Exercice 1 **N1** **Cours : existence d'un polynôme annulateur non nul pour une matrice**.

Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède au moins un polynôme annulateur non nul.

▲ *Ceci vaut aussi pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$.*

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n^2})$ est une famille de cardinal n^2+1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est un espace vectoriel de dimension n^2. Cette famille est donc nécessairement liée.

Ainsi on peut trouver n^2+1 éléments λ_0, λ_1, ..., λ_{n^2} de $\mathbb{K}$, non tous nuls et tels que :

$$\lambda_0\, I_n + \lambda_1\, A + \lambda_2\, A^2 + \cdots + \lambda_{n^2}\, A^{n^2} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}.$$

Posons $P = \sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k\, X^k$. P est un élément non nul de $\mathbb{K}[X]$ (l'un au moins de ses coefficients n'est pas nul) tel que $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

P est un polynôme annulateur non nul de A.

Exercice 2 **N1** **Dans C au moins une racine d'un polynôme annulateur non nul est valeur propres**.

Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et P un polynôme annulateur non nul de A.

Montrer que l'une au moins des racines de P est une valeur propre de A.

▲ *Ceci vaut aussi pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$.*

Soit P un élément non nul de $\mathbb{C}[X]$ tel que $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

Supposons que P soit constant. Alors il existe un élément non nul λ de $\mathbb{C}$ tel que $P = \lambda$. Ainsi $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} = P(A) = \lambda\, I_n$ et donc $\lambda = 0$!

P est donc un élément non constant de $\mathbb{C}[X]$. P est alors scindé.

Il existe alors des $r+1$ éléments γ, a_1, ..., a_r de $\mathbb{C}$ tels que $P = \gamma \displaystyle\prod_{k=1}^{r} (X - a_k)$. a_1, ..., a_r sont les racines de P.

$P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ et γ n'est pas nul donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{r} (A - a_k\, I_n) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$. Ainsi $\displaystyle\prod_{k=1}^{r} (A - a_k\, I_n)$ n'est pas inversible. Sachant que le produit de r matrices inversibles est inversible nécessairement l'une des matrices du produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{r} (A - a_k\, I_n)$ n'est pas inversible.

Alors il existe un élément i_0 de $[\![1, r]\!]$ tel que la matrice $A - a_{i_0}\, I_n$ ne soit pas inversible. a_{i_0} est alors une valeur propre de A.

Ainsi l'un des zéros de P est une valeur propre de A.

Exercice 3 **N1** **Existence d'une valeur propre pour une matrice à coefficients complexes**.

Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède au moins une valeur propre.

▲ *Ceci vaut aussi pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$.*

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

• Montrons que A possède un polynôme annulateur non nul.

$(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2})$ est une famille de cardinal n^2+1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est un espace vectoriel de dimension n^2. Cette famille est donc nécessairement liée.

Ainsi on peut trouver n^2+1 éléments λ_0, λ_1, ..., λ_{n^2} de $\mathbb{C}$, non tous nuls et tels que :

$$\lambda_0\, I_n + \lambda_1\, A + \lambda_2\, A^2 + \cdots + \lambda_{n^2}\, A^{n^2} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}.$$

Posons $P = \sum\limits_{k=0}^{n^2} \lambda_k\, X^k$. P est un élément non nul de $\mathbb{C}[X]$ (l'un au moins de ses coefficients n'est pas nul) tel que $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

P est un polynôme annulateur non nul de A.

• Montrons que A possède au moins une valeur propre.

P un élément non nul de $\mathbb{C}[X]$ tel que $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

Supposons que P soit constant. Alors il existe un élément non nul λ de $\mathbb{C}$ tel que $P = \lambda$. Ainsi $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} = P(A) = \lambda\, I_n$ et donc $\lambda = 0$!

P est donc un élément non constant de $\mathbb{C}[X]$. P est alors scindé.

Il existe alors des $r+1$ éléments γ, a_1, ..., a_r de $\mathbb{C}$ tels que $P = \gamma \prod\limits_{k=1}^{r} (X - a_k)$. Les racines de P sont a_1, ..., a_r.

$P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ et γ n'est pas nul donc $\prod\limits_{k=1}^{r} (A - a_k\, I_n) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$. Ainsi $\prod\limits_{k=1}^{r} (A - a_k\, I_n)$ n'est pas inversible. Sachant que le produit de r matrices inversibles est inversible nécessairement l'une des matrices du produit $\prod\limits_{k=1}^{r} (A - a_k\, I_n)$ n'est pas inversible.

Alors il existe un élément i_0 de $[\![1, r]\!]$ tel que la matrice $A - a_{i_0}\, I_n$ ne soit pas inversible. a_{i_0} est alors une valeur propre de A.

Ainsi A possède au moins une valeur propre.

Exercice 4 **N1** **Endomorphisme (resp. matrice) diagonalisable n'ayant qu'une valeur propre**.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'ayant qu'une seule valeur propre λ.

Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $A = \lambda\, I_n$.

▲ *Ceci vaut aussi pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$.*

V1 La dimension de l'unique sous-espace propre SEP (A, λ) de A est $n - \mathrm{rg}(A - \lambda\, I_n)$.

A diagonalisable $\Leftrightarrow \dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) = n \Leftrightarrow n - \mathrm{rg}(A - \lambda\, I_n) = n \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A - \lambda\, I_n) = 0 \Leftrightarrow A - \lambda\, I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \Leftrightarrow A = \lambda\, I_n$.

V2 • Si $A = \lambda\, I_n$, A est une matrice diagonale donc A est diagonalisable.

• Réciproquement supposons que A est digonalisable. Il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telle que $D = P^{-1}AP$.

D et A sont semblables donc λ est la seule valeur propre de D. Comme D est diagonale les éléments de sa diagonale sont ses valeurs propres. Ainsi les éléments de la diagonale de D sont tous égaux à λ et D vaut alors $\lambda\, I_n$.

Par conséquent $A = PDP^{-1} = P(\lambda\, I_n)P^{-1} = \lambda\, PP^{-1} = \lambda\, I_n$.

Exercice 5 **N1** **Polynôme d'une matrice diagonalisable**

A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Q est un élément de $\mathbb{K}[X]$.

Montrer que si $B = P^{-1}AP$ alors $Q(B) = P^{-1}Q(A)P$.

Application. Montrer que si A est diagonalisable $Q(A)$ est diagonalisable et $\operatorname{Sp} Q(A) = Q(\operatorname{Sp} A)$.

▲ *Ce dernier résultat vaut aussi pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$.*

• Il existe un élement n de $\mathbb{N}$ et un élément $(a_0, a_1, \ldots, a_{n+1})$ de $\mathbb{K}^{n+1}$ tel que $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k$.

Alors $Q(B) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, B^k = \sum_{k=0}^{n} a_k\, (P^{-1}AP)^k$. Une récurrence simple donne $\forall k \in \mathbb{N},\ (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$.

Alors $Q(B) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, P^{-1}A^kP = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, A^k\right) P = P^{-1}Q(A)P$.

$$\boxed{Q(B) = P^{-1}Q(A)P.}$$

• Suppons la matrice A diagonalisable. A est alors semblable à une matrice diagonale D. Il existe une matrice inversible S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $D = S^{-1}AS$.

D'après ce qui précède $Q(D) = S^{-1}Q(A)S$. Ainsi $Q(A)$ est semblable à $Q(D)$.

D étant diagonale il en est de même pour D^k et ceci pour tout élément k de $\mathbb{N}$.

Alors $Q(D) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, D^k$ est alors une matrice diagonale comme combinaison linéaire de matrices diagonales.

$Q(A)$ étant semblable à une matrice diagonale, ainsi :

$$\boxed{Q(A) \text{ est diagonalisable.}}$$

Posons $D = \operatorname{Diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Alors $\operatorname{Sp} D = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$.

Ainsi $\operatorname{Sp} A = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ car A et D sont semblables.

De plus $Q(D) = \operatorname{Diag}\big(Q(d_1), Q(d_2) \ldots, Q(d_n)\big)$. Donc $\operatorname{Sp} Q(D) = \big\{Q(d_1), Q(d_2) \ldots, Q(d_n)\big\}$.

Alors $\operatorname{Sp} Q(A) = \big\{Q(d_1), Q(d_2) \ldots, Q(d_n)\big\}$ car $Q(A)$ et $Q(D)$ sont semblables.

Finalement $\operatorname{Sp} Q(A) = \big\{Q(\lambda)\,;\ \lambda \in \operatorname{Sp} A\big\}$, donc :

$$\boxed{\operatorname{Sp} Q(A) = Q\big(\operatorname{Sp} A\big).}$$

Exercice 6 **N2** **Polynôme minimal**.

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q1. Montrer que si P est un polynôme annulateur non nul de A, de degré minimal, l'ensemble des polynômes annulateurs de A est l'ensemble des multiples de P et le spectre de A coïncide avec l'ensemble des zéros de P.

Q2. Montrer que A possède un polynôme annulateur unitaire P_0 et un seul tel que l'ensemble des polynômes annulateurs de A soit l'ensemble des multiples de ce polynôme.

Notons que le spectre de A est l'ensemble des zéros de P_0.

▲ *Ceci vaut aussi pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$.*

Thème abordé dans oral ESCP 2010 2.11

Q1 Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des polynomes annulateurs de A et $\mathcal{S}'$ l'ensemble des multiples de P. Montrons que $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$.

Soit T un élément de $\mathcal{S}'$. Il existe un élément Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que : $T = QP$.

$T(A) = Q(A)\,P(A) = Q(A)\,0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Alors T appartient à $\mathcal{S}$. Ainsi $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$.

Réciproquement soit T un élément de $\mathcal{S}$. Notons Q et R le quotient et le reste dans la division de T par P.

$T = QP + R$ et $\deg R < \deg P$.

$T(A) = Q(A)\,P(A) + R(A)$ et $T(A) = P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Alors $R(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Si R n'est pas nul, R est un polynôme annulateur non nul de A dont le degré est strictement inférieur à celui de P et P est un polynôme annulateur non nul de A, de degré minimal. Cela est contradictoire.

Par conséquent R est nul et T est un multiple de P donc appartient à $\mathcal{S}'$. Ainsi $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$.

Ceci achève de prouver que $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$.

Si P est un polynôme annulateur non nul de A, de degré minimal, l'ensemble des polynômes annulateurs de A est l'ensemble des multiples de P.

Notons $\mathcal{H}$ l'ensemble des zéros de P. Le cours indique que $\operatorname{Sp} A \subset \mathcal{H}$. Montrons l'inclusion inverse.

Soit α un zéro de P. Supposons que α n'est pas une valeur propre de A. La matrice $A - \alpha\, I_n$ est alors inversible.

Il existe un élement non nul U de $\mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)\,U$.

Notons que U n'est pas nul (car P n'est pas nul) et que $\deg U < \deg P$.

$P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ et $P(A) = (A - \alpha\, I_n)\,U(A)$. Alors $(A - \alpha\, I_n)\,U(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

En multipliant à gauche par $(A - \alpha\, I_n)^{-1}$ on obtient $U(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Ainsi U est un polynôme annulateur non nul de A dont le degré est strictement inférieur à celui de P et P est un polynôme annulateur non nul de A de degré minimal. Cela est contradictoire.

Alors α appartient à $\operatorname{Sp} A$. $\mathcal{H} \subset \operatorname{Sp} A$. Finalement $\operatorname{Sp} A = \mathcal{H}$.

Si P est un polynôme annulateur non nul de A, de degré minimal, le spectre de A coïncide avec l'ensemble des zéros de P.

Q2 Notons $\mathcal{S}^*$ l'ensemble des polynômes annulateurs non nuls de A. Nous savons que $\mathcal{S}^*$ n'est pas vide car A possède au moins un polynôme annulateur non nul.

Alors $\{\deg T; T \in \mathcal{S}^*\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$; elle possède un plus petit élément v.

Il existe un élément V de $\mathcal{S}^*$ tel que $\deg V = v$.

V est un polynôme annulateur non nul de A de degré minimal donc $\mathcal{S}$ est l'ensemble des multiples de V.

Soit a le coefficient du terme de plus haut degré de V. Posons $P_0 = \dfrac{1}{a} V$. P_0 est unitaire et son degré est celui de V.

Ainsi P_0 est un polynôme annulateur non nul et unitaire de A, de degré minimal.

Alors, d'après ce qui précède, P_0 est un polynôme unitaire et l'ensemble $\mathcal{S}$ des polynômes annulateurs de A est l'ensemble des multiples de P_0.

Soit $\widehat{P_0}$ un second polynôme unitaire tel que $\mathcal{S}$ soit l'ensemble des multiples de $\widehat{P_0}$.

Notons que P_0 et $\widehat{P_0}$ sont dans $\mathcal{S}$ donc P_0 est un multiple de $\widehat{P_0}$ et $\widehat{P_0}$ est un multiple de P_0.

Alors il existe deux éléments Q et $\widehat{Q}$ de $\mathbb{K}[X]$ tels que $\widehat{P_0} = \widehat{Q}\, P_0$ et $P_0 = Q\, \widehat{P_0}$. Donc $P_0 = Q\, \widehat{Q}\, P_0$.

Comme P_0 n'est pas nul : $Q\, \widehat{Q} = 1$. Q et $\widehat{Q}$ sont des poynômes constants.

Alors il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ tel que $\widehat{P_0} = \lambda\, P_0$.

$\widehat{P_0}$ et P_0 étant deux polynômes unitaires on a nécessairement $\lambda = 1$ et ainsi $\widehat{P_0}$ et P_0 sont égaux.

> A possède un polynôme annulateur unitaire P_0 et un seul tel que l'ensemble des polynômes annulateurs de A soit l'ensemble des multiples de ce polynôme.
>
> P_0 est un polynôme annulateur non nul de A de degré minimal.
>
> Le spectre de A est l'ensemble des zéros de P_0.

Exercice 7 **N2** **Lemme des noyaux. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il possède un polynôme annulateur scindé à racines simples (version 2).**

f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Q1. A et B sont deux éléments non nuls de $\mathbb{K}[X]$. On suppose que les seuls éléments de $\mathbb{K}[X]$ qui divisent A et B sont les polynômes de degré 0 c'est à dire les polynômes constants et non nuls. On dira que A et B sont étrangers ou premiers entre eux.

a) On pose $\mathcal{S} = \{AU + BV ; (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2\}$. D est un élément non nul de $\mathcal{S}$ de degré minimum.

Dire pourquoi un tel D existe et montrer que $\mathcal{S}$ est l'ensemble des multiples de D (on procédera par double inclusion et on pourra utiliser la division euclidienne).

b) En remarquant que A et B sont dans $\mathcal{S}$, montrer que D est constant et en déduire qu'il existe deux éléments U_0 et V_0 de $\mathbb{K}[X]$ tels que $AU_0 + BV_0 = 1$.

c) Utiliser ce qui précède pour montrer que $\operatorname{Ker}(AB)(f) = \operatorname{Ker} A(f) \oplus \operatorname{Ker} B(f)$.

Q2. a) r est un élément de $[\![2, +\infty[\![$. P_1, P_2, ..., P_r sont r éléments non nuls de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux étrangers. Montrer que :

$$\operatorname{Ker}(P_1P_2 \cdots P_r)(f) = \operatorname{Ker} P_1(f) \oplus \operatorname{Ker} P_2(f) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} P_r(f).$$

b) r est un élément de $[\![2, +\infty[\![$. λ_1, λ_2, ..., λ_r sont r éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$.

Montrer que : $\operatorname{Ker}\big((X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_r)\big)(f) = \operatorname{Ker}(f - \lambda_1\, Id_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - \lambda_2\, Id_E) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(f - \lambda_r\, Id_E)$.

Q3. On suppose ici que E est de dimension finie non nulle.

Déduire de ce qui précède que si f admet un polynômes annulateur scindé à racines simples alors f est diagonalisable.

Montrer la réciproque.

▲ *Ce dernier résultat vaut encore pour une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Q1 a) Notons $\mathcal{S}^*$ l'ensemble des éléments non nuls de $\mathcal{S}$.

A et B donc des éléments non nuls appartenant à $\mathcal{S}$ donc $\mathcal{S}^*$ est non vide.

Alors $\{\deg S\,;\, S \in \mathcal{S}^*\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Elle possède donc un plus petit élément d.

Il existe alors un élément D de $\mathcal{S}^*$ de degré d. D est un élément non nul de $\mathcal{S}$ de degré minimal.

$$\boxed{\text{Il existe un élément non nul } D \text{ de } \mathcal{S} \text{ de degré minimal.}}$$

• Soit P un multiple de D. Il existe Q dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $P = QD$. Comme D est dans $\mathcal{S}$, on peut trouver deux éléments de $\mathbb{K}[X]$, U_1 et V_1, tels que : $D = AU_1 + BV_1$.

Alors $P = A(QU_1) + B(QV_1)$ est élément de $\mathcal{S}$ car QU_1 et QV_1 sont deux éléments de $\mathbb{K}[X]$.

Ainsi l'ensemble des multiples de D est contenu dans $\mathcal{S}$.

• Réciproquement soit P un élément de $\mathcal{S}$. Le théorème de la division euclidienne montre l'existence (et l'unicité) de deux éléments Q et R de $\mathbb{K}[X]$ tels que : $P = QD + R$ et $\deg R < \deg D$.

