EXTREMUM SANS CONDITION D'ORDRE 2

Exercice 1 $\forall (x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[,\ f(x,y) = \dfrac{xy}{(1+x^2)(1+y^2)}$.

Étudier les extrema de f.

Posons $\Omega =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme produit de deux ouverts de $\mathbb{R}$.

f est de classe C^1 sur Ω car f est la restriction à Ω d'une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur Ω.

Dans ces conditions si f admet un extremum local en un point A de Ω, $\nabla f(A) = 0_{\mathbb{R}^2}$ donc A est un point critique de f. Cherchons les points critiques de f.

Soit $X=(x,y)\in\Omega$.

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \frac{\partial f}{\partial x}(X) = \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0 \iff \begin{cases} \dfrac{y}{1+y^2}\ \dfrac{(1+x^2)-x\times 2x}{(1+x^2)^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{x}{1+x^2}\ \dfrac{(1+y^2)-y\times 2y}{(1+y^2)^2} = 0 \end{cases}$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \overset{X=(x,y)\in\Omega}{\iff} \begin{cases} 1-x^2=0 \\ 1-y^2=0 \end{cases} \overset{x>0\ y>0}{\iff} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

<u>f admet un point critique et un seul : $A=(1,1)$.</u>

Soit $X=(x,y)\in\Omega$. $f(X)-f(A) = \dfrac{xy}{(1+x^2)(1+y^2)} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{4xy-(1+x^2)(1+y^2)}{4(1+x^2)(1+y^2)}$.

$f(X)-f(A)$ est du signe de $4xy-(1+x^2)(1+y^2)$

$4xy-(1+x^2)(1+y^2) = 2xy - 1 - x^2y^2 + 2xy - x^2 - y^2$

$4xy-(1+x^2)(1+y^2) = -(xy-1)^2-(x-y)^2 \leqslant 0$.

$\forall X=(x,y)\in\Omega,\ f(X)-f(A)\leqslant 0$.

<u>f admet en A un maximum global qui vaut $1/4$.</u>

<u>Exercice</u>.. Retrouver ce résultat en étudiant $t\mapsto \dfrac{t}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$!

EXTREMUM SANS CONDITION D'ORDRE 2

Exercice 1 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-2x+4}{x^2+y^2+2x+4}$.

Étudier les extrema de f.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2+2x+4 = (x+1)^2+y^2+3 > 0$.

$(x,y) \mapsto x^2+y^2-2x+4$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynôme.

$(x,y) \mapsto x^2+y^2+2x+4$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynôme et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$.

Ainsi f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2$ est un ouvert. Alors si f admet un extremum local en un point A de $\mathbb{R}^2$, $\nabla f(A) = 0_{\mathbb{R}^2}$ et A est un point critique de f.

Cherchons les points critiques de f. Soit $X=(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(X) = \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{(x^2+y^2+2x+4)^2}\left[(2x-2)(x^2+y^2+2x+4)-(x^2+y^2-2x+4)(2x+2)\right]=0 \\ \dfrac{1}{(x^2+y^2+2x+4)^2}\left[2y(x^2+y^2+2x+4)-(x^2+y^2-2x+4)2y\right]=0 \end{cases}$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2x(x^2+y^2+2x+4-x^2-y^2+2x-4)-2(x^2+y^2+2x+4+x^2+y^2-2x+4) \\ 0 = 2y(x^2+y^2+2x+4-x^2-y^2+2x-4) = 8xy \end{cases}$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ 8x^2-4(x^2+y^2+4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2+4=0\ ! \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=0 \\ \text{ou} \\ 2x^2-(x^2+4)=0 \end{cases}$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$$

<u>f admet deux points critiques : $A=(2,0)$ et $B=(-2,0)$.</u>

$$f(A) = \frac{4-4+4}{4+4+4} = \frac{1}{3} \text{ et } f(B) = \frac{4+4+4}{4-4+4} = 3.$$

