi $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\big(g \circ g - 2\, g + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\big)(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$; $g \circ g - 2\, g + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$.

$\boxed{X^2 - 2\, X + 1 \text{ est un polynôme annulateur de } g.}$

b) $X^2 - 2\, X + 1$ est un polynôme annulateur de g dont l'unique racine est 1. Ainsi la seule valeur propre possible de g est 1.

Or $J \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $g(J) = J + \mathrm{tr}(J)\, J = J$ donc 1 est bien une valeur propre de g.

$\boxed{1 \text{ est la seule valeur propre de } g.}$

c) Supposons que g soit diagonalisable. Comme 1 est la seule valeur propre de g, le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ de g associé à la valeur propre 1 est $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Alors $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $g(M) = M$. En particulier $g(I) = I$ donc $I + \mathrm{tr}\, I\, J = I$. par conséquent $\mathrm{tr}\, I\, J = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Comme $\mathrm{tr}\, I$ n'est pas nulle, J est nulle ce qui contredit l'hypothèse. Finalement :

$\boxed{g \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

Remarque *On pouvait également observer que le sous-espace propre de g associé à la valeur propre 1 est $\mathrm{Ker}\,\mathrm{tr}$ qui n'est pas égal à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 2 **EDHEC 2006 ex 1**

Dans cet exercice, m désigne un entier naturel non nul. On note id (respectivement θ) l'endomorphisme identité (respectivement l'endomorphisme nul) du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^m$ et on considère un endomorphisme f de $\mathbb{C}^m$ vérifiant : $(f-\lambda_1\, id)\circ(f-\lambda_2\, id)=\theta$, où λ_1 et λ_2 sont deux complexes distincts.

Q1. a) Vérifier que $\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\big((f-\lambda_1\, id)-(f-\lambda_2\, id)\big)=id.$

b) En déduire que : $\mathbb{C}^m=\operatorname{Ker}(f-\lambda_1\, id)\oplus\operatorname{Ker}(f-\lambda_2\, id)$.

c) Conclure que f est diagonalisable et donner ses valeurs propres (on sera amené à étudier trois cas).

Dans la suite de l'exercice, on désigne par n un entier naturel et l'on se propose de montrer qu'il n'existe pas de matrice de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A^2=-I$, où I désigne la matrice diagonale de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux valent 1.

Q2. Trouver une matrice A de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$ telle que $A^2=-I$.

Q3 Dans cette question, on suppose qu'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A^2=-I$.

a) Utiliser la première question pour montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$ et que ses valeurs propres sont i et $-i$.

b) Pour toute matrice $M=(m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$ de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, on note $\overline{M}$ la matrice $(\overline{m_{i,j}})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$.

On note E_i et E_{-i} les sous-espaces propres de A associés aux valeurs propres i et $-i$.

Montrer que $X\in E_i\iff\overline{X}\in E_{-i}$.

c) En déduire que, si $(u_1,u_2,\dots,u_p)$ est une base de E_i, alors $(\overline{u_1},\overline{u_2},\dots,\overline{u_p})$ est une famille libre de E_{-i}.

Conclure que $\dim E_i=\dim E_{-i}$.

d) Établir enfin le résultat demandé.

---

1 a) $\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big((f-\lambda_1\, id)-(f-\lambda_2\, id)\Big)=\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big(f-\lambda_1\, id-f+\lambda_2\, id\Big)=\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big((\lambda_2-\lambda_1)\, id\Big)=id.$

$$\boxed{\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big((f-\lambda_1\, id)-(f-\lambda_2\, id)\Big)=id.}$$

b) Montrons que $\mathbb{C}^m$ est somme directe de $\operatorname{Ker}(f-\lambda_1\, id)$ et de $\operatorname{Ker}(f-\lambda_2\, id)$.

• Soit x un élément de $\operatorname{Ker}(f-\lambda_1\, id)\cap\operatorname{Ker}(f-\lambda_2\, id)$. $f(x)=\lambda_1\, x$ et $f(x)=\lambda_2\, x$.

Alors $(\lambda_2-\lambda_1)\, x=\lambda_2\, x-\lambda_1\, x=f(x)-f(x)=0_{\mathbb{C}^m}$. Comme λ_1 et λ_2 sont distincts, $\lambda_2-\lambda_1$ n'est pas nul et ainsi x est nul. Ceci achève de montrer que $\operatorname{Ker}(f-\lambda_1\, id)\cap\operatorname{Ker}(f-\lambda_2\, id)=\{0_{\mathbb{C}^m}\}$.

Ainsi $\operatorname{Ker}(f-\lambda_1\, id)$ et $\operatorname{Ker}(f-\lambda_2\, id)$ sont en somme directe.

• $\operatorname{Ker}(f-\lambda_1\, id)$ et $\operatorname{Ker}(f-\lambda_2\, id)$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^m$ donc $\operatorname{Ker}(f-\lambda_1\, id)+\operatorname{Ker}(f-\lambda_2\, id)$ est contenu dans $\mathbb{C}^m$. Montrons l'inclusion inverse.

Soit x un élément de $\mathbb{C}^m$. $x=id(x)=\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big((f-\lambda_1\, id)-(f-\lambda_2\, id)\Big)(x)$.

Ainsi $x=\dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(f-\lambda_2\, id)(x)+\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(f-\lambda_1\, id)(x)$.

Posons $x_1=\dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\,(f-\lambda_2\, id)\,(x)$ et $x_2=\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\,(f-\lambda_1\, id)\,(x)$. On a $x=x_1+x_2$.

Montrons alors que $x_1 \in \text{Ker}(f - \lambda_1\, id)$ et $x_2 \in \text{Ker}(f - \lambda_2\, id)$.

$(f - \lambda_1\, id)(x_1) = (f - \lambda_1\, id)\left(\dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\,(f - \lambda_2\, id)\,(x)\right) = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\Big((f - \lambda_1\, id) \circ (f - \lambda_2\, id)\Big)(x)$.

Donc $(f - \lambda_1\, id)(x_1) = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\,\theta(x) = 0_{\mathbb{C}^m}$ et ainsi $x_1 \in \text{Ker}(f - \lambda_1\, id)$.

Observons que $\theta = (f-\lambda_1\, id)\circ(f-\lambda_2\, id) = f^2-\lambda_2\, f-\lambda_1\, f+\lambda_1\, \lambda_2\, id = f^2-\lambda_1\, f-\lambda_2\, f+\lambda_2\, \lambda_1\, id = (f-\lambda_2\, id)\circ(f-\lambda_1\, id)$.
Par conséquent : $(f - \lambda_2\, id) \circ (f - \lambda_1\, id) = \theta$. Alors :

$(f - \lambda_2\, id)(x_2) = (f - \lambda_2\, id)\left(\dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\,(f - \lambda_1\, id)\,(x)\right) = \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\Big((f - \lambda_2\, id) \circ (f - \lambda_1\, id)\Big)(x)$.

Donc $(f - \lambda_2\, id)(x_2) = \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\,\theta(x) = 0_{\mathbb{C}^m}$ et alors $x_2 \in \text{Ker}(f - \lambda_2\, id)$.

Ainsi $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \text{Ker}(f - \lambda_1\, id)$ et $x_2 \in \text{Ker}(f - \lambda_2\, id)$. Donc $x \in \text{Ker}(f - \lambda_1\, id) + \text{Ker}(f - \lambda_2\, id)$.

Ceci achève de montrer que $\mathbb{C}^m \subset \text{Ker}(f - \lambda_1\, id) + \text{Ker}(f - \lambda_2\, id)$.

Par conséquent $\mathbb{C}^m = \text{Ker}(f - \lambda_1\, id) + \text{Ker}(f - \lambda_2\, id)$. Comme $\text{Ker}(f - \lambda_1\, id)$ et $\text{Ker}(f - \lambda_2\, id)$ sont en somme directe :

$$\boxed{\mathbb{C}^m = \text{Ker}(f - \lambda_1\, id) \oplus \text{Ker}(f - \lambda_2\, id).}$$

c) $(f - \lambda_1\, id) \circ (f - \lambda_2\, id) = \theta$ donc $(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ est un polynôme annulateur de f dont les racines dans $\mathbb{C}$ sont λ_1 et λ_2. Ainsi λ_1 et λ_2 sont les seules valeurs propres possibles de f. Autrement dit : $\text{Sp}\, f \subset \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

Rappelons que λ_1 (resp. λ_2) est valeur propre de f si et seulement si $\text{Ker}(f - \lambda_1\, id)$ (resp. $\text{Ker}(f - \lambda_2\, id)$) n'est pas réduit au vecteur nul. Envisageons alors trois cas.

Cas 1 : f est distinct de $\lambda_1\, id$ et $\lambda_2\, id$.

Si $\text{Ker}(f - \lambda_1\, id)$ est réduit au vecteur nul alors $\text{Ker}(f - \lambda_2\, id) = \mathbb{C}^m$ car $\mathbb{C}^m = \text{Ker}(f - \lambda_1\, id) \oplus \text{Ker}(f - \lambda_2\, id)$.