Rappelons que $D = AU_1 + BV_1$. Comme P est dans $\mathcal{S}$, il existe deux éléments U et V de $\mathbb{K}[X]$ tels que $P = AU + BV$.

Alors $R = P - QD = AU + BV - Q(AU_1 + BV_1) = A(U - QU_1) + B(V - QV_1)$ donc R est un élément de $\mathcal{S}$.

Or $\deg R < \deg D$ et D un élément non nul de $\mathcal{S}$ de degré minimum donc R est le polynôme nul.

Ainsi $P = QD$ et P est un multiple de D.

Alors $\mathcal{S}$ est contenu dans l'ensemble des multiples de D. Finalement :

$$\boxed{\mathcal{S} \text{ est l'ensemble des multiples de } D.}$$

b) A et B sont deux éléments de $\mathcal{S}$. Ce sont donc des multiples de D. Alors D divise A et B.

Comme A et B sont étrangers D est constant et non nul. Il existe un élément non nul λ de $\mathbb{K}$ tel que $D = \lambda$.

Alors $AU_1 + BV_1 = \lambda$. $A\left(\dfrac{1}{\lambda}U_1\right) + B\left(\dfrac{1}{\lambda}V_1\right) = 1$. Posons $U_0 = \dfrac{1}{\lambda}U_1$ et $V_0 = \dfrac{1}{\lambda}V_1$.

U_0 et V_0 sont deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ tels que $AU_0 + BV_0 = 1$.

$$\boxed{\text{Il existe deux éléments } U_0 \text{ et } V_0 \text{ de } \mathbb{K}[X] \text{ tels que } AU_0 + BV_0 = 1.}$$

c) • Montrons que $\operatorname{Ker} A(f)$ et $\operatorname{Ker} B(f)$ sont en somme directe.

Soit x un élément de $\operatorname{Ker} A(f) \cap \operatorname{Ker} B(f)$.

$AU_0 + BV_0 = 1$ donc $U_0A + V_0B = 1$. Alors $U_0(f) \circ A(f) + V_0(f) \circ B(f) = Id_E$.

Ainsi $x = U_0(f)\big(A(f)(x)\big) + V_0(f)\big(B(f)(x)\big) = U_0(f)(0_E) + V_0(f)(0_E) = 0_E + 0_E = 0_E$; $x = 0_E$.

Par conséquent $\operatorname{Ker} A(f) \cap \operatorname{Ker} B(f) = \{0_E\}$ donc $\operatorname{Ker} A(f)$ et $\operatorname{Ker} B(f)$ sont en somme directe.

• Montrons que $\operatorname{Ker}(AB)(f) = \operatorname{Ker} A(f) + \operatorname{Ker} B(f)$.

Soit x un élément de $\operatorname{Ker} A(f)$. $(AB)(f)(x) = (BA)(f)(x) = B(f)\big(A(f)(x)\big) = B(f)(0_E) = 0_E$; donc x appartient à $\operatorname{Ker}(AB)(f)$.

Par conséquent $\operatorname{Ker} A(f) \subset \operatorname{Ker}(AB)(f)$. On montre de même que $\operatorname{Ker} B(f) \subset \operatorname{Ker}(AB)(f)$.

Alors $\operatorname{Ker} A(f) + \operatorname{Ker} B(f) \subset \operatorname{Ker}(AB)(f)$ car $\operatorname{Ker}(AB)(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Réciproquement soit x un élément de $\operatorname{Ker}(AB)(f)$. Comme $AU_0 + BV_0 = 1$, $x = (AU_0)(f)(x) + (BV_0)(f)(x)$.

$B(f)\big((AU_0)(f)(x)\big) = (BAU_0)(f)(x) = (U_0AB)(f)(x) = U_0(f)\big((AB)(f)(x)\big) = U_0(f)(0_E) = 0_E$.

Ainsi $(AU_0)(f)(x) \in \operatorname{Ker} B(f)$. On montre de même que $(BV_0)(f)(x) \in \operatorname{Ker} A(f)$.

Comme $x = (AU_0)(f)(x) + (BV_0)(f)(x)$, x appartient à $\operatorname{Ker} B(f) + \operatorname{Ker} A(f) = \operatorname{Ker} A(f) + \operatorname{Ker} B(f)$.

Ceci achève de prouver que $\operatorname{Ker}(AB)(f) \subset \operatorname{Ker} A(f) + \operatorname{Ker} B(f)$.

Finalement $\operatorname{Ker}(AB)(f) = \operatorname{Ker} A(f) + \operatorname{Ker} B(f)$. Mieux :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(AB)(f) = \operatorname{Ker} A(f) \oplus \operatorname{Ker} B(f).}$$

Q2 a) Montons par récurrence que $\forall k \in [\![2, r]\!]$, $\operatorname{Ker}(P_1P_2\cdots P_k)(f) = \operatorname{Ker} P_1(f) \oplus \operatorname{Ker} P_2(f) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} P_k(f)$.

La propriété est vraie pour $k = 2$ d'après la question précédente car P_1 et P_2 sont étrangers.

Supposons la propriété vraie pour un élément k de $[\![1, r-1]\!]$ et montrons la pour $k+1$.

Par hypothèse $\operatorname{Ker}(P_1P_2\cdots P_k)(f) = \operatorname{Ker} P_1(f) \oplus \operatorname{Ker} P_2(f) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} P_k(f)$.

Posons $P = P_1P_2\cdots P_k$ et montrons que P et P_{k+1} sont étrangers.

Supposons que Q est un diviseur commun de P et P_{k+1}. Montrons que Q est constant non nul.

Q n'est pas nul car Q divise P_{k+1} et P_{k+1} n'est pas nul. Supposons que Q est de degré supérieur ou égal à 1.

Premier cas : $K = \mathbb{C}$.

Q admet au moins un zéros α dans $\mathbb{C}$ car Q est de degré supérieur ou égale à un.

α est un zéro de P et P_{k+1} car Q divise P et P_{k+1}.

Comme $P = P_1 P_2 \cdots P_k$ et P_{k+1}, il existe un élément ℓ de $[\![1, k]\!]$ tel que $P_\ell(\alpha) = 0$.

Donc $P_\ell(\alpha) = 0$ et $P_{k+1}(\alpha) = 0$. Alors $X - \alpha$ est un élément de $\mathbb{C}[X]$ de degré 1 qui divise P_ℓ et P_{k+1}. Ceci contredit le fait que P_ℓ et P_{k+1} sont étrangers.

Deuxième cas $K = \mathbb{R}$.

Q admet au moins un zéros α dans $\mathbb{C}$ car Q est de degré supérieur ou égale à un.

α est un zéro de P et P_{k+1} car Q divise P et P_{k+1}.

Comme $P = P_1 P_2 \cdots P_k$ et P_{k+1}, ici encore il existe un élément ℓ de $[\![1, k]\!]$ tel que $P_\ell(\alpha) = P_{k+1}(\alpha) = 0$.

Envisageons encore deux cas.

Premier cas : $\alpha \in \mathbb{R}$.

Alors $X - \alpha$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$ qui divise P_ℓ et P_{k+1}. Ceci contredit le fait que P_ℓ et P_{k+1} sont étrangers.

Deuxième cas : $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

Comme P_ℓ et P_{k+1} sont dans $\mathbb{R}[X]$, on a encore $P_\ell(\overline{\alpha}) = P_{k+1}(\overline{\alpha}) = 0$.

Ainsi α et $\overline{\alpha}$ sont deux zéros distincts de P_ℓ et P_{k+1}. Alors $(X - \alpha)(X - \overline{\alpha}) = X^2 - 2\,\Re e(\alpha)\,X + |\alpha|^2$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$ de degré 2 qui divise P_ℓ et P_{k+1}. Ceci contredit encore le fait que P_ℓ et P_{k+1} sont étrangers.

Finalement si Q divise P et P_{k+1}, Q est constant et non nul.

Ceci achève de prouver que $P = P_1 P_2 \cdots P_k$ et P_{k+1} sont étrangers.

La question 2 permet alors de dire que : $\mathrm{Ker}(P P_{k+1})(f) = \mathrm{Ker}\, P(f) \oplus \mathrm{Ker}\, P_{k+1}(f)$.

L'hypothèse de récurrence donne alors : $\mathrm{Ker}(P_1 P_2 \cdots P_{k+1})(f) = \Big(\mathrm{Ker}\, P_1(f) \oplus \mathrm{Ker}\, P_2(f) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}\, P_k(f)\Big) \oplus P_{k+1}(f)$.

Ainsi $\mathrm{Ker}(P_1 P_2 \cdots P_{k+1})(f) = \mathrm{Ker}\, P_1(f) \oplus \mathrm{Ker}\, P_2(f) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}\, P_{k+1}(f)$ et la récurrence s'achève.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(P_1 P_2 \cdots P_r)(f) = \mathrm{Ker}\, P_1(f) \oplus \mathrm{Ker}\, P_2(f) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}\, P_r(f).}$$

b) Soit i et j deux éléments distincts de $[\![1, r]\!]$. Montrons que $X - \lambda_i$ et $X - \lambda_j$ sont étrangers.

Supposons que Q soit un élément de $\mathbb{K}[X]$ qui divise $X - \lambda_i$ et $X - \lambda_j$. Montrons que Q est constant et non nul.

Comme $X - \lambda_i$ et $X - \lambda_j$ sont non nuls et de degré 1, Q n'est pas nul et de degré au plus un.

Supposons que Q est de degré un. Alors Q admet une racine α. Comme Q divise $X - \lambda_i$ et $X - \lambda_j$, α est une racine de $X - \lambda_i$ et $X - \lambda_j$. Alors $\lambda_i = \alpha = \lambda_j$ ce qui contredit le fait que λ_i et λ_j sont distincts.

Alors Q est un polynôme constant non nul. Ce qui achève de montrer que $X - \lambda_i$ et $X - \lambda_j$ sont étrangers.

Ainsi $X - \lambda_1$, $X - \lambda_2$, ..., $X - \lambda_r$ sont r éléments non nuls de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux étrangers. a) montre alors que :

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,\big((X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_r)\big)(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, Id_E) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_r\, Id_E).}$$

Q3 • Supposons que P soit un polynôme annulateur de f scindé à racines simples.

Il existe un élément c de $\mathbb{K}^*$ et r éléments distincts de $\mathbb{K}$, λ_1, λ_2, ..., λ_r tels que $P = c\displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)$.

Posons $\widehat{P} = \displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)$. $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $c \neq 0$ donc $\widehat{P}(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors $\operatorname{Ker}\widehat{P}(f) = E$.

Si $r = 1$, $\operatorname{Ker}(f_1 - \lambda_1 \operatorname{Id}_E) = E$ donc $f = \lambda_1 \operatorname{Id}_E$ et f est diagonalisable. Supposons maintenant $r \geqslant 2$

$\operatorname{Ker}\big((X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_r)\big)(f) = \operatorname{Ker}(f-\lambda_1\, Id_E) \oplus \operatorname{Ker}(f-\lambda_2\, Id_E) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(f-\lambda_r\, Id_E)$ d'après Q2 b).

Alors $E = \operatorname{Ker}\widehat{P}(f) = \operatorname{Ker}(f-\lambda_1\, Id_E) \oplus \operatorname{Ker}(f-\lambda_2\, Id_E) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(f-\lambda_r\, Id_E)$.

$\operatorname{Sp} f \subset \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\}$ car $\displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)$ est un polynôme annulateur de f dont les zźros sont λ_1, λ_2, ..., λ_r.

Posons $I = \{i \in [\![1, r]\!] \mid \operatorname{Ker}(f-\lambda_i\, Id_E) \neq \{0_E\}\}$.

Soit i un élément de $[\![1, r]\!]$. Si i est un élément de I, λ_i est valeur propre de f car $(f-\lambda_i\, Id_E) \neq \{0_E\}$; dans le cas contraire λ_i n'est pas valeur propre de f car $(f-\lambda_i\, Id_E) = \{0_E\}$!

On peut alors dire que $\operatorname{Sp} f = \{\lambda_i ; i \in I\}$. De plus $E = \displaystyle\bigoplus_{i\in[\![1,r]\!]} \operatorname{Ker}(f-\lambda_i\, Id_E) = \bigoplus_{i\in I}\operatorname{Ker}(f-\lambda_i\, Id_E)$.

E est donc somme directe des sous-espace propres de f donc f est diagonalisable.

• Réciproquement supposons que f est diagonalisable. Soient γ_1, γ_2, ..., γ_s les valeurs propres distinctes de f.

Posons $U = (X-\gamma_1)(X-\gamma_2)\cdots(X-\gamma_s)$. U est un polynôme scindé à racines simples. Montrons que c'est un polynôme annulateur de f.

f est diagonalisable donc il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n.

$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} = \operatorname{Sp} f = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s\}$ donc $U(\alpha_1) = U(\alpha_2) = \cdots = U(\alpha_n) = 0$ car $U(\gamma_1) = U(\gamma_2) = \cdots = U(\gamma_s) = 0$.

Soit Δ la matrice f dans $\mathcal{B}$. $\Delta = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & \alpha_n \end{pmatrix}$. Donc $U(\Delta) = \begin{pmatrix} U(\alpha_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & U(\alpha_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & U(\alpha_n) \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Or $U(\Delta)$ est la matrice de $U(f)$ dans la base $\mathcal{B}$ donc $U(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

U est alors un polynôme annulateur scindé à racines simples de f. Finalement :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable si et seulement si } f \text{ possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.}}$$

Exercice 8 **N1** **Espace vectoriel des polynômes d'une matrice carrée A diagonalisable.**

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. λ_1, λ_2, ..., λ_p sont les valeurs propres distinctes de A.

On suppose que A est diagonalisable. Ainsi il existe un matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

Q1. Montrer que si S est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ alors $S(A) = PS(D)P^{-1}$.

Q2. On pose $T = \displaystyle\prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)$.

a) Montrer que $T(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

b) Montrer que $\mathcal{S} = \{S \in \mathbb{K}[X] \mid S(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\}$ est l'ensemble des multiples de T.

Q3. $\mathcal{F} = \{S(A)\,;\, S \in \mathbb{K}[X]\}$.

a) Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et qu'il est engendré par $(I_n, A, A^2, \ldots, A^{p-1})$.

b) Montrer que $\mathcal{F}$ est de dimension p.

▲ *Ceci vaut aussi pour un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$.*

Q1 Soit S un élément de $\mathbb{K}[X]$. Il existe r dans $\mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ dans $\mathbb{K}^{r+1}$ tel que $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, X^k$.

Notons que $A = PDP^{-1}$ et que $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$ (récurrence simple).

Alors $S(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, A^k = \sum_{k=0}^{r} a_k\,(PDP^{-1})^k = \sum_{k=0}^{r} a_k\, PD^kP^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{r} a_k\, D^k\right)P^{-1}$. Alors :

$$\boxed{\forall S \in \mathbb{K}[X],\ S(A) = PS(D)P^{-1}.}$$

Q2 a) $T(A) = PT(D)P^{-1}$. D est diagonale. Posons $D = \mathrm{Diag}\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Alors $T(D)$ est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}\big(T(\alpha_1), T(\alpha_2), \ldots, T(\alpha_n)\big)$.

A et D sont semblables donc ont même spectre. Alors $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$.

Par conséquent α_1, α_2, ..., α_n sont des zéros de T (et même les zéros de T).

Donc $T(D) = \mathrm{Diag}\big(T(\alpha_1), T(\alpha_2), \ldots, T(\alpha_n)\big) = \mathrm{Diag}\big(0, 0, \ldots, 0\big) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Par conséquent $T(A) = PT(D)P^{-1} = P0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}P^{-1} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

$$\boxed{T(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}.}$$

b) Soit S un élément de $\mathbb{K}[X]$.

$S(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \Longleftrightarrow PS(D)P^{-1} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \Longleftrightarrow P^{-1}PS(D)P^{-1}P = P^{-1}\,0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}P \Longleftrightarrow S(D) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

A noter que la seconde équivalence est vraie car P est inversible...

$S(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \Longleftrightarrow \mathrm{Diag}\big(S(\alpha_1), S(\alpha_2), \ldots, S(\alpha_n)\big) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \Longleftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ S(\alpha_k) = 0$.

Rappelons que $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$ et que λ_1, λ_2, ..., λ_p sont deux à deux distincts. Alors :

$S(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \Longleftrightarrow \forall k \in [\![1, p]\!],\ S(\lambda_k) = 0 \Longleftrightarrow (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)\cdots(X - \lambda_p)$ divise $S \Longleftrightarrow T$ divise S. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{S \in \mathbb{K}[X] \mid S(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\} \text{ est l'ensemble des multiples de } T.}$$

Q3 $\mathcal{F} = \{S(A)\,;\, S \in \mathbb{K}[X]\}$ contient $\mathcal{F}' = \{S(A); S \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$.

Réciproquement soit $S(A)$ un élément de $\mathcal{F}$ (S est dans $\mathbb{K}[X]$).

La division euclidienne de S par T conduit à $S = QT + R$ avec Q dans $\mathbb{K}[X]$, R dans $\mathbb{K}[X]$ et $\deg R < \deg T = p$.

Ainsi $R \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$. De plus $S(A) = Q(A)T(A) + R(A) = R(A)$ car $T(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Alors $S(A) = R(A)$ avec R dans $\mathbb{K}_{p-1}[X]$ donc $S(A)$ est un élément de $\mathcal{F}'$.