Soit $H = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(A+H) - f(A) = \frac{(2+\alpha)^2 + \beta^2 - 2(2+\alpha) + 4}{(2+\alpha)^2 + \beta^2 + 2(2+\alpha) + 4} - \frac{1}{3} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha + 4}{\alpha^2 + \beta^2 + 6\alpha + 12} - \frac{1}{3}$$

$$f(A+H) - f(A) = \frac{3\alpha^2 + 3\beta^2 + 6\alpha + 12 - \alpha^2 - \beta^2 - 6\alpha - 12}{3\left[(\alpha+3)^2 + \beta^2 + 3\right]} = \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2}{3\left[(\alpha+3)^2 + \beta^2 + 3\right]} \geqslant 0$$

$\forall H \in \mathbb{R}^2$, $f(A+H) - f(A) \geqslant 0$. $\underline{\underline{f \text{ admet en } A \text{ un minimum global qui vaut } 1/3}}$

Soit $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$(-x, y) \in \mathbb{R}^2$ donc $f(-x, y) = \dfrac{x^2+y^2+2x+4}{x^2+y^2-2x+4} \geqslant f(A) = \dfrac{1}{3}$; $\dfrac{x^2+y^2+2x+4}{x^2+y^2-2x+4} \geqslant \dfrac{1}{3}$

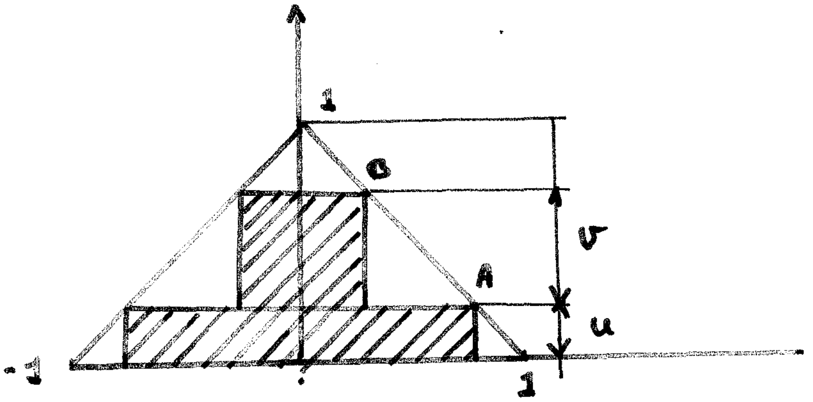
Alors $3 \geqslant \dfrac{x^2+y^2-2x+4}{x^2+y^2+2x+4} = f(X)$ ou $f(B) \geqslant f(X)$.

$\forall X \in \mathbb{R}^2$, $f(X) \leqslant f(B)$. $\underline{\underline{f \text{ admet en } B \text{ un maximum global qui vaut } 3.}}$

EXTREMUM SANS CONDITION D'ORDRE 2

Exercice

Trouver u et v pour que la surface hachurée soit maximum.



Les points A et B sont sur la droite d'équation $y = -x+1$.

Notons (x_A, y_A) et (x_B, y_B) les coordonnées de A et B.

$y_A = u$ et $y_B = u+v$. Alors $x_A = 1 - y_A = 1-u$ et $x_B = 1 - y_B = 1-u-v$.

La surface hachurée est $2u(1-u) + 2v(1-u-v) = 2[u+v-u^2-v^2-uv]$.

Posons alors $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y) = 2[x+y-x^2-y^2-xy]$.

f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Si f possède un extremum local en un point A de $\mathbb{R}^2$, A est un point critique de f. Cherchons les points critiques de f. Soit $X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(X) = \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}1-2x-y=0\\1-2y-x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-2x-y=0\\x-y=0\end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{3}.$$

$A=(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ est le seul point critique de f. Soit $H=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

$$f(A+H)-f(A) = 2\left[(\tfrac{1}{3}+\alpha)+(\tfrac{1}{3}+\beta)-(\tfrac{1}{3}+\alpha)^2-(\tfrac{1}{3}+\beta)^2-(\tfrac{1}{3}+\alpha)(\tfrac{1}{3}+\beta)\right] - 2\left[\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{9}\right]$$

$$f(A+H)-f(A) = 2\left[\tfrac{1}{3}+\alpha+\tfrac{1}{3}+\beta-\tfrac{1}{9}-\tfrac{2}{3}\alpha-\alpha^2-\tfrac{1}{9}-\tfrac{2}{3}\beta-\beta^2-\tfrac{1}{9}-\tfrac{\alpha}{3}-\tfrac{\beta}{3}-\alpha\beta - \tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{9}\right]$$

$$f(A+H)-f(A) = 2(-\alpha^2-\beta^2-\alpha\beta) = -2\left[(\alpha+\tfrac{\beta}{2})^2+\tfrac{3\beta^2}{4}\right] \le 0.$$