Ainsi $f - \lambda_2\, id = \theta$ donc $f = \lambda_2\, id$ ce qui n'est pas.

Si $\text{Ker}(f - \lambda_2\, id)$ est réduit au vecteur nul alors $\text{Ker}(f - \lambda_1\, id) = \mathbb{C}^m$ car $\mathbb{C}^m = \text{Ker}(f - \lambda_1\, id) \oplus \text{Ker}(f - \lambda_2\, id)$.

Ainsi $f - \lambda_1\, id = \theta$ donc $f = \lambda_1\, id$ ce qui n'est pas.

Donc $\text{Ker}(f - \lambda_1\, id)$ et $\text{Ker}(f - \lambda_2\, id)$ ne sont pas réduits au vecteur nul. Alors λ_1 et λ_2 sont valeurs propres de f. Mieux λ_1 et λ_2 sont les (seules) valeurs propres de f.

Or $\mathbb{C}^m = \text{Ker}(f - \lambda_1\, id) \oplus \text{Ker}(f - \lambda_2\, id)$, donc f est diagonalisable.

Cas 2 : f coïncide avec $\lambda_1\, id$. Alors f est diagonalisable et λ_1 est sa seule valeur propre.

Cas 3 : f coïncide avec $\lambda_2\, id$. Alors f est diagonalisable et λ_2 est sa seule valeur propre.

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est distinct de } \lambda_1\, id \text{ et de } \lambda_2\, id \text{ alors } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ sont les (seules) valeurs propres de } f.}$$

$$\boxed{\text{Si } f = \lambda_1\, id \text{ (resp. } f = \lambda_2\, id) \text{ alors } \lambda_1 \text{ (resp. } \lambda_2) \text{ est la seule valeur propre de } f.}$$

2) $(i\, I)^2 = i^2\, I = -I$! !

$$\boxed{A = i\, I \text{ est une matrice de } \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C}) \text{ telle que } A^2 = -I.}$$

3 a) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{2n+1}$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^{2n+1}$ est A.

Posons $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$.

$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = (A - i\,I)(A + i\,I) = A^2 - (i\,I)^2 = A^2 - i^2 I = A^2 + I = 0_{\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})}$ (car A et $i\,I$ commutent...).

Ainsi $(f - \lambda_1\, id) \circ (f - \lambda_2\, id) = \theta$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Q1, appliquée pour $m = 2n+1$, montre alors que f est diagonalisable.

A est alors diagonalisable en tant que matrice de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$.

A est une matrice à coefficients réels donc A ne vaut ni $i\,I$ ni $-i\,I$. Donc f n'est ni $\lambda_1\, id$ ni $\lambda_2\, id$. Ainsi λ_1 et λ_2 sont les (seules) valeurs propres de f. Alors i et $-i$ sont LES valeurs propres de A.

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C}) \text{ et } i \text{ et } -i \text{ sont ses valeurs propres.}}$$

b) Soit X un élément de $\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C})$. $X \in E_i \iff AX = i\,X \iff \overline{AX} = \overline{iX} \iff \overline{A}\,\overline{X} = -i\,\overline{X}$.

Or A appartient à $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ donc $\overline{A} = A$. Ainsi $X \in E_i \iff A\,\overline{X} = -i\,\overline{X} \iff \overline{X} \in E_{-i}$.

$$\boxed{\text{Si } X \text{ est un élément de } \mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C}) : X \in E_i \iff \overline{X} \in E_{-i}.}$$

c) Soit $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une base de E_i.

u_1, u_2, ..., u_p sont des éléments de E_i donc d'après ce qui précède, $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_p})$ est une famille d'éléments de E_{-i}. Montrons que cette famille est libre.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ un élément de $\mathbb{C}^p$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k\, \overline{u_k} = 0_{\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C})}$.

Alors $0_{\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C})} = \overline{0_{\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C})}} = \overline{\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k\, \overline{u_k}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \overline{\alpha_k\, \overline{u_k}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \overline{\alpha_k}\, u_k$. Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \overline{\alpha_k}\, u_k = 0_{\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C})}$.

Comme la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est libre : $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\overline{\alpha_k} = 0$.

En conjuguant on obtient : $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\alpha_k = 0$. Ceci achève de montrer que $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_p})$ est une famille libre d'éléments de E_{-i}.

$$\boxed{\text{Si } (u_1, u_2, \dots, u_p) \text{ est une base de } E_i \text{ alors } (\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_p}) \text{ est une famille libre d'éléments de } E_{-i}.}$$

Soit p la dimension de E_i et soit $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une base de E_i.

$(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_p})$ est une famille libre d'éléments de E_{-i} donc $\dim E_{-i} \geqslant p = \dim E_i$.

Bien évidemment on peut montrer de la même manière que $\dim E_i \geqslant \dim E_{-i}$ et ainsi obtenir l'égalité entre $\dim E_i$ et $\dim E_{-i}$.

Reprenons plutôt une base $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ de E_i et montrons que $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_p})$ est une base de E_{-i}.

Il ne reste plus qu'à montrer que $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_p})$ est une famille génératrice de E_{-i}.

Soit u un élément de E_{-i}. $\overline{u}$ appartient E_i car $\overline{\overline{u}} = u$ appartient à E_{-i} !

Donc il existe un élément $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ de $\mathbb{C}^p$ tel que $\overline{u} = \sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k\, u_k$.

En conjuguant on obtient $u = \overline{\overline{u}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \overline{\alpha_k}\, \overline{u_k}$.

Ainsi tout élément de E_{-i} est combinaison linéaire de la famille $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_p})$.

Ceci achève de montrer que cette famille est une famille génératrice de E_{-i}.

Étant libre c'est une base de E_{-i}. Alors $\dim E_{-i} = p = \dim E_i$.

$$\boxed{\dim E_i = \dim E_{-i}.}$$

d) A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$ et i et $-i$ sont ses valeurs propres.

Ainsi $\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C}) = E_i \oplus E_{-i}$. Alors $2n+1 = \dim \mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C}) = \dim E_i + \dim E_{-i} = 2 \dim E_i$.

$2n+1$ n'étant pas un multiple de deux un léger doute nous envahit...

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de matrice de } \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R}) \text{ dont le carré est } -I.}$$

Exercice 3 **EDHEC 2007 ex 2**

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par (I, J, K, L) et Id l'endomorphisme identité de E. On pose $A = J + K$.

1) Montrer que (I, J, K, L) est une base de E et donner la dimension de E.

2) a) Exprimer JK, KL et LJ en fonction respectivement de L, J et K.

b) Calculer J^2, K^2 et L^2 puis en déduire que : $KJ = -L$, $LK = -J$ et $JL = -K$.

c) En déduire que E est stable pour le produit matriciel.

3) Calculer A^2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.

4) On considère maintenant l'application φ_A qui à toute matrice M de E associe : $\varphi_A(M) = AMA^{-1}$.

a) Montrer que φ_A est un endomorphisme de E.

b) Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi_A$ puis montrer que φ_A est un automorphisme de E.

5) a) Écrire la matrice Φ_A de φ_A dans la base (I, J, K, L), puis justifier que φ_A est diagonalisable.

b) Donner les valeurs propres de φ_A ainsi que les sous-espaces propres associés.

Le reste concerne le chapitre algèbre bilinéaire.

On rappelle que l'application, notée tr, qui à toute matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ associe sa trace (c'est à dire la somme de ses éléments diagonaux) est une application linéaire de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

On rappelle également que l'application qui à tout couple (M, N) de $E \times E$ associe le réel noté $(M|N)$ défini par $(M|N) = \operatorname{tr}({}^tMN)$ est un produit scalaire sur E.

6) a) Montrer que, pour tout couple (P, Q) de $E \times E$, $\operatorname{tr}(PQ) = \operatorname{tr}(QP)$.

b) Établir alors que φ_A est un endomorphisme symétrique de E.

c) En déduire que $\operatorname{Ker}(\varphi_A - Id)$ et $\operatorname{Ker}(\varphi_A + Id)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

Remarque *Observons qu'en posant* $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *on a :*

$$I = \begin{pmatrix} I_2 & O_2 \\ O_2 & I_2 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} -S & O_2 \\ O_2 & S \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} O_2 & -I_2 \\ I_2 & O_2 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} O_2 & S \\ S & O_2 \end{pmatrix}.$$

Notons également que $S^2 = -I_2$. *Les spécialistes des produits par blocs pourront alors gagner un peu de temps...*

1) Par définition (I, J, K, L) est une famille génératrice de E. Montrons que cette famille est libre.

Soient a, b, c et d quatre réels tels que : $a\,I + b\,J + c\,K + d\,L = 0_E$. Montrons que ces quatre réels sont nuls.

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_E.$$

Ainsi : $\begin{pmatrix} a & -b & -c & d \\ b & a & -d & -c \\ c & d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix} = 0_E$. Alors $a = b = c = d = 0$.

Ceci achève de montrer que (I, J, K, L) est une famille libre de E. Rappelons qu'elle engendre E.