Finalement $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$. $\mathcal{F} = \{S(A)\,;\, S \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\} = \left\{\sum_{k=0}^{p-1} a_k\, A^k; (a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p\right\} = \mathrm{Vect}(I_n, A, A^2, \ldots, A^{p-1})$.

$$\boxed{\mathcal{F} = \{S(A)\,;\, S \in \mathbb{K}[X]\} \text{ est le sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ engendré par } (I_n, A, A^2, \ldots, A^{p-1}).}$$

b) $(I_n, A, A^2, \ldots, A^{p-1})$ est une famille génératrice de $\mathcal{F}$ de cardinal p. Pour montrer que $\mathcal{F}$ est de dimension p il suffit de prouver que cette famille est libre.

Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1})$ un élément de $\mathbb{K}^p$ tel que $\sum_{k=0}^{p-1} a_k\, A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Posons $U = \sum_{k=0}^{p-1} a_k\, X^k$.

$U(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ donc T divise U. Or U est de degré au plus $p-1$ et T est de degré p donc U est nul.

Alors ses coefficients sont nuls. Par conséquent $a_0 = a_1 = \cdots = a_{p-1} = 0$.

Ceci achève de prouver que $(I_n, A, A^2, \ldots, A^{p-1})$ est une famille libre. C'est donc une base de $\mathcal{F}$.

$$\boxed{\mathcal{F} = \{S(A)\,;\, S \in \mathbb{K}[X]\} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ de dimension } p.}$$

Exercice 9 **N1$^+$** **Disques de Gerschgorin.**

À savoir faire par cœur.

$n \in [\![2, +\infty[\![$. $A = (a_{ij})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour tout i élément de $[\![1, n]\!]$, on pose : $r_i = \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$ et $D_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leqslant r_i\}$.

Montrer que $\mathrm{Sp}\, A \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} D_i$ (partir de $AX = \lambda X$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ non nul et considérer $|x_\ell| = \displaystyle\operatorname*{Max}_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$).

Thème abordé dans oral ESCP 1999 2-7, ESSEC 2009

Soit λ une valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

Soit ℓ un éléments de $[\![1, n]\!]$ tel que $|x_\ell| = \displaystyle\operatorname*{Max}_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$.

La $\ell^{\text{ème}}$ ligne de l'égalité $AX = \lambda\, X$ donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{\ell,k}\, x_k = \lambda\, x_\ell$. Alors $(\lambda - a_{\ell,\ell})\, x_\ell = \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{n} a_{\ell,k}\, x_k$. Ainsi :

$|\lambda - a_{\ell,\ell}|\, |x_\ell| = |(\lambda - a_{\ell,\ell})\, x_\ell| = \left| \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{n} a_{\ell,k}\, x_k \right| \leqslant \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{n} |a_{\ell,k}\, x_k| = \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{n} |a_{\ell,k}|\, |x_k|$.

Or $\forall k \in [\![1, n]\!],\ |x_k| \leqslant |x_\ell|$ et $|a_{\ell,k}| \geqslant 0$. Donc $\forall k \in [\![1, n]\!],\ |a_{\ell,k}|\, |x_k| \leqslant |a_{\ell,k}|\, |x_\ell|$. Alors :

$|\lambda - a_{\ell,\ell}|\, |x_\ell| \leqslant \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{n} |a_{\ell,k}|\, |x_k| \leqslant \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{n} |a_{\ell,k}|\, |x_\ell| = |x_\ell| \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{n} |a_{\ell,k}| = |x_\ell|\, r_\ell$. Donc $|\lambda - a_{\ell,\ell}|\, |x_\ell| \leqslant |x_\ell|\, r_\ell$.

Supposons que $|x_\ell| = 0$. Alors $\displaystyle\operatorname*{Max}_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| = 0$. Donc $\forall k \in [\![1, n]\!],\ |x_k| = 0$ ou $\forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k = 0$.

Ainsi $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$, ce qui contredit le fait que X est un vecteur propre de A. Donc $|x_\ell| \neq 0$

Alors $|x_\ell| > 0$ et $|\lambda - a_{\ell,\ell}|\, |x_\ell| \leqslant |x_\ell|\, r_\ell$. En divisant par $|x_\ell|$ il vient donc $|\lambda - a_{\ell,\ell}| \leqslant r_\ell$.

Par conséquent λ appartient à D_ℓ donc à $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

Ceci étant vrai pour toute valeur propre λ de A, on peut affirmer que :

$$\boxed{\mathrm{Sp}\, A \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i.}$$

Exercice 10 **N2** **Ovales de Cassini**.

$n \in [\![2, +\infty[\![$. $A = (a_{ij})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour tout i élément de $[\![1, n]\!]$, on pose : $r_i = \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$.

Pour tout (i, j) élément de $[\![1, n]\!]^2$ on pose : $C_{ij} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}|\,|z - a_{jj}| \leqslant r_i\, r_j\}$.

Montrer que $\operatorname{Sp} A \subset \displaystyle\bigcup_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i\neq j}} C_{ij}$.

Soit λ une valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

Soit ℓ un éléments de $[\![1, n]\!]$ tel que $|x_\ell| = \displaystyle\operatorname*{Max}_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$.

Soit ℓ' un éléments de $[\![1, n]\!]$ tel que $|x_{\ell'}| = \displaystyle\operatorname*{Max}_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ k\neq \ell}} |x_k|$.

La $\ell^{\text{ème}}$ ligne de l'égalité $AX = \lambda\, X$ donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{\ell,k}\, x_k = \lambda\, x_\ell$. Alors $(\lambda - a_{\ell,\ell})\, x_\ell = \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq \ell}}^{n} a_{\ell,k}\, x_k$. Ainsi :

$|\lambda - a_{\ell,\ell}|\,|x_\ell| = |(\lambda - a_{\ell,\ell})\, x_\ell| = \Big|\displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq \ell}}^{n} a_{\ell,k}\, x_k\Big| \leqslant \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq \ell}}^{n} |a_{\ell,k}\, x_k| = \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq \ell}}^{n} |a_{\ell,k}|\,|x_k|$.

Or $\forall k \in [\![1, n]\!] - \{\ell\}$, $|x_k| \leqslant |x_{\ell'}|$ et $|a_{\ell,k}| \geqslant 0$. Donc $\forall k \in [\![1, n]\!] - \{\ell\}$, $|a_{\ell,k}|\,|x_k| \leqslant |a_{\ell,k}|\,|x_{\ell'}|$. Alors :

$|\lambda - a_{\ell,\ell}|\,|x_\ell| \leqslant \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq \ell}}^{n} |a_{\ell,k}|\,|x_k| \leqslant \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq \ell}}^{n} |a_{\ell,k}|\,|x_{\ell'}| = |x_{\ell'}| \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq \ell}}^{n} |a_{\ell,k}| = |x_{\ell'}|\, r_\ell$. Donc $|\lambda - a_{\ell,\ell}|\,|x_\ell| \leqslant |x_{\ell'}|\, r_\ell$.

La $\ell'^{\text{ème}}$ ligne de l'égalité $AX = \lambda\, X$ donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{\ell',k}\, x_k = \lambda\, x_{\ell'}$. Alors $(\lambda - a_{\ell',\ell'})\, x_{\ell'} = \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq \ell'}}^{n} a_{\ell',k}\, x_k$. Ainsi :

$|\lambda - a_{\ell',\ell'}|\,|x_{\ell'}| = |(\lambda - a_{\ell',\ell'})\, x_{\ell'}| = \Big|\displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq \ell'}}^{n} a_{\ell',k}\, x_k\Big| \leqslant \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq \ell'}}^{n} |a_{\ell',k}\, x_k| = \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq \ell'}}^{n} |a_{\ell',k}|\,|x_k|$.

Or $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $|x_k| \leqslant |x_\ell|$ et $|a_{\ell',k}| \geqslant 0$. Donc $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $|a_{\ell',k}|\,|x_k| \leqslant |a_{\ell',k}|\,|x_\ell|$. Alors :

$|\lambda - a_{\ell',\ell'}|\,|x_{\ell'}| \leqslant \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq \ell'}}^{n} |a_{\ell',k}|\,|x_k| \leqslant \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq \ell'}}^{n} |a_{\ell',k}|\,|x_\ell| = |x_\ell| \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq \ell'}}^{n} |a_{\ell',k}| = |x_\ell|\, r_{\ell'}$. Donc $|\lambda - a_{\ell',\ell'}|\,|x_{\ell'}| \leqslant |x_\ell|\, r_{\ell'}$.

Alors $0 \leqslant |\lambda - a_{\ell,\ell}|\,|x_\ell| \leqslant |x_{\ell'}|\, r_\ell$ et $0 \leqslant |\lambda - a_{\ell',\ell'}|\,|x_{\ell'}| \leqslant |x_\ell|\, r_{\ell'}$.

Par produit $|\lambda - a_{\ell,\ell}|\,|\lambda - a_{\ell',\ell'}|\,|x_\ell|\,|x_{\ell'}| \leqslant |x_\ell|\,|x_{\ell'}|\, r_\ell\, r_{\ell'}$.

Supposons que $|x_\ell| = 0$. Alors $\displaystyle\operatorname*{Max}_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k| = 0$. Donc $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $|x_k| = 0$ ou $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $x_k = 0$.

Ainsi $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$, ce qui contredit le fait que X est un vecteur propre de A. Donc $|x_\ell| \neq 0$

Alors $|x_\ell| > 0$ et $|\lambda - a_{\ell,\ell}|\,|\lambda - a_{\ell',\ell'}|\,|x_\ell|\,|x_{\ell'}| \leqslant |x_\ell|\,|x_{\ell'}|\, r_\ell\, r_{\ell'}$.

En divisant par $|x_\ell|$ il vient $|\lambda - a_{\ell,\ell}|\,|\lambda - a_{\ell',\ell'}|\,|x_{\ell'}| \leqslant |x_{\ell'}|\, r_\ell\, r_{\ell'}$.

Premier cas : $x_{\ell'} \neq 0$.

Alors $|x_{\ell'}| > 0$ et $|\lambda - a_{\ell,\ell}|\, |\lambda - a_{\ell',\ell'}|\, |x_{\ell'}| \leqslant |x_{\ell'}|\, r_\ell\, r_{\ell'}$.

En divisant par $|x_{\ell'}|$ il vient $|\lambda - a_{\ell,\ell}|\, |\lambda - a_{\ell',\ell'}| \leqslant r_\ell\, r_{\ell'}$. Donc $\lambda \in C_{\ell,\ell'}$.

Deuxième cas : $x_{\ell'} = 0$.

Alors $0 \leqslant |\lambda - a_{\ell,\ell}|\, |x_\ell| \leqslant |x_{\ell'}|\, r_\ell = 0$. Ainsi $|\lambda - a_{\ell,\ell}|\, |x_\ell| = 0$. Mais $|x_\ell|$ n'est pas nul donc $|\lambda - a_{\ell,\ell}|$ est nul.

Alors $|\lambda - a_{\ell,\ell}|\, |\lambda - a_{\ell',\ell'}| = 0 \leqslant r_\ell\, r_{\ell'}$. On a encore : $\lambda \in C_{\ell,\ell'}$.

Dans les deux cas $\lambda \in C_{\ell,\ell'}$ donc $\lambda \in \displaystyle\bigcup_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i\neq j}} C_{ij}$.

Ceci étant vrai pour toute valeur propre λ de A, on peut affirmer que :

$$\boxed{\operatorname{Sp} A \subset \bigcup_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i\neq j}} C_{ij}.}$$

Exercice 11 **N1** **Sur les valeurs propres d'une matrice stochastique niveau 1**.

À savoir faire par cœur.

Soit $A = (a_{k,\ell})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{k,\ell} \geqslant 0$ et $\forall k \in [\![1,n]\!], \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} = 1$.

A est une matrice **stochastique**.

Q1. Montrer que 1 est valeur propre de A.

Q2. Soit λ un élément de $\mathbb{C}$ valeur propre de A. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ

et soit k est un élément de $[\![1,n]\!]$ tel que $|x_k| = \text{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$. Notons que X est un éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

En considérant la $k^{\text{ème}}$ ligne de l'égalité $AX = \lambda\, X$ montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

Thème abordé dans oral ESCP 2002 2.1 et 2.16, 2010 2.6, 2011 2.18, LYON 2010 Pb1, HEC 1993 (qui traite de la limite de la suite des puissances d'une matrice stochastique ; on retrouve la seconde partie de ce problème dans oral ESCP 2010 2.9). On parle encore de matrice stochastique dans oral ESCP 2004 2.20, 2007 2.5, 2011 2.8 dans ESCP MI 1996 et elles sont très présentes dans les problèmes de probabilité.

Q1 Considérons l'élément $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et posons $Y_0 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = AX_0$.

$\forall k \in [\![1,n]\!],\ y_k = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} (a_{k,\ell} \times 1) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} = 1$. $Y_0 = X_0$.

Par conséquent X_0 n'est pas nulle et $AX_0 = X_0$. Finalement :

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre de } A}.$$

Q2 Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ et k un élément de $[\![1,n]\!]$ tel que

$|x_k| = \text{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$. $AX = \lambda X$. En particulier : $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell = \lambda\, x_k$.

$|\lambda|\, |x_k| = |\lambda\, x_k| = \left|\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell\right| \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}\, x_\ell| = \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}|\, |x_\ell| = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, |x_\ell|$.

Or $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ |x_\ell| \leqslant |x_k|$ et $a_{k,\ell} \geqslant 0$. Donc $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ a_{k,\ell}\, |x_\ell| \leqslant a_{k,\ell}\, |x_k|$. Alors

$|\lambda|\, |x_k| \leqslant \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, |x_\ell| \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, |x_k| = |x_k| \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} = |x_k| \times 1 = |x_k|$. Ainsi $|\lambda|\, |x_k| \leqslant |x_k|$.

Supposons que $|x_k| = 0$. Alors $\text{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|) = 0$. Donc $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ |x_\ell| = 0$ ou $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ x_\ell = 0$.

Par conséquent $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ ce qui contredit le fait que X est un vecteur propre de A.

Finalement $|x_k| \neq 0$. Alors $|\lambda|\,|x_k| \leqslant |x_k|$ et $|x_k| > 0$. En divisant par $|x_k|$ il vient : $|\lambda| \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est une valeur propre de } A \text{ dans } \mathbb{C},\ |\lambda| \leqslant 1}.$$

Exercice 12 **N2** **Sur les valeurs propres d'une matrice stochastique niveau 2**.

On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des éléments $A = (a_{k,\ell})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que :

$$\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{k,\ell} \geqslant 0 \text{ et } \forall k \in [\![1,n]\!], \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} = 1.$$

Les éléments de $\mathcal{S}$ sont des matrices **stochastiques**.

Q1. Montrer que $\mathcal{S}$ est stable pour le produit matriciel.

Q2. a) Montrer que 1 est valeur propre de A.

b) Soit λ un élément de $\mathbb{C}$ valeur propre de A. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ

et soit k est un élément de $[\![1,n]\!]$ tel que $|x_k| = \text{Max}(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$. Notons que X est un éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

En considérant la $k^{\text{ème}}$ ligne de l'égalité $AX = \lambda X$ montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

★ Dans Q3 et Q4 A un élément de $\mathcal{S}$ tel que : $\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{k,\ell} > 0$.

Soit λ une valeur propre de A de module 1. On se propose de montrer que $\lambda = 1$ et que $\dim \text{SEP}\ (A, \lambda) = 1$.

Q3 et Q4 donnent deux preuves de ce résultat.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. k est un élément de $[\![1,n]\!]$ tel que $|x_k| = \underset{1 \leqslant \ell \leqslant n}{\text{Max}} |x_\ell|$.

Ici encore $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Au choix Q3 ou Q4.

Q3. a) Montrer que $|x_k| = \left| \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell \right|$. en déduire qu'il existe un réel θ tel que : $\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} \left(\dfrac{x_\ell}{x_k}\, e^{-i\theta} - 1 \right) = 0$.

b) Montrer que : $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ x_\ell = e^{i\theta}\, x_k$ (prendre la partie réelle au niveau de l'égalité précédente et remarquer que $\frac{x_\ell}{x_k}\, e^{-i\theta}$ a une partie réelle inférieure ou égale à 1).

c) Conclure.

Q4. a) Soient r un éléments de $[\![2, +\infty[\![$ et z_1, z_2, ..., z_r r complexes.

Montrer que $|z_1 + z_2 + \cdots + z_r| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_r|$ si et seulement si il existe un réel θ et des réels positifs ou nuls ρ_1, ρ_2, ..., ρ_r tels que $\forall k \in [\![1,r]\!],\ z_k = \rho_k\, e^{i\theta}$.

b) Montrer que $|x_k| = \left| \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell \right| \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}\, x_\ell| = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, |x_\ell| \leqslant |x_k|$. Conséquence ?

c) Montrer que $|x_1| = |x_2| = \cdots = |x_n|$, puis que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

d) Conclure.

Remarque Si A est stochastique (et donc si on ne suppose plus que les coefficients de A sont strictement positifs), toute valeur propre de A de module 1 distincte de 1 est une racine $q^{\text{ème}}$ de l'unité avec $1 \leqslant q \leqslant n$. Voir l'exercice suivant.

Q5. On suppose ici que A appartient à $\mathcal{S}$ est que l'une des puissances de A à des coefficients strictement positifs.

Montrer que le résultat précédent vaut encore.