$\forall H\in\mathbb{R}^2$, $f(A+H)-f(A)\le 0$. f admet sur $\mathbb{R}^2$ un maximum global en $A=(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ qui vaut $\frac{2}{3}$.

Remarque $0 \le \frac{1}{3} \le \frac{1}{3}+\frac{1}{3} \le 1$.

Nous pouvons alors dire que la surface hachurée est maximum pour $u=v=\frac{1}{3}$.

EXTREMUM SANS CONDITION D'ORDRE 2

Exercice 1 $\mathcal{R}$ est un repère orthonormé du plan $\mathcal{P}$.

$\mathcal{C}_1$ est la parabole d'équation $y = x^2$ dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{C}_2$ est la droite d'équation $y = x - 2$ dans $\mathcal{R}$.

Calculer la distance de $\mathcal{C}_1$ à $\mathcal{C}_2$.

Il s'agit de calculer $\alpha = \inf_{M\in\mathcal{C}_1,\, N\in\mathcal{C}_2} d(M,N)$.

Soit M un point de $\mathcal{C}_1$ d'abscisse a et N un point de $\mathcal{C}_2$ d'abscisse b.

L'ordonnée de M (resp. N) est a^2 (resp. $b-2$).

$d(M,N)=\sqrt{(b-a)^2+(b-2-a^2)^2}$; $d^2(M,N)=(b-a)^2+(b-2-a^2)^2$.

Notons que $\alpha\in\mathbb{R}_+$ et que $\alpha^2=\inf_{M\in\mathcal{C}_1,\, N\in\mathcal{C}_2} d^2(M,N)$. Cherchons donc $\inf_{M\in\mathcal{C}_1,\, N\in\mathcal{C}_2} d^2(M,N)$.

Ce qui revient à trouver $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left[(b-a)^2+(b-2-a^2)^2\right]$.

Posons $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x-y)^2+(x-2-y^2)^2$

f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynôme. Soit $X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$L_2 \leftarrow (L_1+L_2)/2$

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(X)=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(X)=0\end{cases} \iff \begin{cases}2(x-y)+2(x-2-y^2)=0\\ -2(x-y)+2(-2y)(x-2-y^2)=0\end{cases} \iff \begin{cases}x-y+(x-2-y^2)=0\\ (x-2-y^2)\left[1-2y\right]=0\end{cases}$$

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases}y=1/2\\ x-\frac{1}{2}+x-2-\frac{1}{4}=0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x-2-y^2=0\\ x-y=0\end{cases} \iff \begin{cases}y=1/2\\ 2x=2+\frac{3}{4}\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}y=x\\ 0=x-2-x^2=-(x^2-x+2)\end{cases}$$

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases}y=\frac{1}{2}\\ x=\frac{1}{2}\left(\frac{11}{4}\right)=\frac{11}{8}\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}y=x\\ 0=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\end{cases} \quad !$$

$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^2} \iff x=\frac{11}{8}$ et $y=\frac{1}{2}$.

Ainsi $A=\left(\frac{11}{8},\frac{1}{2}\right)$ est le seul point critique de f.