Alors (I, J, K, L) est une base de E. Cette famille étant de cardinal quatre, E est de dimension 4.

$$\boxed{(I, J, K, L) \text{ est une base de } E \text{ et } E \text{ est de dimension 4.}}$$

2) a) $JK = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L.$

$KL = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = J.$

$LJ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K.$

$$\boxed{JK = L,\ KL = J \text{ et } LJ = K.}$$

b) $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$

$K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$

$L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$

$$\boxed{J^2 = -I,\ K^2 = -I \text{ et } L^2 = -I.}$$

$J = KL$ donc $KJ = K^2 L = -IL = -L$.

De même : $K = LJ$ donc $LK = L^2 J = -IJ = -J$; $L = JK$ donc $JL = J^2 K = -IK = -K$.

$$\boxed{KJ = -L,\ LK = -J \text{ et } JL = -K.}$$

c) Soient P et P' deux éléments de E. Montrons que PP' est un élément de E.

Soient (a, b, c, d) (resp. (a', b', c', d')) les coordonnées de P (resp. P') dans la base (I, J, K, L) de E.

Ainsi $P = a\,I + b\,J + c\,K + d\,L$ et $P' = a'\,I + b'\,J + c'\,K + d'\,L$.

Donc $PP' = (a\,I + b\,J + c\,K + d\,L)\,(a'\,I + b'\,J + c'\,K + d'\,L)$.

En utilisant les propriétés usuelles des opérations de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ on obtient :

$PP' = aa'\,I + ba'\,J + ca'\,K + da'\,L + ab'\,J + bb'\,J^2 + cb'\,KJ + db'\,LJ + ac'\,K + bc'\,JK + cc'\,K^2 + dc'\,LK + ad'\,L + bd'\,JL + cd'\,KL + dd'\,L^2$. a) et b) donnent alors :

$PP' = aa'\,I + ba'\,J + ca'\,K + da'\,L + ab'\,J - bb'\,I - cb'\,L + db'\,K + ac'\,K + bc'\,L - cc'\,I - dc'\,J + ad'\,L - bd'\,K + cd'\,J - dd'\,I.$

Donc $PP' = (aa' - bb' - cc' - dd')\,I + (ba' + ab' - dc' + cd')\,J + (ca' + db' + ac' - bd')\,K + (da' - cb' + bc' + ad')\,L$.
PP' est combinaison linéaire des éléments de la famille (I, J, K, L), c'est donc bien un élément de E. Ainsi

$$\boxed{E \text{ est stable pour le produit matriciel.}}$$

3) $A^2 = (J + K)^2 = (J + K)(J + K) = J^2 + KJ + JK + K^2 = -I - L + L - I = -2\,I$.

$$\boxed{A^2 = -2\,I.}$$

Alors $A\left(-\dfrac{1}{2}\,A\right) = I$ et $\left(-\dfrac{1}{2}\,A\right)A = I$. A est donc inversible et d'inverse $-\dfrac{1}{2}\,A$.

$$\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = -\frac{1}{2}\,A.}$$

4) a) • Soit M un élément de E. $\varphi_A(M) = AMA^{-1} = AM\left(-\dfrac{1}{2}\,A\right) = -\dfrac{1}{2}\,AMA$.

M et A sont deux éléments de E et E est stable par le produit matriciel donc AMA est encore un élément de E.

E étant un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $-\dfrac{1}{2}\,AMA$ appartient également à E. Ainsi $\varphi_A(M)$ est un élément de E.

φ_A est une application de E dans E.

• Soit λ un réel. Soient M et N deux éléments de E.

$\varphi_A(\lambda\,M + N) = A(\lambda\,M + N)A^{-1} = (\lambda AM + AN)A^{-1} = \lambda\,AMA^{-1} + ANA^{-1} = \lambda\,\varphi_A(M) + \varphi_A(N)$.

φ_A est donc une application linéaire. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{\varphi_A \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

b) Soit M un élément de $\operatorname{Ker}\varphi_A$. $AMA^{-1} = 0_E$. Alors $M = A^{-1}AMA^{-1}A = A^{-1}\,0_E\,A = 0_E$.

Ce qui suffit pour dire que :

$$\boxed{\operatorname{Ker}\varphi_A = \{0_E\}.}$$

Alors φ_A est un endomorphisme injectif de E qui est de dimension finie donc :

$$\boxed{\varphi_A \text{ est un automorphisme de } E.}$$

Exercice *Montrer que :* $\varphi_A^{-1} = \varphi_{A^{-1}} = \varphi_{\left(-\frac{1}{2}\,A\right)} = \varphi_A$.

En déduire que φ_A *est une symétrie vectorielle.*

5) a) Nous avons vu dans 2) c) que si $P = a\,I + b\,J + c\,K + d\,L$ et $P' = a'\,I + b'\,J + c'\,K + d'\,L$ sont deux éléments de E :

$$PP' = (aa' - bb' - cc' - dd')\,I + (ba' + ab' - dc' + cd')\,J + (ca' + db' + ac' - bd')\,K + (da' - cb' + bc' + ad')\,L.$$

Notons que $A = 0\,I + J + K + 0\,L$.

Soit M un élément de E de coordonnées (x, y, z, t) dans la base (I, J, K, L). $M = x\,I + y\,J + z\,K + t\,L$.

Alors $AM = (-y - z)\,I + (x + t)\,J + (x - t)\,K + (-y + z)\,L$.

Donc $AMA = \Big((-y - z)\,I + (x + t)\,J + (x - t)\,K + (-y + z)\,L\Big)A$.

En réutilisant la formule de 2) c) il vient :

$AMA = \big(-(x+t)-(x-t)\big)\,I + \big((-y-z)-(-y+z)\big)\,J + \big((-y+z)+(-y-z)\big)\,K + \big(-(x-t)+(x+t)\big)\,L.$

Ainsi : $AMA = (-2x)\,I + (-2z)\,J + (-2y)\,K + 2t\,L$. Alors $\varphi_A(M) = -\dfrac{1}{2}AMA = x\,I + z\,J + y\,K - t\,L$.

Finalement $M = x\,I + y\,J + z\,K + t\,L$ donne $\varphi_A(M) = x\,I + z\,J + y\,K - t\,L$.

Alors $\varphi_A(I) = I$, $\varphi_A(J) = K$, $\varphi_A(K) = J$ et $\varphi_A(L) = -L$. Ceci permet de dire que :

$$\boxed{\text{la matrice } \Phi_A \text{ de } \varphi_A \text{ dans la base } (I,J,K,L) \text{ est : } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

Φ_A est une matrice symétrique à coefficients réels donc Φ_A est diagonalisable. Alors :

$$\boxed{\varphi_A \text{ est diagonalisable.}}$$

b) $\varphi_A(I) = I$ et $I \neq 0_E$ donc 1 est une valeur propre de φ_A et I en est un vecteur propre associé à cette valeur propre.

$\varphi_A(L) = -L$ et $L \neq 0_E$ donc -1 est une valeur propre de φ_A et L en est un vecteur propre associé à cette valeur propre.

Notons encore que $\varphi_A(J+K) = K+J = J+K$ et $\varphi_A(J-K) = K-J = -(J-K)$.

$J+K$ (resp. $J-K$) est alors un élément du sous-espace propre SEP $(\varphi_A, 1)$ (resp. SEP $(\varphi_A, -1)$) de φ_A associé à la valeur propre 1 (resp. -1).

Montrons alors que $(I, J+K)$ (resp. $(L, J-K)$) est une famille libre de SEP $(\varphi_A, 1)$ (resp. SEP $(\varphi_A, -1)$).

Soient α et β deux réels tels que $\alpha I + \beta(J+K) = 0_E$. $\alpha I + \beta J + \beta K = 0_E$.

Or (I, J, K) est une famille libre de E comme sous-famille de la base (I, J, K, L). Donc $\alpha = \beta = 0$.

Ceci achève de montrer que la famille $(I, J+K)$ est libre.

Soient α' et β' deux réels tels que $\alpha' L + \beta'(J-K) = 0_E$. $\beta' J - \beta' K + \alpha' L = 0_E$.

Or (J, K, L) est une famille libre de E comme sous-famille de la base (I, J, K, L). Donc $\alpha' = \beta' = 0$.

Ceci achève de montrer que la famille $(L, J-K)$ est libre.

Ainsi $(I, J+K)$ est une famille libre du sous-espace propre SEP $(\varphi_A, 1)$ de φ_A associé à la valeur propre 1 et $(L, J-K)$ est une famille libre du sous-espace propre SEP $(\varphi_A, -1)$ de φ_A associé à la valeur propre -1.

Donc $\dim \text{SEP } (\varphi_A, 1) \geqslant 2$ et $\dim \text{SEP } (\varphi_A, -1) \geqslant 2$. Or $\dim \text{SEP } (\varphi_A, 1) + \dim \text{SEP } (\varphi_A, -1) \leqslant \dim E = 4$ car la somme des dimensions des sous-espaces propres de φ_A est inférieure ou égale à la dimension de E.

Nécessairement $\dim \text{SEP } (\varphi_A, 1) = \dim \text{SEP } (\varphi_A, -1) = 2$.