Thème abordé dans oral ESCP 2002 2.1. et 2.16, 2011 2.18.

Q1 Soient $A=(a_{k,\ell})$ et $B=(b_{k,\ell})$ deux éléments de $\mathcal{S}$. Posons $C=AB=(c_{k,\ell})$.

$\forall (k,\ell,r)\in [\![1,n]\!]^3,\ a_{k,r}\geqslant 0$ et $b_{r,\ell}\geqslant 0$ donc $\forall (k,\ell)\in[\![1,n]\!]^2,\ c_{k,\ell}=\displaystyle\sum_{r=1}^n a_{k,r}\,b_{r,\ell}\geqslant 0$.

De plus $\forall k\in[\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{\ell=1}^n c_{k,\ell}=\sum_{\ell=1}^n\sum_{r=1}^n a_{k,r}\,b_{r,\ell}=\sum_{r=1}^n\left(a_{k,r}\sum_{\ell=1}^n b_{r,\ell}\right)=\sum_{r=1}^n (a_{k,r}\times 1)=\sum_{r=1}^n a_{k,r}=1.$

Ceci achève de montrer que C appartient à $\mathcal{S}$. $AB\in\mathcal{S}$

$$\boxed{\text{Le produit de deux éléments de } \mathcal{S} \text{ est un élément de } \mathcal{S}.}$$

Q2 a) Considérons l'élément $X_0=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et posons $Y_0=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=AX_0$.

$\forall k\in[\![1,n]\!],\ y_k=\displaystyle\sum_{\ell=1}^n (a_{k,\ell}\times 1)=\sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell}=1$. $Y_0=X_0$.

Par conséquent X_0 n'est pas nulle et $AX_0=X_0$. Finalement :

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre de } A.}$$

b) Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ et k un élément de $[\![1,n]\!]$ tel que

$|x_k|=\mathrm{Max}(|x_1|,|x_2|,\dots,|x_n|)$. $AX=\lambda X$. La "$k^{\text{ème}}$ ligne de cette égalité" donne : $\displaystyle\sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell}\,x_\ell=\lambda\,x_k$.

$|\lambda|\,|x_k|=|\lambda\,x_k|=\left|\displaystyle\sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell}\,x_\ell\right|\leqslant\sum_{\ell=1}^n |a_{k,\ell}\,x_\ell|=\sum_{\ell=1}^n |a_{k,\ell}|\,|x_\ell|=\sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell}\,|x_\ell|.$

Or $\forall \ell\in[\![1,n]\!],\ |x_\ell|\leqslant|x_k|$ et $a_{k,\ell}\geqslant 0$. Donc $\forall\ell\in[\![1,n]\!],\ a_{k,\ell}\,|x_\ell|\leqslant a_{k,\ell}\,|x_k|$. Alors

$|\lambda|\,|x_k|\leqslant\displaystyle\sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell}\,|x_\ell|\leqslant\sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell}\,|x_k|=|x_k|\sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell}=|x_k|\times 1=|x_k|$. Ainsi $|\lambda|\,|x_k|\leqslant|x_k|$.

Supposons que $|x_k|=0$. Alors $\mathrm{Max}(|x_1|,|x_2|,\dots,|x_n|)=0$. Donc $\forall\ell\in[\![1,n]\!],\ |x_\ell|=0$ ou $\forall\ell\in[\![1,n]\!],\ x_\ell=0$.

Par conséquent $X=0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ ce qui contredit le fait que X est un vecteur propre de A.

Finalement $|x_k|\neq 0$. Alors $|\lambda|\,|x_k|\leqslant|x_k|$ et $|x_k|>0$. En divisant par $|x_k|$ il vient : $|\lambda|\leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est une valeur propre de } A \text{ dans } \mathbb{C},\ |\lambda|\leqslant 1.}$$

Q3 $AX=\lambda\,X$ donne en particulier $\lambda\,x_k=\sum\limits_{\ell=1}^n a_{k,\ell}\,x_\ell$. Rappelons que $\forall\ell\in[\![1,n]\!],\ |x_\ell|\leqslant|x_k|$ et $a_{k,\ell}\geqslant 0$.

Comme $|\lambda|=1$, $|x_k|=|\lambda|\,|x_k|=|\lambda\,x_k|=\left|\displaystyle\sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell}\,x_\ell\right|\leqslant\displaystyle\sum_{\ell=1}^n|a_{k,\ell}\,x_\ell|=\sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell}\,|x_\ell|\leqslant|x_k|\sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell}=|x_k|$.

Ce qui donne : $|x_k|=\left|\displaystyle\sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell}\,x_\ell\right|$. Alors $\left|\displaystyle\sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell}\,\frac{x_\ell}{x_k}\right|=1$ car x_k n'est pas nul (x_k=0 donne $X=0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ car $|x_k|=\displaystyle\operatorname*{Max}_{1\leqslant\ell\leqslant n}|x_\ell|$).

Le complexe $\displaystyle\sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell}\,\frac{x_\ell}{x_k}$ a donc pour module 1. $\exists\theta\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell}\,\frac{x_\ell}{x_k}=e^{i\theta}$.

$\displaystyle\sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell}\,\frac{x_\ell}{x_k}\,e^{-i\theta}=1=\sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell}$. Par conséquent : $\displaystyle\sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell}\,\left(\frac{x_\ell}{x_k}\,e^{-i\theta}-1\right)=0$.

En prenant la partie réelle on obtient : $\displaystyle\sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell}\,\left(\Re e\left(\frac{x_\ell}{x_k}\,e^{-i\theta}\right)-1\right)=0$ (les coefficients de A sont réels).

Pour tout ℓ dans $[\![1,n]\!]$, notons t_ℓ la partie réelle de $\dfrac{x_\ell}{x_k}\,e^{-i\theta}$. Alors $\displaystyle\sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell}\,(t_\ell-1)=0$.

Rappelons que la partie réelle d'un complexe est inférieure ou égale à son module ($x\leqslant|x|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$...).

$\forall\ell\in[\![1,n]\!]$, $\left|\dfrac{x_\ell}{x_k}\,e^{-i\theta}\right|=\dfrac{|x_\ell|}{|x_k|}\leqslant1$. Par conséquent $\forall\ell\in[\![1,n]\!]$, $t_\ell\leqslant1$ et $a_{k,\ell}>0$. Donc $\forall\ell\in[\![1,n]\!]$, $a_{k,\ell}\,(t_\ell-1)\leqslant0$.

Comme $\displaystyle\sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell}\,(t_k-1)=0$: $\forall\ell\in[\![1,n]\!]$, $a_{k,\ell}\,(t_\ell-1)=0$. Ainsi $\forall\ell\in[\![1,n]\!]$, $t_\ell-1=0$ car les coefficients de A sont strictement positifs. Par conséquent $\forall\ell\in[\![1,n]\!]$, $t_\ell=1$.

Fixons ℓ dans $[\![1,n]\!]$. $\dfrac{x_\ell}{x_k}\,e^{-i\theta}$ est un nombre complexe de module au plus 1 dont la partie réelle t_ℓ vaut 1. Nécessairement ce complexe vaut 1.

$\forall\ell\in[\![1,n]\!]$, $\dfrac{x_\ell}{x_k}\,e^{-i\theta}=1$. Alors $\forall\ell\in[\![1,n]\!]$, $x_\ell=e^{i\theta}\,x_k$ (en faisant $k=1$ on obtient $e^{i\theta}=1$...).

Donc $x_1=x_2=\cdots=x_n$. Alors X appartient à SEP $(A,1)$ et donc $\lambda=1$. Mieux nous avons montré que tout vecteur propre associé à la valeur propre λ donc à la valeur propre 1 est colinéaire à $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$. Ainsi SEP $(A,1)=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right)$.

Si λ est une valeur propre de A de module 1 : $\lambda=1$, $\dim\text{SEP }(A,\lambda)=1$ et SEP $(A,\lambda)=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right)$.

Q4 a) • Montrons d'abord que la condition est suffisante.

Soient r un éléments de $[\![2,+\infty[\![$ et z_1, z_2, ..., z_r r complexes.

Supposons qu'il existe un réel θ et des réels positifs ou nuls ρ_1, ρ_2, ..., ρ_r tels que $\forall k\in[\![1,r]\!]$, $z_k=\rho_k\,e^{i\theta}$ et montrons que $|z_1+z_2+\cdots+z_r|=|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_r|$.

$|z_1+z_2+\cdots+z_r|=\left|\displaystyle\sum_{k=1}^r\rho_k\,e^{i\theta}\right|=\left|\left(\sum_{k=1}^r\rho_k\right)e^{i\theta}\right|=\left|\sum_{k=1}^r\rho_k\right|\,\left|e^{i\theta}\right|=\left|\sum_{k=1}^r\rho_k\right|\times1=\left|\sum_{k=1}^r\rho_k\right|=\sum_{k=1}^r\rho_k$.

$\displaystyle\sum_{k=1}^r|z_k|=\sum_{k=1}^r\left|\rho_k\,e^{i\theta}\right|=\sum_{k=1}^r|\rho_k|\,\left|e^{i\theta}\right|=\sum_{k=1}^r|\rho_k|\times1=\sum_{k=1}^r|\rho_k|=\sum_{k=1}^r\rho_k$.

Ainsi $|z_1+z_2+\cdots+z_r|=|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_r|$.

• Montrons par récurrence sur r que la condition est nécessaire.

⋆ Montrons que la propriété est vraie pour $r=2$.

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$.

On peut trouver deux réels θ_1 et θ_2, et deux réels positifs ou nuls ρ_1 et ρ_2 tels que $z_1=\rho_1\,e^{i\theta_1}$ et $z_2=\rho_2\,e^{i\theta_2}$ non ? ?

Alors $\left|\rho_1\,e^{i\theta_1}+\rho_2\,e^{i\theta_2}\right|=|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|=\rho_1+\rho_2$.

$\left|\rho_1\,e^{i\theta_1}+\rho_2\,e^{i\theta_2}\right|^2=\left(\rho_1\,e^{i\theta_1}+\rho_2\,e^{i\theta_2}\right)\left(\overline{\rho_1\,e^{i\theta_1}+\rho_2\,e^{i\theta_2}}\right)=\left(\rho_1\,e^{i\theta_1}+\rho_2\,e^{i\theta_2}\right)\left(\rho_1\,e^{-i\theta_1}+\rho_2\,e^{-i\theta_2}\right)$.

$\left|\rho_1\,e^{i\theta_1}+\rho_2\,e^{i\theta_2}\right|^2=\rho_1^2+\rho_1\,\rho_2\,e^{i(\theta_1-\theta_2)}+\rho_2\,\rho_1\,e^{i(\theta_2-\theta_1)}+\rho_2^2=\rho_1^2+\left(e^{i(\theta_1-\theta_2)}+e^{-i(\theta_1-\theta_2)}\right)\rho_1\,\rho_2+\rho_2^2$.

$\left|\rho_1\,e^{i\theta_1}+\rho_2\,e^{i\theta_2}\right|^2=\rho_1^2+2\,\rho_1\,\rho_2\,\cos(\theta_1-\theta_2)+\rho_2^2$.

De plus $(\rho_1+\rho_2)^2=\rho_1^2+2\,\rho_1\,\rho_2+\rho_2^2$.

Alors $\rho_1^2+2\,\rho_1\,\rho_2\,\cos(\theta_1-\theta_2)+\rho_2^2=\left|\rho_1\,e^{i\theta_1}+\rho_2\,e^{i\theta_2}\right|^2=(\rho_1+\rho_2)^2=\rho_1^2+2\,\rho_1\,\rho_2+\rho_2^2$.

Donc $2\,\rho_1\,\rho_2\,\cos(\theta_1-\theta_2)=2\,\rho_1\,\rho_2$. Ou $\rho_1\,\rho_2\,\cos(\theta_1-\theta_2)=\rho_1\,\rho_2$.

Premier cas $\rho_1=0$.

Alors $z_1=0=0\times e^{i\theta_2}=\rho_1\,e^{i\theta_2}$ et $z_2=\rho_2\,e^{i\theta_2}$. Le résultats est montré car $\theta_2\in\mathbb{R}$, $\rho_1\in\mathbb{R}^+$ et $\rho_2\in\mathbb{R}^+$.

Deuxième cas $\rho_2=0$.

Alors $z_2=0=0\times e^{i\theta_1}=\rho_2\,e^{i\theta_1}$ et $z_1=\rho_1\,e^{i\theta_1}$. Le résultats est montré car $\theta_1\in\mathbb{R}$, $\rho_1\in\mathbb{R}^+$ et $\rho_2\in\mathbb{R}^+$.

Troisième cas $\rho_1\neq 0$ *et* $\rho_2\neq 0$.

Alors $\rho_1\,\rho_2\neq 0$. Comme $\rho_1\,\rho_2\,\cos(\theta_1-\theta_2)=\rho_1\,\rho_2$ on obtient en divisant par $\rho_1\,\rho_2 : \cos(\theta_1-\theta_2)=1$.

Donc il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $\theta_1-\theta_2=k\,2\pi$. Alors $\theta_1=\theta_2+k\,2\pi$ donc $e^{i\theta_1}=e^{i\theta_2}$.

Ainsi $z_1=\rho_1\,e^{i\theta_1}$ et $z_2=\rho_2\,e^{i\theta_1}$. Le résultats est montré car $\theta_1\in\mathbb{R}$, $\rho_1\in\mathbb{R}^+$ et $\rho_2\in\mathbb{R}^+$.

Ceci achève de montrer la propriété pour $r=2$.

⋆ Supposons que la propriété est vraie pour un élément r de $[\![2,+\infty[\![$ et montrons la pour $r+1$.

Soient z_1, z_2, ..., z_{r+1} $r+1$ complexes tels que $|z_1+z_2+\cdots+z_{r+1}|=|z_1|+z_2|+\cdots+|z_{r+1}|$. Posons $s=z_1+z_2+\cdots+z_r$.

Alors $|z_1+z_2+\cdots+z_r+z_{r+1}|=|s+z_{r+1}|\leqslant|s|+|z_{r+1}|=|z_1+z_2+\cdots+z_r|+|z_{r+1}|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_r|+|z_{r+1}|$.

Or $|z_1+z_2+\cdots+z_{r+1}|=|z_1+z_2+\cdots+z_r+z_{r+1}|$. Alors toutes les inégalités précédentes sont des égalités.

Ce qui permet d'écrire que $|s+z_{r+1}|=|s|+|z_{r+1}|$ et $|s|+|z_{r+1}|=|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_r|+|z_{r+1}|$.

Donc $|s+z_{r+1}|=|s|+|z_{r+1}|$ et $|z_1+z_2+\cdots+z_n|=|s|=|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_r|$.

La première égalité donne l'existence d'un réel θ' et de deux réels positifs ou nuls ρ et ρ' tels que $s=\rho\,e^{i\theta'}$ et $z_{n+1}=\rho'\,e^{i\theta'}$ car la propriété est vraie pour 2.

L'hypothèse de récurrence et la seconde égalité montrent qu'il existe un réel θ et des réels positifs ou nuls

ρ_1, ρ_2, ..., ρ_r tels que $\forall k\in[\![1,r]\!],\ z_k=\rho_k\,e^{i\theta}$.

$\rho\,e^{i\theta'}=s=z_1+z_2+\cdots+z_r=(\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_r)\,e^{i\theta}$.

Alors $\rho=|\rho|=|\rho|\,|e^{i\theta}|=|\rho\,e^{i\theta}|=|(\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_r)\,e^{i\theta}|=|\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_r|\,|\,e^{i\theta}|=|\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_r|$.

Finalement $\rho=\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_r$ car $\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_r\geqslant 0$

Alors $\rho\, e^{i\theta'} = s = z_1 + z_2 + \cdots + z_r = (\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_r)\, e^{i\theta} = \rho\, e^{i\theta}$. Donc $\rho\, e^{i\theta'} = \rho\, e^{i\theta}$.

Premier cas $\rho \neq 0$.

Alors $e^{i\theta'} = e^{i\theta}$. Donc $z_{r+1} = \rho'\, e^{i\theta'} = \rho'\, e^{i\theta}$. Posons $\rho_{r+1} = \rho'$.

Alors $\theta \in \mathbb{R}$, $\forall k \in [\![1, r+1]\!],\ \rho_k \in \mathbb{R}^+$ et $\forall k \in [\![1, r+1]\!],\ z_k = \rho_k\, e^{i\theta}$. La récurence s'achève !

Deuxième cas $\rho = 0$.

Alors $\rho_1 + \rho_2 + \cdots \rho_r = 0$. Comme ρ_1, ρ_2, ..., ρ_r sont des réels positifs ou nuls : $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_r = 0$.

Donc $\forall k \in [\![1, r]\!],\ z_k = \rho_k\, e^{i\theta} = 0 = 0 \times e^{i\theta'} = \rho_k\, e^{i\theta'}$. Posons $\rho_{r+1} = \rho'$. Alors $z_{r+1} = \rho'\, e^{i\theta'} = \rho_{r+1}\, e^{i\theta'}$.

Ainsi $\theta' \in \mathbb{R}$, $\forall k \in [\![1, r+1]\!],\ \rho_k \in \mathbb{R}^+$ et $\forall k \in [\![1, r+1]\!],\ z_k = \rho_k\, e^{i\theta'}$. La récurence s'achève non ?

b) $AX = \lambda\, X$ donne en particulier $\lambda\, x_k = \sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell$. Rappelons que $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ |x_\ell| \leqslant |x_k|$ et $a_{k,\ell} \geqslant 0$.