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (y-x)^2 + (x-2-y^2)^2 = y^2 + x^2 - 2xy + x^2 + 4 + y^4 - 4x + 4y^2 - 2xy^2$

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y) = y^4 + 5y^2 + 2x^2 - 4x - 2xy - 2xy^2 + 4$

$f(A) = f\left(\frac{11}{8},\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{11}{8}\right)^2 - \frac{44}{8} - 2\,\frac{11}{8}\,\frac{1}{2} - 2\,\frac{11}{8}\times\frac{1}{4} + 4\,]$

$f(A) = \frac{1}{32}\left[2 + 40 + 121 - 176 - 44 - 22 + 128\right] = \frac{49}{32}.$

Soit $H = (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

$f(A+H) - f(A) = \left(\frac{1}{2}+\beta\right)^4 + 5\left(\frac{1}{2}+\beta\right)^2 + 2\left(\frac{11}{8}+\alpha\right)^2 - 4\left(\frac{11}{8}+\alpha\right) - 2\left(\frac{11}{8}+\alpha\right)\left(\frac{1}{2}+\beta\right) - 2\left(\frac{11}{8}+\alpha\right)\left(\frac{1}{2}+\beta\right)^2 + 4 - \frac{49}{32}$

$f(A+H) - f(A) = \beta^4 + 4\times\frac{1}{2}\beta^3 + 6\times\frac{1}{4}\beta^2 + 4\times\frac{1}{8}\beta + 5\beta^2 + 5\beta + 2\alpha^2 + \frac{11}{2}\alpha - 4\alpha - \alpha - 2\alpha\beta - \frac{11}{4}\beta - 2\alpha\beta^2 - 2\alpha\beta - \frac{\alpha}{2}$
$- \frac{11}{4}\beta - \frac{11}{4}\beta^2.$ (les constantes partent !)

$f(A+H) - f(A) = \beta^4 + 2\beta^3 + \frac{15}{4}\beta^2 + 2\alpha^2 - 4\alpha\beta - 2\alpha\beta^2.$

$f(A+H) - f(A) = 2\left(\alpha^2 - 2\alpha\beta - \alpha\beta^2\right) + \beta^4 + 2\beta^3 + \frac{15}{4}\beta^2.$

$f(A+H) - f(A) = 2\left[\left(\alpha - \beta - \frac{\beta^2}{2}\right)^2 - \left(\beta + \frac{\beta^2}{2}\right)^2\right] + \beta^4 + 2\beta^3 + \frac{15}{4}\beta^2$

$f(A+H) - f(A) = 2\left(\alpha - \beta - \frac{\beta^2}{2}\right)^2 - 2\beta^2 - \frac{\beta^4}{2} - 2\beta^3 + \beta^4 + 2\beta^3 + \frac{15}{4}\beta^2$

$f(A+H) - f(A) = 2\left(\alpha - \beta - \frac{\beta^2}{2}\right)^2 + \frac{\beta^4}{2} + \frac{7\beta^2}{2} \geqslant 0$!!

Alors f admet un minimum global atteint en le seul point $A = \left(\frac{11}{8},\frac{1}{2}\right)$ qui vaut $\frac{49}{32}$.

Alors $\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\left[(b-a)^2 + (b-2-a^2)^2\right]$ existe, vaut $\frac{49}{32}$ et est atteint uniquement au point $\left(\frac{1}{2},\frac{11}{8}\right)$ (ok !! ; "$b=x$ et $a=y$" !!)

Alors $d^2 = \frac{49}{32}$ et ainsi $\underline{\underline{d(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2) = \alpha = \frac{7}{4\sqrt{2}}}}$.

<u>Remarque..</u> $\exists!\,(M_0,N_0)\in\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2,\ d(M_0,N_0) = d(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)$.

M_0 a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ et N_0 a pour coordonnées $\left(\frac{11}{8},-\frac{5}{8}\right)$.

EXTREMUM AVEC OU SANS CONDITION D'ORDRE 2

Exercice 1 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^4 + 2x^2 + y^2 - 4xy + 4x - 4y + 3.$

Montrer que f admet un point critique et un seul A.

f admet-elle un extremum en A ?