$(I, J+K)$ est alors une famille libre de cardinal 2 de SEP $(\varphi_A, 1)$ qui est de dimension 2 ; ainsi $(I, J+K)$ est une base de SEP $(\varphi_A, 1)$.

$(L, J-K)$ est alors une famille libre de cardinal 2 de SEP $(\varphi_A, -1)$ qui est de dimension 2 ; ainsi $(L, J-K)$ est une base de SEP $(\varphi_A, -1)$.

Notons que dans ces conditions φ_A ne peut pas avoir d'autres valeurs propres.

φ_A admet exactement deux valeurs propres 1 et -1.
$(I, J+K)$ est une base du sous-espace propre de φ_A associé à la valeur propre 1.
$(L, J-K)$ est une base du sous-espace propre de φ_A associé à la valeur propre -1.

Remarque 1 $\mathrm{Ker}(\varphi_A - id) = \mathrm{SEP}\ (\varphi_A, 1)$ *et* $\mathrm{Ker}(\varphi_A + id) = \mathrm{SEP}\ (\varphi_A, -1)$ *sont supplémentaires dans* E.

Remarque 2 *Pour rechercher les valeurs propres de* φ_A *on aurait pu utiliser le fait que* φ_A *est une symétrie vectorielle...*

6) a) Soient $P = (p_{i,j})$ et $Q = (q_{i,j})$ deux éléments de E. Posons $PQ = (r_{i,j})$ et $QP = (s_{i,j})$.

$$\mathrm{tr}(PQ) = \sum_{i=1}^{4} r_{i,i} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} p_{i,k}\, q_{k,i} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} q_{k,i}\, p_{i,k} = \sum_{k=1}^{4}\sum_{i=1}^{4} q_{k,i}\, p_{i,k} = \sum_{k=1}^{4} s_{k,k} = \mathrm{tr}(QP).$$

$$\boxed{\text{Pour tout couple } (P,Q) \text{ d'éléments de } E,\ \mathrm{tr}(PQ) = \mathrm{tr}(QP).}$$

b) Commençons par remarquer que $A = J + K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi ${}^tA = -A$.

On a encore ${}^tA^{-1} = {}^t\left(-\dfrac{1}{2}\,A\right) = -\dfrac{1}{2}\,{}^tA = \dfrac{1}{2}\,A = -A^{-1}$.

Soient M et N deux éléments de E.

$\big(\varphi_A(M)|N\big) = \mathrm{tr}\left({}^t(AMA^{-1})N\right) = \mathrm{tr}({}^tA^{-1}\,{}^tM\,{}^tAN) = \mathrm{tr}\left((-A^{-1})\,{}^tM(-A)N\right) = \mathrm{tr}\left(A^{-1}\,{}^tMAN\right)$.

a) permet alors d'écrire : $\big(\varphi_A(M)|N\big) = \mathrm{tr}\left({}^tMANA^{-1}\right) = \big(M|\varphi_A(N)\big)$.

Ce qui achève de montrer que :

$$\boxed{\varphi_A \text{ est un endomorphisme symétrique de } E.}$$

c) Nous avons vu plus haut que $\mathrm{Ker}(\varphi_A - id)$ et $\mathrm{Ker}(\varphi_A + id)$ sont deux sous-espaces propres de φ_A supplémentaires dans E. φ_A étant un endomorphisme symétrique, ces deux sous-espaces propres sont orthogonaux. Par conséquent :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi_A - id) \text{ et } \mathrm{Ker}(\varphi_A + id) \text{ sont supplémentaires et orthogonaux dans } E.}$$

Remarque *Nous avions dit que* φ_A *est une symétrie vectorielle de* E *; ceci permet d'ajouter que* φ_A *est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à* $\mathrm{Ker}(\varphi_A - id) = \mathrm{Vect}(I, J+K)$.

Exercice 4 **EDHEC 2009 Ex 3**

On note E l'espace vectoriel constitué des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à $2n+1$.

Pour tout k de $\{0, 1, \ldots, 2n+1\}$, on admet que l'expression $X^{2n+1} \times \dfrac{1}{X^k}$ désigne le polynôme X^{2n+1-k}.

On désigne par Id l'endomorphisme identique de E et on note f l'application qui à toute fonction P de E associe la fonction $f(P)$ définie par : $f(P) = X^{2n+1}\, P\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de E.

2) a) Vérifier que $f \circ f = Id$.

b) En déduire les deux valeurs propres possibles de f.

3) Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, X^k$ un polynôme quelconque de $\mathrm{Ker}(f - Id)$.

a) Montrer que les a_k $(0 \leqslant k \leqslant 2n+1)$ sont solutions du système : $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\},\ a_k = a_{2n+1-k}$.

b) En déduire une base de $\mathrm{Ker}(f - Id)$.

4) Déterminer de la même façon une base de $\mathrm{Ker}(f + Id)$.

Le reste concerne le chapitre algèbre bilinéaire.

5) On considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout couple (P, Q) de polynômes de E associe le réel $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, b_k$, où l'on a noté $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} b_k\, X^k$.

a) Montrer que φ est un produit scalaire défini sur E.

b) Établir alors que f est un endomorphisme symétrique.

c) En déduire que $\mathrm{Ker}(f + Id)$ et $\mathrm{Ker}(f - Id)$ sont supplémentaires et orthogonaux dans E.

---

1) • Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, X^k$ un élément de E.

$$f(P) = X^{2n+1}\, P\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k \left(X^{2n+1} \times \frac{1}{X^k}\right) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, X^{2n+1-k}.$$

Un petit changement d'indice donne alors : $f(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1-k}\, X^k$. Ainsi $f(P)$ est un élément de E.

$$\boxed{f \text{ est une application de } E \text{ dans } E}.$$

$$\boxed{\text{Soit } P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k,\ X^k \text{ un élément de } E.\ f(P) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, X^{2n+1-k} = \sum_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1-k}\, X^k.}$$

Dans la suite nous nous appuierons sur cela pour nous éviter de parler de P $\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{X}}\right)$**...**

• Soient $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} b_k\, X^k$ deux éléments de E. Soit λ un réel. $\lambda\, P + Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} (\lambda\, a_k + b_k)\, X^k$.

Ainsi : $f(\lambda P+Q)=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}(\lambda\, a_{2n+1-k}+b_{2n+1-k})\,X^k=\lambda\sum_{k=0}^{2n+1}a_{2n+1-k}\,X^k+\sum_{k=0}^{2n+1}b_{2n+1-k}\,X^k=\lambda\, f(P)+f(Q)$.

f est donc linéaire. f est alors une application linéaire de E dans E. Par conséquent :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

2) a) Soit $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}a_k\,X^k$ un élément de E. $f(P)=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}a_{2n+1-k}\,X^k$.

Donc $f\big(f(P)\big)=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}a_{2n+1-(2n+1-k)}\,X^k=\sum_{k=0}^{2n+1}a_k\,X^k=P$.

$\forall P\in E,\ (f\circ f)(P)=f\big(f(P)\big)=P$. Ainsi :

$$\boxed{f\circ f=Id.}$$

b) X^2-1 est un polynôme annulateur de f dont les zéros sont -1 et 1. Le spectre de f est donc contenu dans $\{-1,1\}$.

$$\boxed{1 \text{ et } -1 \text{ sont les seules valeurs propres posssibles de } f.}$$

3) a) *Nous ne commencerons pas à supposer que P est dans* $\mathrm{Ker}(f-Id)$*. Nous donnerons directement, et pour le même prix une condition nécessaire et suffisante pour que P soit dans* $\mathrm{Ker}(f-Id)$.

Soit $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}a_k\,X^k$ un élément de E. $f(P)=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}a_{2n+1-k}\,X^k$.

$P\in\mathrm{Ker}(f-Id)\iff P=f(P)\iff\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}a_k\,X^k=\sum_{k=0}^{2n+1}a_{2n+1-k}\,X^k\iff\forall k\in[\![0,2n+1]\!],\ a_k=a_{2n+1-k}$.

Observons alors que : $\big(n+1,2n+1-(n+1)\big)=(2n+1-n,n)$, $\big(n+2,2n+1-(n+2)\big)=(2n+1-(n-1),n-1)$, ..., $\big(2n+1,2n+1-(2n+1)\big)=(2n+1-0,0)$.

Ce qui permet de dire que les $n+1$ dernières équations du système précédent se déduisent des n+1 premières.

Illustrons ! ! $\left\{\begin{array}{l}a_0=a_{2n+1}\\ a_1=a_{2n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n-1}=a_{n+2}\\ a_n=a_{n+1}\\ a_{n+1}=a_n\\ a_{n+2}=a_{n-1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{2n+1}=a_0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}a_0=a_{2n+1}\\ a_1=a_{2n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_1=a_{2n}\\ a_n=a_{n+1}\end{array}\right.$. C'est mieux comme cela Elisa ?