Comme $|\lambda| = 1$, $|x_k| = |\lambda|\, |x_k| = |\lambda\, x_k| = \left|\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell\right| \leqslant \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}\, x_\ell| = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, |x_\ell| \leqslant |x_k| \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} = |x_k|$.

Ce qui précède donne alors : $|x_k| = \left|\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell\right| = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}\, x_\ell| = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, |x_\ell|$.

c) Supposons qu'il existe un élément ℓ_0 tel que $|x_{\ell_0}| < |x_k|$. Alors $a_{k\ell_0}\, |x_\ell| < a_{k\ell_0}\, |x_k|$ car $a_{k\ell_0} > 0$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, |x_\ell| < \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, |x_k| = |x_k|$ ce qui n'est pas. Par conséquent $|x_1| = |x_2| = \cdots = |x_n|$.

Dans la suite nous poserons $\rho = |x_1| = |x_2| = \cdots = |x_n|$.

Rappelons que $\left|\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell\right| \leqslant \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}\, x_\ell|$. Alors a) permet alors de dire qu'il existe un réel θ et des réels positifs ou nuls ρ_1, ρ_2, ..., ρ_n tels que $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ a_{k,\ell}\, x_\ell = \rho_\ell\, e^{i\theta}$. Donc $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ x_\ell = \dfrac{\rho_\ell}{a_{k,\ell}}\, e^{i\theta}$.

Comme $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ \dfrac{\rho_\ell}{a_{k,\ell}} \geqslant 0$, $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ |x_\ell| = \dfrac{\rho_\ell}{a_{k,\ell}}\cdot$ Or $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ |x_\ell| = \rho$. Donc $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ \dfrac{\rho_\ell}{a_{k,\ell}} = \rho$.

Par conséquent $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ x_\ell = \dfrac{\rho_\ell}{a_{k,\ell}}\, e^{i\theta} = \rho\, e^{i\theta}$. Finalement $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

d) Ce qui précède prouve alors que SEP $(A, \lambda) \subset$ Vect $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Donc $\dim$ SEP $(A, \lambda) \leqslant \dim$ Vect $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1$.

SEP (A, λ) étant un sous espace vectoriel de dimension au moins 1 nécessairement $\dim$ SEP $(A, \lambda) = 1$.

Donc SEP $(A, \lambda) \subset$ Vect $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\dim$ SEP $(A, \lambda) = \dim$ Vect $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Alors SEP $(A, \lambda) =$ Vect $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Or $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Par conséquent $\lambda = 1$.

Si λ est une valeur propre de A de module $1 : \lambda = 1$, $\dim$ SEP $(A, \lambda) = 1$ et SEP $(A, \lambda) =$ Vect $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$\boxed{\textbf{Q5}}$ Ici A appartient à $\mathcal{S}$ et l'une des ses puissances à des coefficients strictement positifs.

Donc il existe s dans $\mathbb{N}$ tel que les coefficients de A^s soient strictement positifs.

Nécessairement s appartient $\mathbb{N}^*$ car $A^0 = I_n$ et les coefficients de I_n ne sont pas tous strictement positifs.

Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^k \in \mathcal{S}$.

C'est clair pour $k = 1$ car A est un élément de $\mathcal{S}$.

Supposons que pour un k dans $\mathbb{N}^*$, A^k appartienne à $\mathcal{S}$. Alors A et A^k sont deux éléments de $\mathcal{S}$. Q1 permet d'affirmer que leur produit appartient à $\mathcal{S}$. Alors A^{k+1} appartient à $\mathcal{S}$. Ce qui achève la récurrence.

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^k \in \mathcal{S}$ donc A^r est un éléments de $\mathcal{S}$ dont tous les coefficients sont strictement positifs. Nous pouvons donc lui appliquer le résultats de Q3 (et Q4...).

Soit λ une valeur propre de A de module un. Il existe un éléments non nul X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \lambda\, X$.

Alors $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ et $A^r X = \lambda^r\, X$. De plus $|\lambda^r| = |\lambda|^r = 1$. λ est donc une valeur propre de λ^r de module 1.

Q3 donne alors $\lambda^r = 1$ et $\dim \mathrm{SEP}\ (A^r, \lambda^r) = 1$.

Mieux $\mathrm{SEP}\ (A^r, \lambda^r) = \mathrm{SEP}\ (A^r, 1)$, est la droite vectorielle engendrée par l'élément X_0 de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Si X est dans $\mathrm{SEP}\ (A, \lambda)$, $AX = \lambda\, X$ donc $A^r X = \lambda^r\, X = X$ et ainsi X appartient à $\mathrm{SEP}\ (A^r, 1)$.

Donc $\mathrm{SEP}\ (A, \lambda) \subset \mathrm{SEP}\ (A^r, 1)$. Alors $\dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) \leqslant \dim \mathrm{SEP}\ (A^r, 1) = 1$.

Mais $\dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) \geqslant 1$ car $\mathrm{SEP}\ (A, \lambda)$ n'est pas réduit à $\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\}$.

Alors $\dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) = 1 = \dim \mathrm{SEP}\ (A^r, 1) = 1$. Comme $\mathrm{SEP}\ (A, \lambda) \subset \mathrm{SEP}\ (A^r, 1) : \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) = \mathrm{SEP}\ (A^r, 1)$.

Ainsi $\mathrm{SEP}\ (A, \lambda)$ est la droite vectorielle engendrée par X_0. X_0 est alors un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. Mais comme A appartient à $\mathcal{S}$ c'est aussi un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

Ainsi $\lambda = 1$ et $\dim \mathrm{SEP}\ (A, 1) = 1$.

Si λ est une valeur propre de A de module $1 : \lambda = 1$, $\dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) = 1$ et $\mathrm{SEP}\ (A, \lambda) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 13 **N2$^+$** **Sur les valeurs propres d'une matrice stochastique niveau 2^+. ESCP 2011 2.18.**

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère le sous-ensemble $\mathcal{S}$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices A vérifiant les deux propriétés suivantes :

i) si $A = (a_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}$, alors $a_{k,\ell} \geqslant 0$, pour tout $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$;

ii) si on note $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $AU = U$. *Formulation ESCP !!*

Les éléments de $\mathcal{S}$ sont des matrices **stochastiques**.

Q1. a) Montrer que le produit de deux élément de $\mathcal{S}$ appartient à $\mathcal{S}$. *Question ajoutée*

b) $\mathcal{S}$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Q2. Soit $A = (a_{k,\ell})$ un élément de $\mathcal{S}$.

a) Montrer que 1 est valeur propre de A.

b) Soit λ une valeur propre (réelle ou complexe) de A. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

En considérant une coordonnée de module maximal de X, montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

Q3. Soit $z_1, \ldots, z_p$, p nombres complexes ($p \geqslant 2$) vérifiant : $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{p} z_k\right| = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} |z_k|$.

Montrer qu'il existe des réels positifs ou nuls $\rho_1, \ldots, \rho_p$ et un réel θ, tels que pour tout k de $[\![1,p]\!]$, on a : $z_k = \rho_j\, e^{i\theta}$.

Question légèrement modifiée pour obtenir un résultat plus standard.

Q4. Soit λ une valeur propre complexe de A telle que $|\lambda| = 1$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé. On pose :

$|x_k| = \underset{\ell\in[\![1,n]\!]}{\mathrm{Max}} |x_\ell|$

a) Montrer qu'il existe $r \in [\![1,n]\!]$ tel que $x_r = \lambda x_k$.

b) En déduire qu'il existe un entier naturel non nul q tel que $\lambda^q = 1$.

Remarque *Soit $A = (a_{k,\ell})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons* $U' = \begin{pmatrix} {u'}_1 \\ {u'}_2 \\ \vdots \\ {u'}_n \end{pmatrix} = AU$.

$\forall k \in [\![1,n]\!],\ u'_k = \sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} \times 1 = \sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}$. *Ainsi :*

$$\boxed{AU = U \Longleftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} = 1.}$$

Ce résultat est essentiel dans la suite.

Q1 a) Soient $A = (a_{k,\ell})$ et $B = (b_{k,\ell})$ deux éléments de $\mathcal{S}$. Posons $C = AB = (c_{k,\ell})$.

$\forall (k,\ell,r) \in [\![1,n]\!]^3,\ a_{k,r} \geqslant 0$ et $b_{r,\ell} \geqslant 0$ donc $\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2,\ c_{k,\ell} = \displaystyle\sum_{r=1}^{n} a_{k,r}\, b_{r,\ell} \geqslant 0$.

De plus $CU = ABU = AU = U$. Ceci achève de montrer que C appartient à $\mathcal{S}$.

$$\boxed{\text{Le produit de deux éléments de } \mathcal{S} \text{ est un élément de } \mathcal{S}.}$$

b) $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\, U = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \neq U$. Ainsi $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ n'appartient pas à $\mathcal{S}$. Alors :

$$\boxed{\mathcal{S} \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Q2 a) $AU = U$ et $U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ donc :

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre de } A \text{ et } U \text{ est un vecteur propre associé.}}$$

b) Soit λ une valeur propre de A dans $\mathbb{C}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à λ et k un élément de $[\![1, n]\!]$ tel que $|x_k| = \text{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$. $AX = \lambda X$. La "$k^{\text{ème}}$ ligne de cette égalité" donne : $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell = \lambda\, x_k$.

$|\lambda|\, |x_k| = |\lambda\, x_k| = \left|\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell\right| \leqslant \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}\, x_\ell| = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}|\, |x_\ell| = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, |x_\ell|$.

Or $\forall \ell \in [\![1, n]\!]$, $|x_\ell| \leqslant |x_k|$ et $a_{k,\ell} \geqslant 0$. Donc $\forall \ell \in [\![1, n]\!]$, $a_{k,\ell}\, |x_\ell| \leqslant a_{k,\ell}\, |x_k|$. Alors

$|\lambda|\, |x_k| \leqslant \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, |x_\ell| \leqslant \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, |x_k| = |x_k| \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} = |x_k| \times 1 = |x_k|$. Ainsi $|\lambda|\, |x_k| \leqslant |x_k|$.

Supposons que $|x_k| = 0$. Alors $\text{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|) = 0$. Donc $\forall \ell \in [\![1, n]\!]$, $|x_\ell| = 0$ ou $\forall \ell \in [\![1, n]\!]$, $x_\ell = 0$.

Par conséquent $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ ce qui contredit le fait que X est un vecteur propre de A.

Finalement $|x_k| \neq 0$. Alors $|\lambda|\, |x_k| \leqslant |x_k|$ et $|x_k| > 0$. En divisant par $|x_k|$ il vient : $|\lambda| \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est une valeur propre de } A \text{ dans } \mathbb{C},\ |\lambda| \leqslant 1}.$$

Q3 • Montrons d'abord que la condition est suffisante.

Soient r un éléments de $[\![2, +\infty[\![$ et z_1, z_2, ..., z_r r complexes.

Supposons qu'il existe un réel θ et des réels positifs ou nuls ρ_1, ρ_2, ..., ρ_r tels que $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $z_k = \rho_k\, e^{i\theta}$ et montrons que $|z_1 + z_2 + \cdots + z_r| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_r|$.

$|z_1 + z_2 + \cdots + z_r| = \left|\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \rho_k\, e^{i\theta}\right| = \left|\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \rho_k\Big)\, e^{i\theta}\right| = \left|\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \rho_k\right|\, \left|e^{i\theta}\right| = \left|\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \rho_k\right| \times 1 = \left|\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \rho_k\right| = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \rho_k$.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{r} |z_k| = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \left|\rho_k\, e^{i\theta}\right| = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} |\rho_k|\, \left|e^{i\theta}\right| = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} |\rho_k| \times 1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} |\rho_k| = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \rho_k$.

Ainsi $|z_1 + z_2 + \cdots + z_r| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_r|$.

• Montrons par récurrence sur r que la condition est nécessaire.

⋆ Montrons que la propriété est vraie pour $r = 2$.

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

On peut trouver deux réels θ_1 et θ_2, et deux réels positifs ou nuls ρ_1 et ρ_2 tels que $z_1 = \rho_1\, e^{i\theta_1}$ et $z_2 = \rho_2\, e^{i\theta_2}$ non ? ?

Alors $\left|\rho_1\, e^{i\theta_1} + \rho_2\, e^{i\theta_2}\right| = |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| = \rho_1 + \rho_2$.

$\left|\rho_1\, e^{i\theta_1} + \rho_2\, e^{i\theta_2}\right|^2 = \left(\rho_1\, e^{i\theta_1} + \rho_2\, e^{i\theta_2}\right)\left(\overline{\rho_1\, e^{i\theta_1} + \rho_2\, e^{i\theta_2}}\right) = \left(\rho_1\, e^{i\theta_1} + \rho_2\, e^{i\theta_2}\right)\left(\rho_1\, e^{-i\theta_1} + \rho_2\, e^{-i\theta_2}\right).$

$\left|\rho_1\, e^{i\theta_1} + \rho_2\, e^{i\theta_2}\right|^2 = \rho_1^2 + \rho_1\,\rho_2\, e^{i(\theta_1-\theta_2)} + \rho_2\,\rho_1\, e^{i(\theta_2-\theta_1)} + \rho_2^2 = \rho_1^2 + \left(e^{i(\theta_1-\theta_2)} + e^{-i(\theta_1-\theta_2)}\right)\rho_1\,\rho_2 + \rho_2^2.$

$\left|\rho_1\, e^{i\theta_1} + \rho_2\, e^{i\theta_2}\right|^2 = \rho_1^2 + 2\,\rho_1\,\rho_2\,\cos(\theta_1-\theta_2) + \rho_2^2.$

De plus $(\rho_1+\rho_2)^2 = \rho_1^2 + 2\,\rho_1\,\rho_2 + \rho_2^2$.

Alors $\rho_1^2 + 2\,\rho_1\,\rho_2\,\cos(\theta_1-\theta_2) + \rho_2^2 = \left|\rho_1\, e^{i\theta_1} + \rho_2\, e^{i\theta_2}\right|^2 = (\rho_1+\rho_2)^2 = \rho_1^2 + 2\,\rho_1\,\rho_2 + \rho_2^2.$

Donc $2\,\rho_1\,\rho_2\,\cos(\theta_1-\theta_2) = 2\,\rho_1\,\rho_2$. Ou $\rho_1\,\rho_2\,\cos(\theta_1-\theta_2) = \rho_1\,\rho_2$.

Premier cas $\rho_1 = 0$.

Alors $z_1 = 0 = 0\times e^{i\theta_2} = \rho_1\, e^{i\theta_2}$ et $z_2 = \rho_2\, e^{i\theta_2}$. Le résultats est montré car $\theta_2 \in \mathbb{R}$, $\rho_1 \in \mathbb{R}^+$ et $\rho_2 \in \mathbb{R}^+$.

Deuxième cas $\rho_2 = 0$.

Alors $z_2 = 0 = 0\times e^{i\theta_1} = \rho_2\, e^{i\theta_1}$ et $z_1 = \rho_1\, e^{i\theta_1}$. Le résultats est montré car $\theta_1 \in \mathbb{R}$, $\rho_1 \in \mathbb{R}^+$ et $\rho_2 \in \mathbb{R}^+$.

Troisième cas $\rho_1 \neq 0$ *et* $\rho_2 \neq 0$.

Alors $\rho_1\,\rho_2 \neq 0$. Comme $\rho_1\,\rho_2\,\cos(\theta_1-\theta_2) = \rho_1\,\rho_2$ on obtient en divisant par $\rho_1\,\rho_2 : \cos(\theta_1-\theta_2) = 1$.

Donc il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $\theta_1 - \theta_2 = k\,2\pi$. Alors $\theta_1 = \theta_2 + k\,2\pi$ donc $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$.

Ainsi $z_1 = \rho_1\, e^{i\theta_1}$ et $z_2 = \rho_2\, e^{i\theta_1}$. Le résultats est montré car $\theta_1 \in \mathbb{R}$, $\rho_1 \in \mathbb{R}^+$ et $\rho_2 \in \mathbb{R}^+$.

Ceci achève de montrer la propriété pour $r = 2$.

$\star$ Supposons que la propriété est vraie pour un élément r de $[\![2, +\infty[\![$ et montrons la pour $r+1$.

Soient z_1, z_2, ..., z_{r+1} $r+1$ complexes tels que $|z_1+z_2+\cdots+z_{r+1}| = |z_1|+z_2|+\cdots+|z_{r+1}|$. Posons $s = z_1+z_2+\cdots+z_r$.

Alors $|z_1+z_2+\cdots+z_r+z_{r+1}| = |s+z_{r+1}| \leqslant |s|+|z_{r+1}| = |z_1+z_2+\cdots+z_r|+|z_{r+1}| \leqslant |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_r|+|z_{r+1}|$.

Or $|z_1+z_2+\cdots+z_{r+1}| = |z_1+z_2+\cdots+z_r+z_{r+1}|$. Alors toutes les inégalités précédentes sont des égalités.

Ce qui permet d'écrire que $|s+z_{r+1}| = |s|+|z_{r+1}|$ et $|s|+|z_{r+1}| = |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_r|+|z_{r+1}|$.