---

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynôme. Soit $X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^2} \iff \frac{\partial f}{\partial x}(X)=\frac{\partial f}{\partial y}(X)=0 \iff \begin{cases} 4x^3+4x-4y+4=0 \\ 2y-4x-4=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=2x+2 \\ x^3+x-2x-2+1=0 \end{cases}$$

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases} y=2x+2 \\ x^3-x-1=0 \end{cases}.$$

Posons $\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi(x)=x^3-x-1$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi'(x)=3x^2-1=3\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{3}$		$1/\sqrt{3}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	a	$\searrow$	b	$\nearrow$	$+\infty$

$a=\varphi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-1=\frac{1}{3\sqrt{3}}(-3\sqrt{3}+2)<0$

$b=\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}-1=\frac{1}{3\sqrt{3}}(-2-3\sqrt{3})<0$

φ est croissante sur $\left]-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ et décroissante sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

$\forall x\in\left]-\infty,\frac{1}{\sqrt{3}}\right],\ \varphi(x)\leq\varphi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)<0.$

φ est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right[$, $\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=b$ et $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$.

φ définit une bijection de $\left[\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right[$ sur $[b,+\infty[$.

$0\in[b,+\infty[$ car $b<0$; ainsi $\exists!\ \gamma\in[b,+\infty[,\ \varphi(\gamma)=0$.

Finalement l'équation $x\in\mathbb{R}$ et $\varphi(x)=0$ admet une solution et une seule : γ.

Alors $\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases} x=\gamma \\ y=2x+2=2\gamma+2 \end{cases}.$

<u>f admet un point critique et un seul $A=(\gamma,2\gamma+2)$.</u>

Exercice .. Notons que $\gamma = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{23}{27}}\right)} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{23}{27}}\right)}$ $(\simeq 1{,}324\,717\,957)$

Soit $H=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

$$f(A+H)-f(A) = (\gamma+\alpha)^4+2(\gamma+\alpha)^2+(2\gamma+2+\beta)^2-4(\gamma+\alpha)(2\gamma+2+\beta)+4(\gamma+\alpha)$$
$$-4(2\gamma+2+\beta)+3-\left[\gamma^4+2\gamma^2+(2\gamma+2)^2+4\gamma-4(2\gamma+2)+3\right]$$

$$f(A+H)-f(A) = 4\gamma^3\alpha+6\gamma^2\alpha^2+4\gamma\alpha^3+\alpha^4+2\alpha^2+4\alpha\gamma+(4\gamma+4)\beta+\beta^2-4\alpha(2\gamma+2)-4\alpha\beta-4\gamma\beta$$
$$+4\alpha-4\beta \quad \text{(les constantes disparaissent)}$$

$$f(A+H)-f(A) = \alpha^4 \underset{4\alpha^3\gamma}{\wedge} +6\alpha^2\gamma^2+2\alpha^2+\beta^2-4\alpha\beta+4\alpha(\underbrace{\gamma^3+\gamma-2\gamma-2+1}_{=\gamma^3-\gamma-1=0})+4\beta(\underbrace{\gamma+1-\gamma-1}_{=0})$$

$$f(A+H)-f(A) = \alpha^4+4\alpha^3\gamma+6\alpha^2\gamma^2+2\alpha^2+\beta^2-4\alpha\beta.$$

$$f(A+H)-f(A) = (\beta-2\alpha)^2-4\alpha^2+\alpha^4+4\alpha^3\gamma+6\alpha^2\gamma^2+2\alpha^2$$

$$f(A+H)-f(A) = (\beta-2\alpha)^2+\alpha^2(\alpha^2+4\alpha\gamma+6\gamma^2-2)$$

$$f(A+H)-f(A) = (\beta-2\alpha)^2+\alpha^2\left((\alpha+2\gamma)^2+2(\gamma^2-1)\right)$$

φ est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right[$.

Or $\gamma\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right[$, $1\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right[$, $\varphi(\gamma)=0$ et $\varphi(1)=-1$.

Ainsi $\gamma>1$. Donc $\gamma^2>1$.

Alors $f(A+H)-f(A)\geqslant 0$.

$\forall H\in\mathbb{R}^2$, $f(A+H)-f(A)\geqslant 0$.

f admet un minimum absolu en $A=(\gamma, 2\gamma+2)$.

EXTREMUM AVEC OU SANS CONDITION D'ORDRE 2

Exercice 1 Étudier les extrema de $f:(x,y)\to x^3+xy+y^3$ sur $\mathbb{R}^2$.