Ainsi $P\in\mathrm{Ker}(f-Id)\iff\forall k\in[\![0,2n+1]\!],\ a_k=a_{2n+1-k}\iff\forall k\in[\![0,n]\!],\ a_k=a_{2n+1-k}$.

$$\boxed{\text{Un élément } P=\sum_{k=0}^{2n+1}a_k\,X^k \text{ de } E \text{ est un élément de } \mathrm{Ker}(f-Id) \text{ si et seulement si } \forall k\in[\![0,n]\!],\ a_k=a_{2n+1-k}.}$$

b) Soit $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}a_k,\,X^k$ un élément de $\mathrm{Ker}(f-Id)$. Alors $\forall k\in[\![0,n]\!],\ a_k=a_{2n+1-k}$ et même $\forall k\in[\![0,2n+1]\!],\ a_k=a_{2n+1-k}$.

Donc $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\,X^k+\sum_{k=n+1}^{2n+1} a_{2n+1-k}\,X^k=\sum_{k=0}^{n} a_k\,X^k+\sum_{k=0}^{n} a_k\,X^{2n+1-k}=\sum_{k=0}^{n} a_k\,(X^k+X^{2n+1-k})$.

Alors P appartient à $\mathrm{Vect}(1+X^{2n+1},X+X^{2n},\dots,X^n+X^{n+1})$.

Ceci permet de dire que $\mathrm{Ker}(f-Id)\subset\mathrm{Vect}(1+X^{2n+1},X+X^{2n},\dots,X^n+X^{n+1})$.

De plus $\forall k\in[\![0,n]\!],\ f(X^k+X^{2n+1-k})=X^{2n+1-k}+X^{2n+1-(2n+1-k)}=X^k+X^{2n+1-k}$.

Donc $\forall k\in[\![0,n]\!],\ X^k+X^{2n+1-k}\in\mathrm{Ker}(f-Id)$. Ainsi $\mathrm{Vect}(1+X^{2n+1},X+X^{2n},\dots,X^n+X^{n+1})\subset\mathrm{Ker}(f-Id)$.

Finalement $\mathrm{Ker}(f-Id)=\mathrm{Vect}(1+X^{2n+1},X+X^{2n},\dots,X^n+X^{n+1})$ et alors $(1+X^{2n+1},X+X^{2n},\dots,X^n+X^{n+1})$ est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f-Id)$.

$\forall k\in[\![0,n]\!],\ \deg(X^k+X^{2n+1-k})=2n+1-k$, donc les éléments de la famille $(1+X^{2n+1},X+X^{2n},\dots,X^n+X^{n+1})$ sont des polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts.

Ainsi $(1+X^{2n+1},X+X^{2n},\dots,X^n+X^{n+1})$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}(f-Id)$. Finalement :

$$\boxed{(1+X^{2n+1},X+X^{2n},\dots,X^n+X^{n+1})\text{ est une base de }\mathrm{Ker}(f-Id).}$$

4) Soit $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k\,X^k$ un élément de $\mathrm{Ker}(f+Id)$.

$f(P)=-P$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1-k}\,X^k=-\sum_{k=0}^{2n+1} a_k\,X^k$. Alors : $\forall k\in[\![0,2n+1]\!],\ a_k=-a_{2n+1-k}$.

Donc $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\,X^k-\sum_{k=n+1}^{2n+1} a_{2n+1-k}\,X^k=\sum_{k=0}^{n} a_k\,X^k-\sum_{k=0}^{n} a_k\,X^{2n+1-k}=\sum_{k=0}^{n} a_k\,(X^k-X^{2n+1-k})$.

Alors P appartient à $\mathrm{Vect}(1-X^{2n+1},X-X^{2n},\dots,X^n-X^{n+1})$.

Ceci permet de dire que $\mathrm{Ker}(f+Id)\subset\mathrm{Vect}(1-X^{2n+1},X-X^{2n},\dots,X^n-X^{n+1})$.

De plus $\forall k\in[\![0,n]\!],\ f(X^k-X^{2n+1-k})=X^{2n+1-k}-X^{2n+1-(2n+1-k)}=X^{2n+1-k}-X^k=-(X^k-X^{2n+1-k})$.

Donc $\forall k\in[\![0,n]\!],\ X^k-X^{2n+1-k}\in\mathrm{Ker}(f+Id)$. Ainsi $\mathrm{Vect}(1-X^{2n+1},X-X^{2n},\dots,X^n-X^{n+1})\subset\mathrm{Ker}(f+Id)$.

Finalement $\mathrm{Ker}(f+Id)=\mathrm{Vect}(1-X^{2n+1},X-X^{2n},\dots,X^n-X^{n+1})$ et $(1-X^{2n+1},X-X^{2n},\dots,X^n-X^{n+1})$ est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f+Id)$.

$\forall k\in[\![0,n]\!],\ \deg(X^k-X^{2n+1-k})=2n+1-k$, donc les éléments de la famille $(1-X^{2n+1},X-X^{2n},\dots,X^n-X^{n+1})$ sont des polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts.

Ainsi $(1-X^{2n+1},X-X^{2n},\dots,X^n-X^{n+1})$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}(f-Id)$. Finalement :

$$\boxed{(1-X^{2n+1},X-X^{2n},\dots,X^n-X^{n+1})\text{ est une base de }\mathrm{Ker}(f-Id).}$$

5) a) Dans cette section $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k\,X^k$, $Q=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} b_k\,X^k$, $R=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} c_k\,X^k$ sont trois éléments de E et λ est un réel.

• $\varphi(\lambda\,P+Q,R)=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}((\lambda\,a_k+b_k)\,c_k)=\sum_{k=0}^{2n+1}(\lambda\,a_k\,c_k+b_k\,c_k)=\lambda\sum_{k=0}^{2n+1}a_k\,c_k+\sum_{k=0}^{2n+1}b_k\,c_k=\lambda\,\varphi(P,R)+\varphi(Q,R)$.

$\varphi(\lambda\,P+Q,R)=\lambda\,\varphi(P,R)+\varphi(Q,R)$ (i).

• $\varphi(Q,P)=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} b_k\,a_k=\sum_{k=0}^{2n+1} a_k\,b_k=\varphi(P,Q)$. $\varphi(Q,P)=\varphi(P,Q)$ (ii).

• $\varphi(P,P)=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k\,a_k=\sum_{k=0}^{2n+1} a_k^2\geqslant 0$ (iii).

• Supposons que $\varphi(P,P)=0$.

Alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k^2=0$. Ce qui donne $a_0^2=a_1^2=\cdots=a_{2n+1}^2=0$ car a_0^2, a_1^2, ..., a_{2n+1}^2 sont des réels positifs ou nuls.

Donc $a_0=a_1=\cdots=a_{2n+1}=0$. Ainsi P est nul.

Si $\varphi(P,P)=0$ alors P est nul (iv).

(i), (ii), (iii) et (iv) montrent que :

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire défini sur } E.}$$

b) $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k\,X^k$ et $Q=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} b_k\,X^k$ sont deux éléments de E. $f(P)=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1-k}\,X^k$ et $f(Q)=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} b_{2n+1-k}\,X^k$.

Ainsi $\varphi\left(f(P),Q\right)=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1-k}\,b_k=\sum_{i=0}^{2n+1} a_i\,b_{2n+1-i}=\varphi\left(P,f(Q)\right)$. $\varphi\left(f(P),Q\right)=\varphi\left(P,f(Q)\right)$.

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme symétrique de } E.}$$

c) f est un endomorphisme symétrique de E donc f est diagonalisable.

Nous avons vu plus haut que les deux valeurs propres possibles de f sont 1 et -1. Nous avons également vu que :

$\mathrm{Ker}(f-Id)=\mathrm{Vect}(1+X^{2n+1},X+X^{2n},\dots,X^n+X^{n+1})$ et $\mathrm{Ker}(f+Id)=\mathrm{Vect}(1-X^{2n+1},X-X^{2n},\dots,X^n-X^{n+1})$.

Ainsi $\mathrm{Ker}(f-Id)$ et $\mathrm{Ker}(f+Id)$ ne sont pas réduit au vecteur nul ; 1 et -1 sont des valeurs propres de f.

Finalement 1 et -1 sont les valeurs propres de f. Comme f est diagonalisable, $\mathrm{Ker}(f-Id)$ et $\mathrm{Ker}(f+Id)$ sont supplémentaires.

De plus f est symétrique donc ses sous-espaces propres sont orthogonaux. Alors $\mathrm{Ker}(f-Id)$ et $\mathrm{Ker}(f+Id)$ sont orthogonaux. Finalement :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f+Id) \text{ et } \mathrm{Ker}(f-Id) \text{ sont supplémentaires orthogonaux dans } E.}$$

∇ *Remarque Ceci indique que* $\mathrm{Ker}(f+Id)$ *est l'orthogonal de* $\mathrm{Ker}(f-Id)$.

Or f est un endomorphisme involutif de E donc f est la symétrie vectorielle par rapport à $\mathrm{Ker}(f-Id)$ *dans la direction* $\mathrm{Ker}(f+Id)$.

Finalement f est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à $\mathrm{Ker}(f-Id)$. ∇

Exercice 5 **EDHEC 2011 ex1**

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, notée n ($n \in N^*$) et u un endomorphisme de E.