Donc $|s+z_{r+1}| = |s|+|z_{r+1}|$ et $|z_1+z_2+\cdots+z_n| = |s| = |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_r|$.

La première égalité donne l'existence d'un réel θ' et de deux réels positifs ou nuls ρ et ρ' tels que $s = \rho\, e^{i\theta'}$ et $z_{n+1} = \rho'\, e^{i\theta'}$ car la propriété est vraie pour 2.

L'hypothèse de récurrence et la seconde égalité montrent qu'il existe un réel θ et des réels positifs ou nuls

ρ_1, ρ_2, ..., ρ_r tels que $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $z_k = \rho_k\, e^{i\theta}$.

$\rho\, e^{i\theta'} = s = z_1+z_2+\cdots+z_r = (\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_r)\, e^{i\theta}$.

Alors $\rho = |\rho| = |\rho|\,|e^{i\theta}| = |\rho\, e^{i\theta}| = |(\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_r)\, e^{i\theta}| = |\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_r|\,|\, e^{i\theta}| = |\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_r|$.

Finalement $\rho = \rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_r$ car $\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_r$ est positif ou nul.

Alors $\rho\, e^{i\theta'} = s = z_1+z_2+\cdots+z_r = (\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_r)\, e^{i\theta} = \rho\, e^{i\theta}$. Donc $\rho\, e^{i\theta'} = \rho\, e^{i\theta}$.

Premier cas $\rho \neq 0$.

Alors $e^{i\theta'} = e^{i\theta}$. Donc $z_{r+1} = \rho'\, e^{i\theta'} = \rho'\, e^{i\theta}$. Posons $\rho_{r+1} = \rho'$.

Alors $\theta \in \mathbb{R}$, $\forall k \in [\![1, r+1]\!]$, $\rho_k \in \mathbb{R}^+$ et $\forall k \in [\![1, r+1]\!]$, $z_k = \rho_k\, e^{i\theta}$. La récurence s'achève !

Deuxième cas $\rho = 0$.

Alors $\rho_1+\rho_2+\cdots\rho_r = 0$. Comme ρ_1, ρ_2, ..., ρ_r sont des réels positifs ou nuls : $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_r = 0$.

Donc $\forall k \in [\![1,r]\!],\ z_k = \rho_k\, e^{i\theta} = 0 = 0 \times e^{i\theta'} = \rho_k\, e^{i\theta'}$. Posons $\rho_{r+1} = \rho'$. Alors $z_{r+1} = \rho'\, e^{i\theta'} = \rho_{r+1}\, e^{i\theta'}$.

Ainsi $\theta' \in \mathbb{R}$, $\forall k \in [\![1, r+1]\!],\ \rho_k \in \mathbb{R}^+$ et $\forall k \in [\![1, r+1]\!],\ z_k = \rho_k\, e^{i\theta'}$. La récurence s'achève non ?

Q4 a) Posons $L = \{\ell \in [\![1,n]\!] \mid a_{k,\ell} \neq 0\}$. Comme $\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} = 1$, il est impossible que L soit vide.

Soit r un éléments de L.

Nous allons montrer que $\forall \ell \in L,\ |x_\ell| = |x_k|$ et que $\forall \ell \in L,\ x_\ell = x_r$, puis nous montrerons que $x_r = \lambda\, x_k$.

$$|x_k| = |\lambda|\,|x_k| = |\lambda\, x_k| = \left|\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell\right| \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}\, x_\ell| = \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}|\,|x_\ell| = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\,|x_\ell| \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\,|x_k| = |x_k| \times 1 = |x_k|.$$

Alors les inégalité précédentes sont des égalités.

Nous retiendrons que $\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\,|x_\ell| = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\,|x_k|$ et $\left|\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell\right| = \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}\, x_\ell|$ et nous allons exploiter successivement ces deux égalités.

$\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\,|x_\ell| = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\,|x_k|$ donne $\sum_{\ell=1}^{n} \Big(a_{k,\ell}\,\big(|x_k| - |x_\ell|\big)\Big) = 0$.

De plus $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ a_{k,\ell} \geqslant 0$ et $|x_k| - |x_\ell| \geqslant 0$ donc $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ a_{k,\ell}\,\big(|x_k| - |x_\ell|\big) \geqslant 0$.

Alors $\sum_{\ell=1}^{n} \Big(a_{k,\ell}\,\big(|x_k| - |x_\ell|\big)\Big) = 0$ donne $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ a_{k,\ell}\,\big(|x_k| - |x_\ell|\big) = 0$.

Comme $\forall \ell \in L,\ a_{k,\ell} \neq 0 : \forall \ell \in L,\ |x_k| - |x_\ell| = 0$. Ainsi $\forall \ell \in L,\ |x_\ell| = |x_k|$.

Notons que l'on a également $\forall \ell \in L,\ |x_\ell| = |x_r|$. Rappelons que $\left|\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell\right| = \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}\, x_\ell|$.

La question 3 permet de dire qu'il existe un réels θ et n réels positifs ou nuls $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ tels que :

$\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ a_{k,\ell}\, x_\ell = \rho_\ell\, e^{i\theta}$.

Soit ℓ un élément de L. $x_\ell = \dfrac{\rho_\ell}{a_{k,\ell}}\, e^{i\theta}$. Ainsi $|x_\ell| = \left|\dfrac{\rho_\ell}{a_{k,\ell}}\, e^{i\theta}\right| = \left|\dfrac{\rho_\ell}{a_{k,\ell}}\right|\,\left|e^{i\theta}\right| = \left|\dfrac{\rho_\ell}{a_{k,\ell}}\right| = \dfrac{\rho_\ell}{a_{k,\ell}}\cdot$

Comme r est dans L et que $|x_\ell| = |x_r|$ on a $\dfrac{\rho_\ell}{a_{k,\ell}} = \dfrac{\rho_r}{a_{k,r}}\cdot$ Alors $x_\ell = \dfrac{\rho_\ell}{a_{k,\ell}}\, e^{i\theta} = \dfrac{\rho_r}{a_{k,r}}\, e^{i\theta} = x_r$.

Ainsi $\forall \ell \in L,\ x_\ell = x_r$. Rappelons que si ℓ est un élément de $[\![1,n]\!]$ n'appartenant pas à $L : a_{k,\ell} = 0$.

Alors $\lambda\, x_k = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\, x_\ell = \sum_{\ell \in L} a_{k,\ell}\, x_\ell = \sum_{\ell \in L} a_{k,\ell}\, x_r = x_r \sum_{\ell \in L} a_{k,\ell} = x_r \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} = x_r \times 1 = x_r$

$$\boxed{\text{Il existe un élément } r \text{ de } [\![1,n]\!] \text{ tel que } x_r = \lambda\, x_k.}$$

b) Montrons qu'il existe un élément q de $\mathbb{N}^*$ tel que $\lambda^q = 1$.

Remarque Dans le principe c'est assez simple. Comme x_r est encore une composante de X de module maximal on peut, comme pour x_k trouver $x_{r'}$ tel que $x_{r'} = \lambda\, x_r = \lambda^2\, x_k$. Et on recommence. Comme X un a un nombre fini de coordonnées, on finira par retomber sur une coordonnée x_s déjà obtenue et nécessairement non nulle. Alors il existera q dans $\mathbb{N}^*$ tel que $x_s = \lambda^q\, x_s$ ce qui donnera $\lambda^q = 1$. C'est ce qu'on lit "partout". Le "on finira" me gêne un peu d'où la tentative qui suit pour faire une "vraie" démonstration...

Raisonnons par l'absurde. Supposons donc que $\forall q \in \mathbb{N}^*,\ \lambda^q \neq 1$.

Montrons par récurrence que pour tout élément q de $\mathbb{N}^*$, il existe un élément k_q de $[\![1,n]\!]$ tel que $x_{k_q} = \lambda^q\, x_k$.

• La propriété est vraie pour $q = 1$ d'après ce qui précède (il suffit de poser $k_1 = r$).

• Supposons que la propriété est vraie pour un éléléments q de $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $q+1$.

L'hypothèse de récurrence montre qu'il existe un élément k_q de $[\![1,n]\!]$ tel que $x_{k_q} = \lambda^q\, x_k$.

$|x_{k_q}| = |\lambda^q\, x_k| = |\lambda^q|\,|x_k| = |\lambda|^q\,|x_k| = 1 \times |x_k| = |x_k|$. Alors $|x_{k_q}| = \underset{1\leqslant \ell\leqslant n}{\text{Max}}\,|x_\ell|$.

Alors comme nous l'avons vu dans a) pour x_k, on peut trouver un élément k_{q+1} de $[\![1,n]\!]$ tel que $x_{k_{q+1}} = \lambda\, x_{k_q}$.

Ainsi $x_{k_{q+1}} = \lambda\, x_{k_q} = \lambda\,\lambda^q\, x_k = \lambda^{q+1}\, x_k$ Ce qui achève la récurrence.

Montrons alors que les éléments de la suite $(k_q)_{q\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux distincts.

Supposons qu'il existe deux éléments q et q' de $\mathbb{N}^*$ tels que $q < q'$ et $k_q = k_{q'}$

Alors $x_{k_q} = x_{k_{q'}}$. Donc $\lambda^{k_q}\, x_k = \lambda^{k_{q'}}\, x_k$. Comme x_k n'est pas nul, $\lambda^{k_q} = \lambda^{k_{q'}}$.

Alors $\lambda^{k_{q'}-k_q} = 1$ et $k_{q'} - k_q \in \mathbb{N}^*$. Ceci contredit l'hypothèse.

Alors la suite $(k_q)_{q\in\mathbb{N}^*}$ est une suite indexée par $\mathbb{N}^*$ d'éléments deux à deux distincts de $[\![1,n]\!]$ qui est un ensemble fini !

Ceci est donc impossible et l'hypothès $\forall q \in \mathbb{N}^*,\ \lambda^q \neq 1$ tombe.

Donc il existe un élément q de $\mathbb{N}^*$ tel que $\lambda^q = 1$.

$$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est une valeur propre de } A \text{ de module 1, il existe un élément } q \text{ de } \mathbb{N}^* \text{ tel que } \lambda^q = 1.}$$

Exercice 14 **N1** **Caractérisation des droites et des hyperplans stables par un endomorphisme. Énoncé 1.**

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension non nulle n. f est un endomorphisme de E.

Q1. a) Soit u un vecteur propre de f. Montrer que la droite vectorielle D engendrée par u est stable par f.

b) Réciproquement soit D une droite vectorielle de E stable par f. Montrer qu'elle engendrée par un vecteur propre de f.

On se propose maintenant de caractériser les hyperplans de E stables par f.

On rappelle que deux hyperplans sont égaux si et seulement si leurs équations dans une même base sont proportionnelles.

Q2. A est la matrice de f dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E.

Soit H un hyperplan de E d'équation $a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n = 0$ dans $\mathcal{B}$.

On pose $V = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $W = {}^t\!AV = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

On pose encore $H' = \{x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + \cdots + x_n\, e_n \in E \mid b_1\, x_1 + b_2\, x_2 + \cdots + b_n\, x_n = 0\}$

a) Préciser la dimension de H' (deux cas).

b) Montrer qu'un élément u de E de matrice X dans $\mathcal{B}$ appartient à H si et seulement si ${}^t XV = 0$. Donner un résultat analogue pour H'.

c) On suppose que V est un vecteur propre de ${}^t A$ associé à la valeur propre λ. Montrer que H est stable par f (on pourra utiliser b))

d) Réciproquement on suppose que H est stable par f. Montrer alors que $H \subset H'$. En déduire, en faisant deux cas que V est un vecteur propre de ${}^t A$.

Q3. Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver les sous-espaces de E stables par f.

Thème abordé dans oral ESCP 2003 2.3 (avec $n = 3$), ESCP MI 2001.

Q1 a) u est un vecteur propre de f. Donc u est non nul et il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda\, u$.

Soit D la droite vectorielle de E engendrée par u. $f(D) = f\big(\text{Vect}(u)\big) = \text{Vect}\,\big(f(u)\big) = \text{Vect}(\lambda\, u) \subset \text{Vect}(u) = D$.

Ainsi D est stable par f.

b) Il existe un vecteur non nul u qui engendre D. Comme D est stable par f, $f(u)$ appartient à D ; ainsi il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda\, u$.

u étant non nul, u est vecteur propre de f. Donc D est engendrée par un vecteur propre de f.

Une droite vectorielle de E est stable par f si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de f.

Q2 a) Si $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \neq 0_{\mathbb{K}^n}$, H' est un hyperplan donc H' est de dimension $n - 1$.

Si $(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 0_{K^n}$, H' est égal à E et H' est de dimension n.

$$\boxed{H' \text{ est de dimension } n-1 \text{ si } (b_1, b_2, \dots, b_n) \neq 0_{K^n} \text{ et de dimension } n \text{ sinon}}$$

b) Soit u un élément de E de matrice X dans $\mathcal{B}$. On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$$u \in H \iff a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n = 0 \iff (x_1\ x_2\ \dots\ x_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0 \iff {}^tXV = 0.$$

Donc u appartient à H si et seulement si ${}^tXV = 0$.

De même u appartient à H' si et seulement si ${}^tXW = 0$.

$$\boxed{\text{Un élément } u \text{ de } E \text{ de matrice } X \text{ dans } \mathcal{B} \text{ appartient à } H \text{ (resp. } H'\text{) si et seulement si } {}^tXV = 0 \text{ (resp. } {}^tXW = 0\text{).}}$$

c) Supposons que $V = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre λ. V n'est pas nul et ${}^tAV = \lambda V$.

Soit u un élément de H de matrice X dans la base $\mathcal{B}$.

${}^tXV = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ car u appartient à H. Alors ${}^t(AX)V = {}^tX({}^tAV) = {}^tX(\lambda\, V) = \lambda {}^tXV = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

Ainsi $f(u)$ qui a pour matrice AX dans la base $\mathcal{B}$ appartient à H.

H est stable par f.

d) H est stable par f. Soit u un élément de H de matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$. ${}^tXV = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

Comme $f(u)$ appartient à H et que la matrice de $f(u)$ dans $\mathcal{B}$ est AX : ${}^t(AX)V = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ donc ${}^tX({}^tAV) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

Alors ${}^tXW = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ et ainsi u est dans H'.

Ainsi H est contenu dans $H' = \{x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + \cdots + x_n\, e_n \in E \mid b_1\, x_1 + b_1\, x_1 + \cdots + b_1\, x_1 = 0\}$.

Premier cas W est nul.

On a ${}^tAV = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ et V non nul donc V est un vecteur propre de ${}^tA$ (associé à la valeur propre 0).

Deuxième cas W n'est pas nul.

Alors $\dim H' = n - 1 = \dim H$. Comme $H \subset H' : H = H'$.

Alors $a_1\, x_1 + a_1\, x_1 + \cdots + a_1\, x_1 = 0$ et $b_1\, x_1 + b_2\, x_2 + \cdots + b_n\, x_n = 0$ sont deux équations de l'hyperplan H dans la base $\mathcal{B}$.

Ces équations sont donc proportionnelles. Autrement dit il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ (et même de $\mathbb{K}^*$) tel que : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ b_k = \lambda\, a_k$.

Alors $W = \lambda\, V$. Ainsi V n'est pas nul (H est un hyperplan) et ${}^tAV = \lambda\, V$. V est encore est un vecteur propre de ${}^tA$ (associé à la valeur propre λ).

Un hyperplan de E d'équation $a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n = 0$ dans $\mathcal{B}$ est stable par f si et seulement si $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^t A$.

Q3 Notons qu'un sous-espace vectoriel de E est de dimension 0, 1, 2 ou 3.

$\{0_E\}$ est le seul sous-espaces vectoriel de E de dimension 0 et il est stable par f.

E est le seul sous-espace vectoriel de E de dimension 3 et il est stable par f.

Les sous-espaces vectoriels de dimension 1 (resp. 2) de E sont les droites (resp. hyperplans ou plans) de E.

Pour trouver les droites (resp. hyperplans ou plans) de E stables par f nous allons chercher les sous-espaces propres de f (resp. ${}^t A$).

Soit λ un réel et $u = x\, e_1 + y\, e_2 + z\, e_3$ un élément de E.

$$u \in \operatorname{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{Id}_E) \iff (f - \lambda\, \mathrm{Id}_E)(x) = 0_e \iff (A - \lambda\, I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (1-\lambda)\, x + y + z = 0 \\ x + (1-\lambda)\, y + z = 0 \\ -x + y + (1-\lambda)\, z = 0 \end{cases}.$$

En faisant $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$ il vient $u \in \operatorname{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{Id}_E) \iff \begin{cases} (1-\lambda)\, x + y + z = 0 \\ \lambda\, (x - y) = 0 \\ (2-\lambda)\, (y + z) = 0 \end{cases}.$

Si $\lambda = 0$, $u \in \operatorname{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{Id}_E) \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \end{cases}.$

Alors 0 est valeur propre de f et SEP $(f, 0) = \operatorname{Vect}(e_2 - e_3)$.

Si $\lambda = 2$, $u \in \operatorname{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{Id}_E) \iff \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases}.$

Alors 2 est valeur propre de f et SEP $(f, 2) = \operatorname{Vect}(e_1 + e_2)$.