---

f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car f est une fonction polynôme et $\mathbb{R}^2$ est ouvert. Ainsi si f admet un extremum en un point A de $\mathbb{R}^2$, A est un point critique de f.

Cherchons les points critiques de f. Soit $X=(x,y)$ un élément de $\mathbb{R}^2$.

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(X)=\frac{\partial f}{\partial y}(X)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+y=0 \\ x+3y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3x^2 \\ 0=x+3(-3x^2)^2=x(1+27x^3) \end{cases}$$

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^3=\left(\frac{-1}{3}\right)^3 \\ y=-3x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=-1/3 \\ y=-1/3 \end{cases}.$$

<u>f admet deux points critiques : $O=(0,0)$ et $A=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.</u>

→ V) Soit $H=(\alpha,\beta)$. $f(O+H)-f(O)=f(H)=\alpha^3+\alpha\beta+\beta^3$.

<u>Remarque</u> .. si $\beta=0$ $f(O+H)-f(O)=\alpha^3$... qui ne garde pas ...

Montrons que f n'a pas d'extremum en O.

Soit $r\in\mathbb{R}_+^*$. Posons $H_1=\left(\frac{r}{2},0\right)$ et $H_2\left(-\frac{r}{2},0\right)$.

$H_1\in B(O,r)$, $H_2\in B(O,r)$, $f(O+H_1)-f(O)=\left(\frac{r}{2}\right)^3>0$ et $f(O+H_2)-f(O)=\left(-\frac{r}{2}\right)^3<0$.

$\forall r\in\mathbb{R}_+^*$, $\exists H_1\in B(O,r)$, $\exists H_2\in B(O,r)$, $f(O+H_1)-f(O)>0$ et $f(O+H_2)-f(O)<0$

<u>f n'a pas d'extremum en O.</u>

$$f(A+H)-f(A)=\left(-\frac{1}{3}+\alpha\right)^3+\left(-\frac{1}{3}+\alpha\right)\left(-\frac{1}{3}+\beta\right)+\left(-\frac{1}{3}+\beta\right)^3-\left(-\frac{1}{3}\right)^3-\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)^3$$

$$f(A+H)-f(A)=3\left(-\frac{1}{3}\right)^2\alpha+3\left(-\frac{1}{3}\right)\alpha^2+\alpha^3-\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{3}\beta+\alpha\beta+3\left(-\frac{1}{3}\right)^2\beta+3\left(-\frac{1}{3}\right)\beta^2+\beta^3$$

$$f(A+H)-f(A)=-\alpha^2+\alpha^3+\alpha\beta-\beta^2+\beta^3\leq-\alpha^2+\alpha^3-\beta^2+\beta^3+\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\beta^2.$$

$2\alpha\beta\leq\alpha^2+\beta^2$ donc $\alpha\beta\leq\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)$

$$f(A+H)-f(A)\leq-\left[\frac{\alpha^2}{2}-\alpha^3+\frac{\beta^2}{2}-\beta^3\right]=-\left[\alpha^2\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)+\beta^2\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\right]$$

Notons que si $\alpha \leq \frac{1}{2}$ et $\beta \leq \frac{1}{2}$: $f(A+H) - f(A) \leq -\left[\alpha^2\left(\frac{1}{2}-\alpha\right) + \beta^2\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\right] \leq 0$

$\alpha \leq \frac{1}{2}$ et $\beta \leq \frac{1}{2}$ dès que $\max(|\alpha|, |\beta|) \leq \frac{1}{2}$

Or $\max(|\alpha|, |\beta|) \leq \|(\alpha,\beta)\| = \|H\|$.

Supposons alors que $H \in B(0, \frac{1}{2})$.

$\max(|\alpha|, |\beta|) \leq \|(\alpha,\beta)\| = \|H\| < \frac{1}{2}$; $|\alpha| < \frac{1}{2}$ et $|\beta| < \frac{1}{2}$; $\alpha < \frac{1}{2}$ et $\beta < \frac{1}{2}$.

Alors $\left[\alpha^2\left(\frac{1}{2}-\alpha\right) + \beta^2\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\right] \geq 0$. Ainsi $f(A+H) - f(A) \leq 0$.