On note Id_E l'identité de E.

Si $P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_p X^p$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$, on rappelle qu'on désigne par $P(u)$ l'endomorphisme suivant :

$P(u) = a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 u + ... + a_p u^p$ où u^k est la composée $\underbrace{u \circ u \ldots \circ u}_{k \text{ fois}}$ ($u^0 = \mathrm{Id}_E$ par convention).

Dans toute la suite Q est un polynôme qui admet 1 pour racine simple et tel que $Q(u) = 0$.

Ainsi on peut écrire $Q(X) = (X-1)\, Q_1(X)$ avec $Q_1(1) \neq 0$.

Q1. Montrer que l'image de $(u - \mathrm{Id}_E)$ est contenue dans $\mathrm{Ker}(Q_1(u))$.

Q2. On note $E_1 = Ker(u - \mathrm{Id}_E)$.

a) Montrer que si $x \in E_1$ alors $Q_1(u)(x) = Q_1(1)\, x$.

b) En déduire que $E_1 \cap \mathrm{Ker}(Q_1(u)) = \{0_E\}$.

c) En déduire à l'aide du théorème du rang que $E = E_1 \oplus \mathrm{Ker}(Q_1(u))$.

Q3. Montrer que $Q_1(u) = 0$ si, et seulement si, 1 n'est pas valeur propre de u.

Q4. On suppose dans cette question que $Q(X) = (X-1)(X+1)^2$, que E est de dimension 3 et que 1 est valeur propre de u ; on note E_1 l'espace propre associé à la valeur propre 1.

Montrer que si la dimension de E_1 est supérieure ou égale à 2, l'endomorphisme u est diagonalisable (on pourra distinguer deux cas, suivant que la dimension de E_1 est égale à 2 ou égale à 3).

---

1. $Q(X) = (X-1)\, Q_1(X) = Q_1(X)\,(X-1)$. Alors $Q(u) = Q_1(u) \circ (u - \mathrm{Id}_E)$.

Comme $Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, $Q_1(u) \circ (u - \mathrm{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Soit y un élément de l'image de $u - \mathrm{Id}_E$. Il existe un élément x de E tel que $y = (u - \mathrm{Id}_E)(x)$.

Donc $Q_1(u)(y) = Q_1(u)\Big((u - \mathrm{Id}_E)(x)\Big) = \Big(Q_1(u) \circ (u - \mathrm{Id}_E)\Big)(x) = 0_{\mathcal{L}(E)}(x) = 0_E$.

Ainsi y est dans le noyau de $Q_1(u)$.

$\forall y \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E),\ y \in \mathrm{Ker}\, Q_1(u)$.

$$\boxed{\text{L'image de } u - \mathrm{Id}_E \text{ est contenue dans } \mathrm{Ker}\, Q_1(u).}$$

Remarque *C'est une bonne occasion pour redémontrer que si f et g sont deux endomorphismes de E :*

$$g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f.$$

On peut encore généraliser au cas où $f \in \mathcal{L}(E, E')$ et $g \in \mathcal{L}(E', E'')$.

2. (a) Soit x un élément de E_1. $(u - \mathrm{Id}_E)(x) = 0_E$ donc $u(x) = x$.

Le programme de seconde année (voir I 2) a)) nous permet alors de dire que $Q_1(u)(x) = Q_1(1)\, x$.

$$\boxed{\text{Si } x \text{ est un élément de } E_1 \text{ alors } Q_1(u)(x) = Q_1(1)\, x.}$$

Remarque *Redonnons une preuve de ce que nous avons affirmé (à juste titre...) et même un peu plus.*

Il existe un élément r de $\mathbb{N}$ et $r+1$ réels a_0, a_1, ..., a_r tel que $Q_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, X^k$. $Q_1(u) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, u^k$.

Soient λ un réel et x un élément de E tel que $u(x) = \lambda\, x$. Un récurrence simple montre que $\forall k \in \mathbb{N},\ u^k(x) = \lambda^k\, x$.

Alors $Q_1(u)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, u^k(x) = \sum_{k=0}^{r} a_k\, \lambda^k\, x = \left(\sum_{k=0}^{r} a_k\, \lambda^k\right) x = Q_1(\lambda)\, x.$

Donc $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ u(x) = \lambda\, x \Rightarrow Q_1(u)(x) = Q_1(\lambda)\, x.$

(b) • Est-il vraiment utile de dire que E_1 et $\operatorname{Ker} Q_1(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels de E donc contiennent tous les deux 0_E et qu'ainsi $\{0_E\} \subset E_1 \cap \operatorname{Ker} Q_1(u)$?

• Soit x un élément de $E_1 \cap \operatorname{Ker} Q_1(u)$. $Q_1(u)(x) = Q_1(1)\, x$ d'après **(a)** et $Q_1(u)(x) = 0_E$.

Donc $Q_1(1)\, x = 0_E$. Comme $Q_1(1) \neq 0$ il vient $x = 0_E$. Ceci achève de montrer que $E_1 \cap \operatorname{Ker} Q_1(u) \subset \{0_E\}$ Finalement

$$\boxed{E_1 \cap \operatorname{Ker} Q_1(u) = \{0_E\}.}$$

(c) $E_1 \cap \operatorname{Ker} Q_1(u) = \{0_E\}$ et E est de dimension finie. Donc pour montrer que E_1 et $\operatorname{Ker} Q_1(u)$ sont supplémentaires il ne reste plus qu'à montrer que $\dim E_1 + \dim \operatorname{Ker} Q_1(u) = \dim E$.

$E_1 + \operatorname{Ker} Q_1(u)$ est un sous-espace vectoriel de E donc $\dim\big(E_1 + \operatorname{Ker} Q_1(u)\big) \leqslant \dim E$.

E_1 et $\operatorname{Ker} Q_1(u)$ sont en somme directe donc $\dim E_1 + \dim \operatorname{Ker} Q_1(u) = \dim\big(E_1 + \operatorname{Ker} Q_1(u)\big) \leqslant \dim E$.

Or $\operatorname{Im}(u - \operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Ker} Q_1(u)$ donc $\dim \operatorname{Im}(u - \operatorname{Id}_E) \leqslant \dim \operatorname{Ker} Q_1(u)$.

On obtient alors $\dim \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E) + \dim \operatorname{Im}(u - \operatorname{Id}_E) \leqslant \dim \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E) + \dim \operatorname{Ker} Q_1(u)$.

Ou encore $\dim \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E) + \dim \operatorname{Im}(u - \operatorname{Id}_E) \leqslant \dim E_1 + \dim \operatorname{Ker} Q_1(u)$.

Le théorème du rang appliqué à $u - \operatorname{Id}_E$ donne $\dim E = \dim \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E) + \dim \operatorname{Im}(u - \operatorname{Id}_E)$.

Alors $\dim E \leqslant \dim E_1 + \dim \operatorname{Ker} Q_1(u)$.

Or nous avons vu que $\dim E_1 + \dim \operatorname{Ker} Q_1(u) \leqslant \dim E$. Donc $\dim E_1 + \dim \operatorname{Ker} Q_1(u) = \dim E$.

Ceci achève de montrer la supplémentarité de E_1 et de $\operatorname{Ker} Q_1(u)$.

$$\boxed{E = E_1 \oplus \operatorname{Ker} Q_1(u).}$$

3. Rappelons que $E = E_1 \oplus \operatorname{Ker} Q_1(u)$. Donc $\dim E = \dim E_1 + \dim \operatorname{Ker} Q_1(u)$.

$\operatorname{Ker} Q_1(u)$ est un sous-espace vectoriel de E qui est de dimension finie donc $\operatorname{Ker} Q_1(u) = E \Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} Q_1(u) = \dim E$.

Alors : $Q_1(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow \operatorname{Ker} Q_1(u) = E \Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} Q_1(u) = \dim E \Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} Q_1(u) = \dim E_1 + \dim \operatorname{Ker} Q_1(u)$.

Ainsi : $Q_1(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow \dim E_1 = 0 \Leftrightarrow E_1 = \{0_E\} \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E) = \{0_E\} \Leftrightarrow$ 1 n'est pas valeur propre de u.

$$\boxed{Q_1(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de } u.}$$

4. Ici $Q(X) = (X-1)(X+1)^2$ donc $Q_1 = (X+1)^2$. Supposons que E_1 est de dimension supérieure ou égale à deux et montrons que u est diagonalisable.

• Premier cas : $\dim E_1 = 2$.

$Q = (X-1)(X+1)^2$ est un polynôme annulateur de u dont les zéros sont 1 et -1. Alors les seules valeurs propres **possibles** de u sont 1 et -1.

$\dim E_1 = 2$ donc 1 est valeur propre de u et le sous-espace propre associé est de dimension 2. Montrons que -1 est également valeur propre de u.

$\dim \operatorname{Ker}\Big((u+\mathrm{Id}_E)^2\Big) = \dim \operatorname{Ker} Q_1(u) = \dim E - \dim E_1 = 3 - 2 = 1$. Alors $\operatorname{Ker}\Big((u+\mathrm{Id}_E)^2\Big)$ n'est pas réduit au vecteur nul donc $(u+\mathrm{Id}_E)^2$ est un endomorphisme de E non injectif.