Supposons que $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 2$. Alors $u \in \operatorname{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{Id}_E) \iff \begin{cases} x = y \\ z = -y \\ (1-\lambda)\, x = 0 \end{cases}.$

Si $\lambda \neq 1$ alors $u \in \operatorname{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{Id}_E) \iff x = y = z = 0$ et λ n'est pas valeur propre de f.

Si $\lambda = 1$ alors $u \in \operatorname{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{Id}_E) \iff x = y$ et $z = -y$.

Alors 1 est valeur propre de f et SEP $(f, 1) = \operatorname{Vect}(e_1 + e_2 - e_3)$.

Ainsi $\operatorname{Sp} f = \{0, 1, 2\}$, SEP $(f, 0) \operatorname{Vect}(e_2 - e_3)$, SEP $(f, 1) = \operatorname{Vect}(e_1 + e_2 - e_3)$ et SEP $(f, 2) = \operatorname{Vect}(e_1 + e_2)$.

Rappelons que les droites vectorielles de E stables par f sont les droites vectorielles de E engendrées par un vecteur propre de f. Notons que les sous-espaces propres de f sont des droites vectorielles ; alors deux vecteurs propres associés à la même valeur propre engendrent la même droite vectorielle.

Alors les droites vectorielles de E stables par f sont les trois sous-espaces propres de f.

$\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} f = \{0, 1, 2\}$. Montrons que A et ${}^t A$ ont mêmes valeurs propres. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\lambda \in \operatorname{Sp} A \iff A - \lambda\, I_3$ non inversible $\iff {}^t(A - \lambda\, I_3)$ non inversible $\iff {}^t A - \lambda\, I_3$ non inversible $\iff \lambda \in \operatorname{Sp} {}^t A$.

Ainsi $\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} {}^t A$ donc $\operatorname{Sp} {}^t A = \{0, 1, 2\}$. Cherchons les sous-espaces propres de ${}^t A$.

Notons que ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$X \in \text{SEP }({}^tA, 0) \Longleftrightarrow {}^tAX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=0 \end{cases}$.

Alors $\text{SEP }({}^tA, 0) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$.

$X \in \text{SEP }({}^tA, 1) \Longleftrightarrow {}^tAX = X \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y-z=x \\ x+y+z=y \\ x+y+z=z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y-z=0 \\ x+z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=-x \end{cases}$.

Alors $\text{SEP }({}^tA, 1) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix})$

$X \in \text{SEP }({}^tA, 2) \Longleftrightarrow {}^tAX = 2X \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y-z=2x \\ x+y+z=2y \\ x+y+z=2z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y-z=x \\ y-z=x \\ y=z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=y \end{cases}$.

Alors $\text{SEP }({}^tA, 2) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Ainsi $\text{Sp}\,{}^tA = \{0,1,2\}$, $\text{SEP }({}^tA, 0) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$, $\text{SEP }({}^tA, 1) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix})$ et $\text{SEP }({}^tA, 2) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$

Notons que les sous-espaces propres de ${}^tA$ sont des droites vectorielles.

Notons également que si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sont deux éléments colinéaires de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, les hyperplans de E d'équations respectives $a\,x + b\,y + c\,z = 0$ et $a'\,x + b'\,y + c'\,z = 0$ dans la base $\mathcal{B}$ sont identiques.

Finalement les hyperplans de E stables par f sont les hyperplans de E d'équations respectives $x - y = 0$, $x - y - z = 0$ et $y + z = 0$ dans la base $\mathcal{B}$.

Les sous-espaces vectoriels de E stables par f sont :

$\{0_E\}$;

les droites vectorielles $\text{Vect}(e_2 - e_3)$, $\text{Vect}(e_1 + e_2 - e_3)$ et $\text{Vect}(e_1 + e_2)$;

les hyperplans ou les plans d'équations respectives $x - y = 0$, $x - y - z = 0$ et $y + z = 0$ dans la base $\mathcal{B}$;

E.

Exercice 15 **N2** **Caractérisation des droites et des hyperplans stables par un endomorphisme. Énoncé 2.**

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension non nulle n. f est un endomorphisme de E.

Q1. Montrer qu'une droite vectorielle de E est stable par f si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de f.

Q2 A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E.

Montrer qu'un hyperplan de E d'équation $a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n = 0$ dans $\mathcal{B}$ est stable par f si et seulement si $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$.

Thème abordé dans oral ESCP 2003 2.3 (avec n = 3), ESCP MI 2001.

Q1 • Soit D une droite vectorielle stable par f. Il existe un vecteur non nul u qui engendre D. Comme D est stable par f, $f(u)$ appartient à D ; ainsi il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda\, u$.

u étant non nul, u est vecteur propre de f. Donc D est engendrée par un vecteur propre de f.

• Réciproquement soit D une droite vectorielle de E engendrée par un vecteur propre u de f.

Il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda\, u$.

$f(D) = f\big(\mathrm{Vect}(u)\big) = \mathrm{Vect}\,\big(f(u)\big) = \mathrm{Vect}(\lambda\, u) \subset \mathrm{Vect}(u) = D$. Ainsi D est stable par f.

$$\boxed{\text{Une droite vectorielle de } E \text{ est stable par } f \text{ si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de } f.}$$

Q2 Soit H un hyperplan de E d'équation $a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n = 0$ dans la base $\mathcal{B}$.

Posons $V = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Notons que V n'est pas nul car H est un hyperplan.

Observons encore que, comme $a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n = 0$ est une équation de H dans $\mathcal{B}$, un vecteur u de E de matrice X dans $\mathcal{B}$ appartient à H si et seulement si ${}^tXV = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

• Supposons que H est stable par f. Soit u un élément de H de matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$. ${}^tXV = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

Comme $f(u)$ appartient à H et que la matrice de $f(u)$ dans $\mathcal{B}$ est AX : ${}^t(AX)V = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ donc ${}^tX({}^tAV) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

Posons $W = {}^tAV = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. ${}^tX({}^tAV) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ donne alors $b_1\, x_1 + b_2\, x_2 + \cdots + b_n\, x_n = 0$.

Ainsi H est contenu dans $H' = \{x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + \cdots + x_n\, e_n \in E \mid b_1\, x_1 + b_1\, x_1 + \cdots + b_1\, x_1 = 0\}$.

Si W est nul on a ${}^tAV = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ et V non nul donc V est un vecteur propre de ${}^tA$ (associé à la valeur propre 0).

Supposons W non nul. Alors H' est un hyperplan de E qui contient l'hyperplan H. Ainsi $H = H'$ car H et H' ont la même dimension finie.

Alors $a_1\,x_1 + a_1\,x_1 + \cdots + a_1\,x_1 = 0$ et $b_1\,x_1 + b_2\,x_2 + \cdots + b_n\,x_n = 0$ sont deux équations de l'hyperplan H dans la base $\mathcal{B}$.

Ces équations sont donc proportionnelles. Autrement dit il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ (et même de $\mathbb{K}^*$) tel que : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ b_k = \lambda\, a_k$.

Alors $W = \lambda\, V$. Ainsi V n'est pas nul et ${}^tAV = \lambda\, V$. V est encore est un vecteur propre de ${}^tA$ (associé à la valeur propre λ).

• Réciproquement supposons que $V = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$. Il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ tel que ${}^tAV = \lambda V$.

Soit u un élément de H de matrice X dans la base $\mathcal{B}$.

${}^tXV = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$. Alors ${}^t(AX)V = {}^tX({}^tAV) = {}^tX(\lambda\, V) = \lambda\, {}^tXV = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$. Ainsi $f(u)$ qui a pour matrice AX dans la base $\mathcal{B}$ appartient à H.

H est stable par f.

Un hyperplan de E d'équation $a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + \cdots + a_n\,x_n = 0$ dans $\mathcal{B}$ est stable par f si et seulement si $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$.

Exercice 16 **N1$^+$** **Sous espaces vectoriels stables par un endomorphisme diagonalisable. Énoncé 1**.

E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

f est un endomorphisme diagonalisable de E. λ_1, λ_2, ..., λ_p sont les p valeurs propres de f.

Pour tout élément k de $[\![1,p]\!]$ on pose $F_k = \text{SEP } (f, \lambda_k)$.

Q1. Montrer que si G_1, G_2, ..., G_p sont p sous-espaces vectoriels respectivement de F_1, F_2, ..., F_p alors la somme $G_1 + G_2 + \cdots + G_p$ est directe et stable par f.

Q2. Soit G un sous espace vectoriel de E stable par f. On pose pour tout élément k de $[\![1,p]\!]$, $G_k = G \cap F_k$.

On se propose de montrer que $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_p$.

a) Montrer par récurrence que, pour tout k dans $[\![1,p]\!]$, si x_1, x_2, ..., x_k sont k éléments appartenant respectivement à F_1, F_2, ..., F_k et tels que $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \in G$ alors ces éléments appartiennent également à G.

b) Achever la démonstration du résultat proposé et conclure.

Q3. Soit G un sous-espace vectoriel de E stable par f et non réduit à $\{0_E\}$. Montrer que la restriction g de f à G est un endomorphisme diagonalisable de G (il faut entendre que g est l'application de G dans G définie par $\forall x \in G,\ g(x) = f(x)$).

Thème abordé dans oral ESCP 2002 2.22, ESCP MI 2001.

Q1 Montrons que la somme $G_1 + G_2 + \cdots + G_p$ est directe.

Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ un élément de $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_p$ tel que $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = 0_E$.

Comme $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ appartient à $F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p$ et que la somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_p$ est directe :

$x_1 = x_2 = \cdots x_p = 0_E$. Ceci achève de prouver que la somme $G_1 + G_2 + \cdots + G_p$ est directe.

Montrons qu'elle est stable par f.

Soit x un élément de $G_1 + G_2 + \cdots + G_p$. $\exists (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_p,\ x = x_1 + x_2 + \cdots + x_p$.

$f(x) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_p) = \lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2 + \cdots + \lambda_p\, x_p$ car pour tout élément i de $[\![1,p]\!]$, $G_i \subset F_i$ et $F_i = \text{SEP } (f, \lambda_i)$.

Or $\forall i \in [\![1,p]\!],\ x_i \in G_i$ donc $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \lambda_i\, x_i \in G_i$ et ainsi $f(x) = \lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2 + \cdots + \lambda_p\, x_p \in G_1 + G_2 + \cdots + G_p$.

Si G_1, G_2, ..., G_p sont p sous-espaces vectoriels respectivement de F_1, F_2, ..., F_p alors la somme $G_1 + G_2 + \cdots + G_p$ est directe et stable par f.

Q2 a) Montrons par récurrence que, pour tout k dans $[\![1,p]\!]$, si x_1, x_2, ..., x_k sont k éléments appartenant respectivement à F_1, F_2, ..., F_k et tels que $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \in G$ alors ces éléments appartiennent également à G.

C'est clair pour $k = 1$. Supposons la propriété vraie pour un élément k de $[\![1, p-1]\!]$ et montrons la pour $k+1$.

Soient x_1, x_2, ..., x_{k+1} des éléments de E appartenant respectivement à F_1, F_2, ..., F_{k+1} et tels que $x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1}$ soit dans G. Montrons que ces $k+1$ éléments sont dans G.

Posons $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1}$. G est stable par f donc $f(x)$ appartient à G.

$f(x) = f(x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1}) = \lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2 + \cdots + \lambda_{k+1}\, x_{k+1}$.

x et $f(x)$ sont dans G donc $\lambda_{k+1}\, x - f(x)$ est dans G.

Donc $\lambda_{k+1}\, x - f(x) = (\lambda_{k+1}-\lambda_1)\, x_1 + (\lambda_{k+1}-\lambda_2)\, x_2 + \cdots + (\lambda_{k+1}-\lambda_k)\, x_k \in G$ et $\forall i \in [\![1,k]\!],\ (\lambda_{k+1}-\lambda_i)\, x_i \in F_i$.

L'hypothèse de récurrence montre alors que $\forall i \in [\![1,k]\!],\ (\lambda_{k+1}-\lambda_i)\, x_i \in G$.

Comme $\forall i \in [\![1,k]\!],\ \lambda_{k+1}-\lambda_i \neq 0$, $\forall i \in [\![1,k]\!],\ x_i \in G$.

Alors $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ et $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1}$ appartiennent à G. Par différence x_{k+1} appartient à G.

Alors $\forall i \in [\![1,k+1]\!],\ x_i \in G$ et la récurrence s'achève.

b) Montrons que $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_p$.

Pour tout k dans $[\![1,p]\!]$, $G_k = G \cap F_k$ est un sous-espace vectoriel de G et de F_k et $F_1 + F_2 + \cdots + F_p$ est directe donc la somme $G_1 + G_2 + \cdots + G_p$ est directe et contenue dans G.

Montons l'inclusion inverse. Soit x un élément de G.

Comme $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$, $\exists!(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p,\ x = x_1 + x_2 + \cdots + x_p$.

$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_p$ appartient à G et pour tout i dans $[\![1,p]\!]$, $x_i \in F_i$. La propriété de a) appliquée pour $k = p$ montre alors que $\forall i \in [\![1,p]\!],\ x_i \in G$.

Alors $\forall i \in [\![1,p]\!],\ x_i \in G \cap F_i = G_i$. Donc $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_p \in G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_p$.

Par conséquent $G \subset G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_p$ et finalement : $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_p$.

G est donc la somme (directe) de p sous-espaces respectivement contenus dans F_1, F_2, ..., F_p.

Un sous-espace G de E est stable par f si et seulement si il existe p sous-espace vectoriels G_1, G_2, ..., G_p respectivement de F_1, F_2, ..., F_p tels que $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_p$.

Q3 G est stable par f et non réduite à $\{0_E\}$. g est une application de G dans G et $\forall x \in G,\ g(x) = f(x)$.

Comme f est linéaire, g est linéaire. Finalement g est un endomorphisme de G. Montrons que g est diagonalisable.

Pour cela nous allons construire une base de G constituée de vecteurs propres de g.

Posons $\forall i \in [\![1,n]\!],\ G_i = G \cap F_i$. $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_p$ d'après Q2.

Posons $I = \big\{i \in [\![1,p]\!] \mid G_i \neq \{0_E\}\big\}$. I n'est pas vide car G n'est pas réduit à $\{0_E\}$.

$G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_p = \displaystyle\bigoplus_{i\in I} G_i$. Pour tout i dans I considérons une base $\mathcal{B}_i$ de G_i (qui n'est pas réduit au vecteur nul...).

Comme $G = \displaystyle\bigoplus_{i\in I} G_i$, $\mathcal{B} = {}''\displaystyle\bigcup_{i\in I} \mathcal{B}_i{}''$ est une base de G. Or pour tout i dans I les éléments de $\mathcal{B}_i$ sont des vecteurs propres de f (associés à la valeur propre λ_i) donc de g.

Ainsi $\mathcal{B}$ est une base de G constituée de vecteurs propres de g. Alors g est diagonalisable.

La restriction de f à un sous-espace vectoriel de E stable par f et non réduit à $\{0_E\}$ est diagonalisable.

Exercice 17 **Endomorphismes diagonalisables dans la même base.**

E est un espace vectoriel de dimension non nulle n sur $\mathbb{K}$. f et g sont deux endomorphismes diagonalisables de E tels que : $f \circ g = g \circ f$.

$\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$ et pour i dans $[\![1,p]\!]$, F_i est le sous-espace propre de f associé à λ_i.

$\text{Sp}(g) = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q\}$ et pour i dans $[\![1,p]\!]$, pour j dans $[\![1,q]\!]$, G_j est le sous-espace propre de g associé à μ_j.

Q1. Montrer que les sous-espaces propres de g sont stables par f.

Q2. Montrer que pour i dans $[\![1,p]\!]$: $F_i = \displaystyle\bigoplus_{j=1}^{q}(F_i \cap G_j)$.

Q3. En déduire que f et g se diagonalisent dans la même base.

Q4. Envisager une réciproque.

Q1 Soit μ une valeur propre de g. Soit x un élément de SEP (g,μ). $g(f(x)) = f(g(x)) = f(\mu\, x) = \mu\, f(x)$.

Donc $f(x)$ appartient à SEP (g,μ). Ainsi SEP (g,μ) est stable par f.

La symétrie du problème permet de dire que les sous-espaces propres de f sont stables par g.

$$\boxed{\text{Les sous-espaces propres de } g \text{ (resp. } f\text{) sont stables par } f \text{ (resp. } g\text{).}}$$

Q2 Soit i un élément de $[\![1,p]\!]$. Montrons que $F_i \cap G_1$, $F_i \cap G_2$, ..., $F_i \cap G_q$ sont en somme directe.

Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ un élément de $(F_i \cap G_1) \times (F_i \cap G_2) \times \cdots \times (F_i \cap G_q)$ tel que $x_1 + x_2 + \cdots + x_q = 0_E$.

Comme G_1, G_2, ..., G_q sont en somme directe (ce sont les sous-espaces propres de g) nécessairement :

$x_1 = x_2 = \cdots = x_q = 0_E$. Ce qui achève de montrer que la somme $(F_i \cap G_1) + (F_i \cap G_2) + \cdots + (F_i \cap G_q)$ est directe.

$\forall j \in [\![1,q]\!],\ F_i \cap G_j \subset F_i$ donc $\displaystyle\bigoplus_{j=1}^{q}(F_i \cap G_j) \subset F_i$. Montrons l'inclusion inverse.

Soit x un élément de F_i. Comme $\displaystyle\bigoplus_{j=1}^{q} G_j = E$, puisque g est diagonalisable, il existe un unique élément $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ de $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_q$ tel que $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_q$.