Supposons que l'endomorphisme $u+\mathrm{Id}_E$ est injectif. Alors $(u+\mathrm{Id}_E)^2 = (u+\mathrm{Id}_E)\circ(u+\mathrm{Id}_E)$ est injectif comme composée de deux endomorphismes injectifs ce qui n'est pas. Donc $u+\mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif. Alors -1 est valeur propre de u.

Ainsi les valeurs propres de u sont 1 et -1. Notons E_{-1} le sous-espace propre de u associé à la valeur propre -1.

$\dim E_{-1} \geqslant 1$ et $\dim E_1 + \dim E_{-1} \leqslant \dim E = 3$. Comme $\dim E_1 = 2$ nécessairement $\dim E_{-1} = 1$.

Alors $\dim E_1 + \dim E_{-1} = 3 = \dim E$ et u est diagonalisable.

• Deuxième cas : $\dim E_1 = 3$.

Alors $\dim E_1 = \dim E < +\infty$ donc $E_1 = E$. Ainsi $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = E$. Ceci donne : $u - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Par conséquent $u = \mathrm{Id}_E$ et u est diagonalisable !

Si la dimension de E_1 est supérieure ou égale à 2, l'endomorphisme u est diagonalisable.

Exercice 6 **EDHEC 2012 ex 1**

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

Q1 a) Calculer A^2 et A^3, puis déterminer un polynôme annulateur de f.

b) En déduire les valeurs propres de f.

c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2) Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3) a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f^2) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

b) On veut montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $g^2 = f$. On suppose pour cela qu'un tel endomorphisme existe.

Établir que $\text{Ker}(f^2)$ est stable par g, puis montrer que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$G = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}.$$

En utilisant la matrice de f dans cette même base, trouver une contradiction et conclure.

4) Étude d'un cas plus général. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$ (où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1) et on désigne par α un réel non nul.

a) On considère un endomorphisme h de $\mathbb{R}^n$ et on suppose que $h^n = \alpha h^{n-1}$.

Montrer que : $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(h^{n-1}) \oplus \text{Ker}(h - \alpha\text{Id})$.

b) Montrer réciproquement que, si un endomorphisme h de $\mathbb{R}^n$ est tel que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(h^{n-1}) \oplus \text{Ker}(h - \alpha\text{Id})$, alors on a : $h^n = \alpha h^{n-1}$.

---

1) a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2A^2$.

$$\boxed{A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2A^2.}$$

Alors $A^3 - 2A^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Donc $f^3 - 2f^2 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$. Dans ces conditions :

$$\boxed{X^3 - 2X^2 \text{ est un polynôme annulateur de } f.}$$

b) $X^3 - 2X^2$ est un polynôme annulateur de f dont les racines sont 0 et 2.

Alors les seules valeurs propres possibles de f sont 0 et 2. $\mathrm{Sp}\, f \subset \{0, 2\}$.

Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit u un élément de $\mathbb{R}^3$ dont la famille des coordonnées dans la base $\mathcal{B}_0$ est (x, y, z).

$$f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x + 3y - 3z = 0 \\ -2x + 2y - 2z = 0 \end{cases}.$$

$$f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4(y - z) = 0 \\ 4(y - z) = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases} \right).$$

$$f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} z = y \\ x = 0 \end{cases}.$$

Plus de doute 0 est valeur propre de f et le sous espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $(e_2 + e_3)$.

$$f(u) = 2u \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y - z = 2x \\ -x + 3y - 3z = 2y \\ -2x + 2y - 2z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -x + y - 3z = 0 \\ -2x + 2y - 4z = 0 \end{cases}.$$

$$f(u) = 2u \iff \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -x + y - 3z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -2z = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \right).$$

$$f(u) = 2u \iff \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases}.$$

2 est valeur propre de f et le sous espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $(e_1 + e_2)$.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } f \text{ sont 0 et 2. De plus SEP } (f, 0) = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3) \text{ et SEP } (f, 2) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2).}$$

c) $\mathrm{Sp}\, f = \{0, 2\}$ et $\dim \mathrm{SEP}\ (f, 0) + \dim \mathrm{SEP}\ (f, 2) = 1 + 1 = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

2) • Une petite **analyse** s'impose.

Supposons que $\mathcal{B} = (e'_1, e'_2, e'_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Alors $f(e'_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$, $f(e'_2) = e'_1$ et $f(e'_3) = 2e'_3$. $e'_1 \in \mathrm{Ker}\, f$, $e'_1 = f(e'_2)$ et $e'_3 \in \mathrm{SEP}\ (f, 2)$.

Notons que $e'_1 \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$.

$\mathrm{Im}\, f = f(\mathbb{R}^3) = f\left(\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)\right) = \mathrm{Vect}\left(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\right) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2 - 2e_3, e_1 + 3e_2 + 2e_3, -e_1 - 3e_2 - 2e_3)$.

$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2 - 2e_3, e_1 + 3e_2 + 2e_3) = \mathrm{Vect}\Big(e_1 - e_2 - 2e_3, e_1 + 3e_2 + 2e_3 - (e_1 - e_2 - 2e_3)\Big)$.

$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2 - 2e_3, 4e_2 + 4e_3) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2 - 2e_3, e_2 + e_3) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2 - 2e_3 + e_2 + e_3, e_2 + e_3)$.

$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(e_1 - e_3, e_2 + e_3)$.

Alors $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Im}\, f$ donc $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3)$. Rappelons que $\mathrm{SEP}\ (f, 2) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2)$.

• Passons à la **synthèse**. Donc construisons une base $\mathcal{B}$ solution.

Posons $\underline{e'_1 = e_2 + e_3}$ et $\underline{e'_3 = e_1 + e_2}$. Alors $\underline{f(e'_1) = 0_{\mathbb{R}^3}}$ et $\underline{f(e'_3) = 2e'_3}$.

Construisons alors un élément e'_2 de $\mathbb{R}^3$ tel que $f(e'_2) = e'_1$. Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ un élément de $\mathbb{R}^3$.

$f(u)=e'_1 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ -x+3y-3z=1 \\ -2x+2y-2z=1\end{cases}.$

$f(u)=e'_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} x=z-y \\ 4y-4z=1 \\ 4y-4z=1\end{cases} \quad \left(\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3+2L_1\end{cases}\right).$

$f(u)=e'_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} y-z=\dfrac{1}{4} \\ x=-\dfrac{1}{4}\end{cases}$. Notons que le triplet $(-1/4,1/4,0)$ est solution de ce système.

Posons alors $\underline{e'_2=-\frac{1}{4}e_1+\frac{1}{4}e_2}$. On a $\underline{f(e'_2)=e'_1}$.

Posons encore $\mathcal{B}=(e'_1,e'_2,e'_3)$ et montrons que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Cette famille étant de cardinal 3 égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$ il suffit de montrer qu'elle est libre.

Soient α, β, γ trois réels tels que $\alpha e'_1+\beta e'_2+\gamma e'_3=0_{\mathbb{R}^3}$.

$\alpha(e_2+e_3)+\beta\left(-\frac{1}{4}e_1+\frac{1}{4}e_2\right)+\gamma(e_1+e_2)=0_{\mathbb{R}^3}$. Donc $\left(-\frac{\beta}{4}+\gamma\right)e_1+\left(\alpha+\frac{\beta}{4}+\gamma\right)e_2+\alpha e_3=0_{\mathbb{R}^3}$.

Comme (e_1,e_2,e_3) est libre il vient : $-\frac{\beta}{4}+\gamma=\alpha+\frac{\beta}{4}+\gamma=\alpha=0$. Donc $\alpha=0$ et $\gamma=\frac{\beta}{4}=-\frac{\beta}{4}$.

Ceci donne rapidement $\alpha=\beta=\gamma=0$ et achève de montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Rappelons que $f(e'_1)=0_{\mathbb{R}^3}$, $f(e'_2)=e'_1$ et $f(e'_3)=2e'_3$. Ainsi la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est : $T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

$$\boxed{\mathcal{B}=\left(e_2+e_3,-\frac{1}{4}e_1+\frac{1}{4}e_2,e_1+e_2\right) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3 \text{ et la matrice de } f \text{ dans cette base est } T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.}$$

♣ *Exercice* *Calculer l'inverse de la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_0=(e_1,e_2,e_3)$ à la base $\mathcal{B}=(e'_1,e'_2,e'_3)$.*

Réponse : $P=\begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 1 \\ 1 & 1/4 & 1 \\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ *et* $P^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2\end{pmatrix}$.

3) a) $A^2=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ donc $\operatorname{rg} A^2=1$ (le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de A^2 est de dimension 1).

Donc le rang de f^2 est également 1 et le théorème du rang montre alors que $\operatorname{Ker} f^2$ est de dimension 2.

$e'_1 \in \operatorname{Ker} f$ donc $e'_1 \in \operatorname{Ker} f^2$. $f^2(e'2)=f(e'_1)=0_{\mathbb{R}^3}$, donc e'_2 est également un élément de $\operatorname{Ker} f^2$.

(e'_1,e'_2) est une famille libre (comme sous-famille de la base (e'_1,e'_2,e'_3)) de cardinal 2 d'éléments de $\operatorname{Ker} f^2$ qui est de dimension 2. Alors (e'_1,e'_2) est une base de $\operatorname{Ker} f^2$.

e'_3 est un élément non nul de $\operatorname{Ker}(f-2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qui est une droite vectorielle. Alors (e'_3) est une base de $\operatorname{Ker}(f-2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

(e'_1,e'_2) est une base de $\operatorname{Ker} f^2$, (e'_3) est une base de $\operatorname{Ker}(f-2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et la concaténée (e'_1,e'_2,e'_3) de ces deux familles est une base de $\mathbb{R}^3$. Alors $\operatorname{Ker} f^2$ et $\operatorname{Ker}(f-2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$ sont supplémentaires.

$$\boxed{\mathbb{R}^3=\operatorname{Ker} f^2 \oplus \operatorname{Ker}(f-2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}).}$$

b) Soit u un élément de $\operatorname{Ker} f^2$. Montrons que $g(u)$ appartient à $\operatorname{Ker} f^2$.

$f^2(g(u)) = g^4\big(g(u)\big) = g^5(u) = g\big(g^4(u)\big) = g\big(f^2(u)\big) = g(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$; $g(u) \in \operatorname{Ker} f^2$.

$\forall u \in \operatorname{Ker} f^2, g(u) \in \operatorname{Ker} f^2$. Alors :

$$\boxed{\operatorname{Ker} f^2 \text{ est stable par } g.}$$

Nous avons vu que (e'_1, e'_2) est une base de $ker f^2$ et que $ker f^2$ est stable par g.

Alors $g(e'_1) \in \operatorname{Vect}(e'_1, e'_2)$ et $g(e'_2) \in \operatorname{Vect}(e'_1, e'_2)$. Ainsi il existe quatre réels a, b, a', b' tels que $g(e'_1) = ae'_1 + be'_2$ et $g(e'_2) = a'e'_1 + b'e'_2$.

De plus il existe un triplet (a'', b'', c'') de réels tel que $g(e'_3) = a''e'_1 + b''e'_2 + c''e'_3$.

Alors la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est $G = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{La matrice de } g \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ est de la forme } G = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}.}$$

Remarque *Il était facile d'arriver à* $G = \begin{pmatrix} 0 & a' & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}$ *(avec* $c''^2 = 2$*) en remarquant que* g *et* f *commutent donc que les sous-espaces propres de* f*, qui sont des droites vectorielles, sont stables par* g*...*

$g^2 = f$ donc $G^2 = T$. $\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Cela donne en particulier $\begin{cases} a^2 + a'b = 0 \\ ba + b'b = 0 \\ aa' + a'b' = 1 \\ ba' + b'^2 = 0 \end{cases}$. Alors $\begin{cases} a^2 + a'b = 0 & (1) \\ b(a + b') = 0 & (2) \\ a'(a + b') = 1 & (3) \\ ba' + b'^2 = 0 & (4) \end{cases}$.

(3) montre que $a + b'$ n'est pas nul. (2) donne alors $b = 0$. (1) donne $a = 0$ et (4) donne $b' = 0$. Alors $a + b'$ est nul ! !

Ce qui engendre une légère contradiction...

$$\boxed{\text{Il n'existe pas d'endomorphisme } g \text{ de } \mathbb{R}^3 \text{ vérifiant : } g^2 = f.}$$

4) a) Étude d'un cas général (sic). Ici h est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $h^n = \alpha\, h^{n-1}$.

On se propose de montrer que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} h^{n-1} \oplus \operatorname{Ker}(h - \alpha \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^n})$. Soit u un élément de $\mathbb{R}^3$.

Montrons par "Analyse-Synthèse" que : $\exists\,!\,(v, w) \in \operatorname{Ker} h^{n-1} \times \operatorname{Ker}(h - \alpha \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^n}),\ u = v + w$.

- "Analyse-Unicité".

Supposons qu'il existe $(v, w) \in \operatorname{Ker} h^{n-1} \times \operatorname{Ker}(h - \alpha \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^n})$ tel que $u = v + w$.

Alors $h^{n-1}(v) = 0_{\mathbb{R}^n}$ et $h(w) = \alpha\, w$. Donc $h^{n-1}(v) = 0_{\mathbb{R}^n}$ et $h^{n-1}(w) = \alpha^{n-1}\, w$.

Dans ces conditions $h^{n-1}(u) = h^{n-1}(v) + h^{n-1}(w) = \alpha^{n-1}\, w$.

α n'étant pas nul il vient $w = \dfrac{1}{\alpha^{n-1}}\, h^{n-1}(u)$ puis $v = u - \dfrac{1}{\alpha^{n-1}}\, h^{n-1}(u)$.

Ceci montre alors l'unicité d'un couple (v, w) appartenant à $\operatorname{Ker} h^{n-1} \times \operatorname{Ker}(h - \alpha \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^n})$ tel que $u = v + w$.

- "Synthèse-Existence".

Posons $v = u - \dfrac{1}{\alpha^{n-1}}\, h^{n-1}(u)$ et $w = \dfrac{1}{\alpha^{n-1}}\, h^{n-1}(u)$.

D'abord $v + w = u$.

$h(w) = h\left(\dfrac{1}{\alpha^{n-1}}\, h^{n-1}(u)\right) = \dfrac{1}{\alpha^{n-1}}\, h^n(u) = \dfrac{1}{\alpha^{n-1}}\, \alpha\, h^{n-1}(u)$ car $h^n = \alpha\, h^{n-1}$.

$h(w) = \alpha\, \dfrac{1}{\alpha^{n-1}}\, h^{n-1}(u) = \alpha\, w$. Donc w appartient à $\mathrm{Ker}(f - \alpha\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$. Notons alors que $h^{n-1}(w) = \alpha^{n-1}\, w$.

$v = u - w$ alors : $h^{n-1}(v) = h^{n-1}(u) - h^{n-1}(w) = h^{n-1}(u) - \alpha^{n-1}\, w = h^{n-1}(u) - \alpha^{n-1}\, \dfrac{1}{\alpha^{n-1}}\, h^{n-1}(u)$.

$h^{n-1}(v) = h^{n-1}(u) - h^{n-1}(u) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Donc $v \in \mathrm{Ker}\, h^{n-1}$.

Donc $u = v + w$ avec $(v, w) \in \mathrm{Ker}\, h^{n-1} \times \mathrm{Ker}(h - \alpha\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$.

Ceci achève de montrer l'existence d'un couple (v, w) appartenant à $\mathrm{Ker}\, h^{n-1} \times \mathrm{Ker}(h - \alpha\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$ tel que $u = v + w$.

Finalement $\forall u \in \mathbb{R}^n,\ \exists\,!\,(v, w) \in \mathrm{Ker}\, h^{n-1} \times \mathrm{Ker}(h - \alpha\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}),\ u = v + w$.

$\mathrm{Ker}\, h^{n-1}$ et $\mathrm{Ker}(h - \alpha\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$ sont supplémentaires.

$$\boxed{\text{Si } h \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^n \text{ tel que } h^n = \alpha\, h^{n-1} \text{ alors } \mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\, h^{n-1} \oplus \mathrm{Ker}(h - \alpha\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}).}$$

b) Ici h est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\, h^{n-1} \oplus \mathrm{Ker}(h - \alpha\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$.

On se propose de montrer que $h^n = \alpha\, h^{n-1}$.

Soit u un élément de $\mathbb{R}^n$. $\exists\,!\,(v, w) \in \mathrm{Ker}\, h^{n-1} \times \mathrm{Ker}(h - \alpha\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}),\ u = v + w$. $h^{n-1}(v) = 0_{\mathbb{R}^n}$ et $h(w) = \alpha\, w$.

Alors : $h^n(u) = h^n(v) + h^n(w) = h\big(h^{n-1}(v)\big) + \alpha^n w = h(0_{\mathbb{R}^n}) + \alpha^n w = \alpha^n w$.

De plus $\alpha\, h^{n-1}(u) = \alpha\, h^{n-1}(v) + \alpha\, h^{n-1}(w) = \alpha\, 0_{\mathbb{R}^n} + \alpha\ \alpha^{n-1}\, w = \alpha^n\, w$.

Finalement $\forall u \in \mathbb{R}^n,\ h^n(u) = \alpha\, h^{n-1}(u)$. Donc $h^n = \alpha\, h^{n-1}$.

$$\boxed{\text{Si } h \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^n \text{ tel que } \mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\, h^{n-1} \oplus \mathrm{Ker}(h - \alpha\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \text{ alors } h^n = \alpha\, h^{n-1}.}$$

Finalement :

$$\boxed{\text{Soit } h \text{ un endomorphisme de } \mathbb{R}^n.\ h^n = \alpha\, h^{n-1} \text{ si et seulement si } \mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\, h^{n-1} \oplus \mathrm{Ker}(h - \alpha\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}).}$$