Ne reste plus alors qu'à montrer que x_1, x_2, ..., x_q sont des éléments de F_i ce qui n'est pas une totale évidence.

$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_q$ et x est élément de F_i. Ainsi $\lambda_i (x_1 + x_2 + \cdots + x_q) = \lambda_i\, x = f(x) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots f(x_q)$.

Donc $(\lambda_i\, x_1 - f(x_1)) + (\lambda_i\, x_2 - f(x_2)) + \cdots + (\lambda_i\, x_q - f(x_q)) = 0_E$.

Soit j un élément de $[\![1,q]\!]$. x_j appartient à G_j et G_j est stable par f car c'est un sous-espace propre de g.

Par conséquent x_j et $f(x_j)$ sont deux éléments de G_j donc $\lambda_i\, x_j - f(x_j)$ est encore un élément de G_j.

Alors $(\lambda_i\, x_1 - f(x_1)) + (\lambda_i\, x_2 - f(x_2)) + \cdots + (\lambda_i\, x_q - f(x_q)) = 0_E$, $\forall j \in [\![1,q]\!],\ \lambda_i\, x_j - f(x_j) \in G_j$ et la somme $G_1 + G_2 + \cdots + G_q$ est directe.

Ainsi $\lambda_i\, x_1 - f(x_1) = \lambda_i\, x_2 - f(x_2) \cdots = \lambda_i\, x_q - f(x_q) = 0_E$. Donc $\forall j \in [\![1,q]\!],\ f(x_j) = \lambda_i\, x_j$ ou $\forall j \in [\![1,q]\!],\ x_j \in F_i$.

Alors $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_q \in (F_i \cap G_1) + (F_i \cap G_2) + \cdots + (F_i \cap G_q)$ et ceci pour tout élément x de F_i.

Donc $F_i \subset (F_i \cap G_1) + (F_i \cap G_2) + \cdots + (F_i \cap G_q)$. Finalement :

$$\boxed{F_i = \bigoplus_{j=1}^{q}(F_i \cap G_j)}.$$

.

Q3 Fixons i dans $[\![1,p]\!]$. Posons $S_i = \{j \in [\![1,q]\!] \mid F_i \cap G_j \neq \{0_E\}\}$.

Supposons que S_i est vide. Alors $\forall j \in [\![1,q]\!],\ F_i \cap G_j = \{0_E\}$ donc $F_i = \displaystyle\bigoplus_{j=1}^{q}(F_i \cap G_j) = \{0_E\}$ ce qui n'est pas car F_i est un sous-espace propre de f.

Donc S_i n'est pas vide et $F_i = \bigoplus_{j\in S_i}(F_i \cap G_j)$.

Pour tout élément j de S_i considérons une base $\mathcal{B}_{i,j}$ de $F_i \cap G_j$.

Comme $F_i = \bigoplus_{j\in S_i}(F_i \cap G_j)$, $\mathcal{B}_i =$ " $\bigcup_{j\in S_i} \mathcal{B}_{i,j}$ " est une base de F_i nécessairement constituée de vecteurs propres de f et de g.

$E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ donc $\mathcal{B} =$ " $\bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i$ " est une base de E et ses vecteurs sont des vecteurs propres de f et de g.

Alors les matrices de f et de g dans cette base $\mathcal{B}$ sont diagonales.

$$\boxed{f \text{ et } g \text{ se diagonalisent dans la même base.}}$$

Q4 Ici f et g sont deux endomorphismes qui se diagonalisent dans la même base $\mathcal{B}_0$ de E. Montrons que $f\circ g = g\circ f$.

$\mathcal{B}_0$ est une base de E constituée de vecteurs propres pour f et pour g. Alors les matrices de f et g dans la base $\mathcal{B}_0$ sont diagonales donc commutent.

$M_{\mathcal{B}_0}(f \circ g) = M_{\mathcal{B}_0}(f)\, M_{\mathcal{B}_0}(g) = M_{\mathcal{B}_0}(g)\, M_{\mathcal{B}_0}(f) = M_{\mathcal{B}_0}(g \circ f)$. Alors $f \circ g = g \circ f$.

$$\boxed{\text{Si } f \text{ et } g \text{ sont deux endomorphismes de } E \text{ qui se diagonalisent dans la même base} : f \circ g = g \circ f.}$$

Finalement :

$$\boxed{\text{Si } f \text{ et } g \text{ sont deux endomorphismes de } E,\ f \text{ et } g \text{ se diagonalisent dans la même base si et seulement si } f\circ g = g\circ f.}$$

u et celle de $\mathbf{u^2}$

Exercice 18 **N2** **Lien entre la diagonalisibilité de u et celle de $\mathbf{u^2}$.**

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n non nulle. u est un endomorphisme de E.

Q1. Montrer que si u est diagonalisable alors u^2 est diagonalisable et $\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$.

► Dans toute la suite on suppose u^2 diagonalisable.

Q2. On suppose que λ est une valeur propre non nulle de u^2 telle qu'il existe α dans $\mathbb{K}$ vérifiant $\alpha^2 = \lambda$.

Montrer que SEP $\left(u^2, \lambda\right) = \operatorname{Ker}(u - \alpha Id_E) \bigoplus \operatorname{Ker}(u + \alpha Id_E)$.

En déduire qu'il existe une base de SEP $\left(u^2, \lambda\right)$ constituée de vecteurs propres de u.

Q3. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que si $\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$ alors u est diagonalisable. Et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

Thème abordé dans oral ESCP 2000 2-1, 2005 2.6, 2012 2.2. Thème implicite dans oral ESCP 2006 2.17.

Q1 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de u respectivement associés aux valeurs propres γ_1, γ_2, ..., γ_n.

$\forall k \in [\![1, n]\!],\ u(e_k) = \gamma_k\, e_k$ donc $\forall k \in [\![1, n]\!],\ u^2(e_k) = \gamma_k^2\, e_k$. Alors $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de u^2 respectivement associés aux valeurs propres γ_1^2, γ_2^2, ..., γ_n^2. u^2 est diagonalisable.

Soit x un élément de E de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

$x = \sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k$, $u(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k\, \gamma_k\, e_k$ et $u^2(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k\, \gamma_k^2\, e_k$.

$x \in \operatorname{Ker} u \iff u(x) = 0_E \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k\, \gamma_k = 0 \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k = 0$ ou $\gamma_k = 0$.

$x \in \operatorname{Ker} u \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k = 0$ ou $\gamma_k^2 = 0 \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k\, \gamma_k^2 = 0 \iff u^2(x) = 0_E \iff x \in \operatorname{Ker} u^2$.

Alors $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$.

$\boxed{\text{Si } u \text{ est diagonalisable alors } u^2 \text{ est diagonalisable et } \operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u}$.

Q2 a) Soit x un élément de $\operatorname{Ker}(u - \alpha Id_E)$. $u(x) = \alpha\, x$ donc $u^2(x) = \alpha^2\, x = \lambda\, x$. Ainsi x appartient à $\operatorname{Ker}(u - \alpha Id_E)$.

Par conséquent $\operatorname{Ker}(u - \alpha Id_E)$ est un sous-espace vectoriel de $\operatorname{Ker}(u - \lambda Id_E)$. On montre de même que $\operatorname{Ker}(u + \alpha Id_E)$ est un sous-espace vectoriel de $\operatorname{Ker}(u - \lambda Id_E)$.

Montrons maintenant que $\text{SEP}\ \big(u^2, \lambda\big) = \operatorname{Ker}(u - \alpha Id_E) \bigoplus \operatorname{Ker}(u + \alpha Id_E)$.

Soit x un élément de $\text{SEP}\ \big(u^2, \lambda\big)$. $u(x) = \lambda\, x$.

Montrons par analyse/synthèse qu'il existe un unique élément (y, z) de $\operatorname{Ker}(u - \alpha Id_E) \times \operatorname{Ker}(u + \alpha Id_E)$ tel que $x = y + z$.

Analyse/unicité. Supposons que $x = y + z$ avec y dans $\operatorname{Ker}(u - \alpha Id_E)$ et z dans $\operatorname{Ker}(u + \alpha Id_E)$.

$u(y) = \alpha\, y$ et $u(z) = -\alpha\, z$ donc $u(x) = \alpha\, y - \alpha\, z$. $y + z = x$ et $y - z = \dfrac{1}{\alpha}\, u(x)$ (α n'est pas nul car λ n'est pas nul).

Par addition et soustraction on obtient : $y = \dfrac{1}{2\alpha}\, \Big(\alpha\, x + u(x)\Big)$ et $z = \dfrac{1}{2\alpha}\, \big(\alpha\, x - u(x)\big)$. D'où l'unicité de la décomposition.

Synthèse/existence. Posons : $y = \dfrac{1}{2\alpha}\, \big(\alpha\, x + u(x)\big)$ et $z = \dfrac{1}{2\alpha}\, \big(\alpha\, x - u(x)\big)$. Clairement $x = y + z$.

$u(y) = \dfrac{1}{2\alpha}\, \big(\alpha\, u(x) + u^2(x)\big) = \dfrac{1}{2\alpha}\, \big(\alpha\, u(x) + \lambda\, x\big) = \dfrac{1}{2\alpha}\, \big(\alpha\, u(x) + \alpha^2\, x\big) = \alpha\, \dfrac{1}{2\alpha}\, \big(u(x) + \alpha\, x\big) = \alpha\, y$. $y \in \operatorname{Ker}(f - \alpha\, Id_E)$.
On montre de la même manière que $z \in \operatorname{Ker}(f + \alpha\, Id_E)$. D'où l'existence de la décomposition.

$\boxed{\text{SEP}\ \big(u^2, \lambda\big) = \operatorname{Ker}(u - \alpha Id_E) \bigoplus \operatorname{Ker}(u + \alpha Id_E)}$.

Montrons qu'il existe une base de $\text{SEP}\ \big(u^2, \lambda\big)$ constituée de vecteurs propres de u. Envisageons trois cas.

- $\operatorname{Ker}(u + \alpha Id_E) = \{0_E\}$. Alors $\text{SEP}\ \big(u^2, \lambda\big) = \operatorname{Ker}(u - \alpha Id_E)$ donc toute base de $\text{SEP}\ \big(u^2, \lambda\big)$ est constituée de vecteurs propres de u associés à la valeur propre α.

- $\operatorname{Ker}(u - \alpha Id_E) = \{0_E\}$. Alors $\text{SEP}\ \big(u^2, \lambda\big) = \operatorname{Ker}(u + \alpha Id_E)$ donc toute base de $\text{SEP}\ \big(u^2, \lambda\big)$ est constituée de vecteurs propres de u associés à la valeur propre $-\alpha$.

- $\operatorname{Ker}(u - \alpha Id_E) \neq \{0_E\}$ et $\operatorname{Ker}(u + \alpha Id_E) \neq \{0_E\}$. Soient $\mathcal{S}_1$ une base de $\operatorname{Ker}(u - \alpha Id_E)$ et $\mathcal{S}_2$ une base de $\operatorname{Ker}(u + \alpha Id_E)$. $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ est une base de $\text{SEP}\ \big(u^2, \lambda\big)$ constituée de vecteurs propres de u.

Si λ est une valeur propre non nulle de u^2 telle qu'il existe α dans $\mathbb{K}$ vérifiant $\alpha^2 = \lambda$ alors il existe une base de $\text{SEP}\ \big(u^2, \lambda\big)$ constituée de vecteurs propres de u.

Q3 On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, que $\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$ et que u^2 est diagonalisable. Montrons que u est diagonalisable.

1^er^ cas : u^2 est l'endomorphisme nul.

Alors $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2 = E$. Ainsi u est également l'endomorphisme nul. Par conséquent u est diagonalisable.

2^ème^ cas : u^2 est n'est pas l'endomorphisme nul.

Comme u^2 est diagonalisable, u^2 a au moins une valeur propre non nulle. Notons $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_p$ les valeurs propres non nulles de u^2.

Comme $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, pour tout k dans $[\![1, p]\!]$, il existe α_k dans $\mathbb{K}$ tel que $\alpha_k^2 = \lambda_k$.

D'après la question précédente, pour tout élément k de $[\![1,p]\!]$, il existe une base $\mathcal{B}_k$ de SEP $\big(u^2,\lambda_k\big)$ constituée de vecteurs propres de u.

Distinguons encore deux cas.

a) 0 n'est pas valeur propre de u^2.

$\mathrm{Sp}\, u^2=\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p\}$. u^2 est diagonalisable donc $E=\text{SEP }\big(u^2,\lambda_1\big)\bigoplus\text{SEP }\big(u^2,\lambda_2\big)\cdots\bigoplus\text{SEP }\big(u^2,\lambda_p\big)$.

Alors "$\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2\cdots\cup\mathcal{B}_p$" est une base de E constituée de vecteurs propres de u (et de u^2). Ainsi u est diagonalisable.

b) 0 est valeur propre de u^2.

Soit $\mathcal{B}_0$ une base de $\mathrm{Ker}\, u^2$ et de $\mathrm{Ker}\, u$. Les éléments de $\mathcal{B}_0$ sont des vecteurs propres de u et u^2.

$\mathrm{Sp}\, u^2=\{0,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p\}$. u^2 est diagonalisable donc $E=\mathrm{Ker}\, u^2\bigoplus\text{SEP }(f,\lambda_1)\bigoplus\text{SEP }(f,\lambda_2)\cdots\bigoplus\text{SEP }(f,\lambda_p)$.

Alors $\mathcal{B}_0\cup\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2\cdots\cup\mathcal{B}_p$ est alors une base de E constituée de vecteurs propres de u (et de u^2). Ainsi u est diagonalisable.

Si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, u est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}\, u^2=\mathrm{Ker}\, u$ et u^2 est diagonalisable.

Montrons que le résultat ne vaut pas si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et si l'espace vectoriel considéré est de dimension au moins deux.

Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ une base d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{R}$ avec $n\geqslant 2$.

Considérons l'endomorphisme u de E tel que $u(e_1)=e_2$, $u(e_2)=-e_1$ et $\forall k\in[\![3,n]\!],\ u(e_k)=e_k$.

$\big(u(e_1),u(e_2),\dots,u(e_n)\big)$ étant une base de E, u est un automorphisme de E car il transforme la base $\mathcal{B}$ de E en une base de E.

u^2 est un également un automorphisme de E comme composé de deux automorphismes de E.

Ainsi $\mathrm{Ker}\, u=\mathrm{Ker}\, u^2=\{0_E\}$.

Visiblement $u^2=-Id_E$. Finalement u^2 est diagonalisable et $\mathrm{Ker}\, u^2=\mathrm{Ker}\, u$.

1^{er} cas : $n=2$.

Ici $M_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$. Soit λ un réel. $\lambda\in\mathrm{Sp}\, u\Longleftrightarrow\lambda\in\mathrm{Sp}\, M_{\mathcal{B}}(u)\Longleftrightarrow\begin{vmatrix}-\lambda&-1\\1&-\lambda\end{vmatrix}=0\Longleftrightarrow\lambda^2+1=0.$

Donc u n'a pas de valeur propre et ainsi u n'est pas diagonalisable.

$2^{\text{ème}}$ cas : $n\geqslant 3$.

Soit λ un réel et soit $x=x_1\,e_1+x_2\,e_2+\cdots+x_n\,e_n$ un élément de E.

$$x\in\mathrm{Ker}(u-\lambda\ \mathrm{Id}_E)\Longleftrightarrow(u-\lambda\ \mathrm{Id}_E)(x)=0_E\Longleftrightarrow(M_{\mathcal{B}}(u)-\lambda\ \mathrm{Id}_E)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}.$$

$$x\in\mathrm{Ker}(u-\lambda\ \mathrm{Id}_E)\Longleftrightarrow\begin{cases}-\lambda\,x_1-x_2=0\\x_1-\lambda\,x_2=0\\\forall k\in[\![3,n]\!],\ (1-\lambda)\,x_k=0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x_2=-\lambda\,x_1\\(1+\lambda^2)\,x_1=0\\\forall k\in[\![3,n]\!],\ (1-\lambda)\,x_k=0\end{cases}.$$

$$x\in\mathrm{Ker}(u-\lambda\ \mathrm{Id}_E)\Longleftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2=0\\\forall k\in[\![3,n]\!],\ (1-\lambda)\,x_k=0\end{cases}\text{ car }1+\lambda^2\text{ n'est pas nul.}$$

Si $\lambda\neq 1$: $x\in\mathrm{Ker}(u-\lambda\ \mathrm{Id}_E)\Longleftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2=0\\\forall k\in[\![3,n]\!],\ x_k=0\end{cases}\Longleftrightarrow x=0_E$, et λ n'est pas valeur propre de u.

Supposons que $\lambda=1$. Alors $x\in\mathrm{Ker}(u-\lambda\ \mathrm{Id}_E)\Longleftrightarrow x_1=x_2=0$.

Donc λ est valeur propre de u et SEP $(u, \lambda) = \text{Vect}(e_3, e_4, \ldots, e_n)$.

Finalement $\operatorname{Sp} u = \{1\}$ et $\dim \text{SEP } (u, 1) = n - 2$. Donc u n'est pas diagonalisable.

Dans les deux cas u^2 est diagonalisable, $\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$ et u n'est pas diagonalisable.

$$\boxed{\text{Le résultat ne vaut pas si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ et si } n \geqslant 2.}$$