$\forall H \in B(0, \frac{1}{2})$, $f(A+H) - f(A) \leq 0$. <u>f admet un maximum local en A.</u>

→ Ve f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car f est une fonction polynôme. Soit $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) = 6y$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) = 1$.

En O $rt - s^2 = 0 \times 0 - 1^2 = -1 < 0$. f n'a pas d'extremum en O.

En A $rt - s^2 = \left(6\left(-\frac{1}{3}\right)\right)^2 - 1 = 3 > 0$ et $r = 6\left(-\frac{1}{3}\right) < 0$.

f admet un maximum local en A.

EXTREMUM AVEC OU SANS CONDITION D'ORDRE 2

Exercice 1 $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{2}+xyz+y-z$. Éudier les extrema de f.

f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$ comme fonction polynôme.

Donc f est de classe C^1 (!) sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$. Ainsi si f admet en un point A de $\mathbb{R}^3$ un extremum local, $\nabla f(A)=0$. A est un point critique de f.

Cherchons les points critiques de f. Soit $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(X)=\frac{\partial f}{\partial y}(X)=\frac{\partial f}{\partial z}(X)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+yz=0\\ xz+1=0\\ xy-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0\\ z=-1/x\\ y=1/x\\ 0=x-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^3-1}{x^2}\end{cases}$$

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0\\ x^3=1\\ z=-1/x\\ y=1/x\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=1\\ y=1\\ z=-1\end{cases}.$$

f admet un point critique et un seul le point $A=(1,1,-1)$.

Version 1.- Sans condition d'ordre 2

Soit $H=(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$.

$f(A+H)-f(A)=\frac{1}{2}(1+\alpha)^2+(1+\alpha)(1+\beta)(-1+\gamma)+1+\beta-(-1+\gamma)-\left(\frac{1}{2}-1+1+1\right)$.

$f(A+H)-f(A)=\frac{1}{2}+\alpha+\frac{\alpha^2}{2}+(1+\alpha+\beta+\alpha\beta)(-1+\gamma)+1+\beta+1-\gamma-\frac{3}{2}$.

$f(A+H)-f(A)=\frac{1}{2}+\alpha+\frac{\alpha^2}{2}-1-\alpha-\beta-\alpha\beta+\gamma+\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\beta\gamma+\beta-\gamma+\frac{1}{2}$

$f(A+H)-f(A)=\frac{\alpha^2}{2}-\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\beta\gamma$.

Notons que si $\beta=\gamma=0$: $f(A+H)-f(A)=\frac{\alpha^2}{2}$ et si $\alpha=\beta$ et $\gamma=0$:

$f(A+H)-f(A)=-\frac{\alpha^2}{2}$.

Soit $r\in\mathbb{R}_+^*$. Posons $H_1=\left(\frac{r}{3},0,0\right)$. $\|H_1\|=\sqrt{\left(\frac{r}{3}\right)^2+0^2+0^2}=\frac{r}{3}<r$.

$H_1\in B(0,r)$ et $f(A+H_1)-f(A)=\dfrac{(r/3)^2}{2}>0$.

Pour $H_2 = (\frac{r}{3}, \frac{r}{3}, 0)$. $\|H_2\| = \sqrt{(\frac{r}{3})^2 + (\frac{r}{3})^2 + 0^2} = \sqrt{2}\,\frac{r}{3} < r$; $H_2 \in B(0,r)$.

De plus $f(A+H_2) - f(A) = -\frac{(r/3)^2}{2} < 0$.

$\forall r \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists H_1 \in B(0,r)$, $\exists H_2 \in B(0,r)$, $f(A+H_1) - f(A) > 0$ et $f(A+H_2) - f(A) < 0$.

<u>f ne possède pas d'extremum local en A.</u>

<u>Version 2</u> Avec condition d'ordre 2. Nous avons vu que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$.

$\forall X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(X) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) = z$; $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(X) = y$ et

$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(X) = x$.

Ainsi $\nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $H = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

$q_A(H) = \alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma = (\alpha - \beta + \gamma)^2 - (-\beta + \gamma)^2 + 2\beta\gamma$

$q_A(H) = (\alpha - \beta + \gamma)^2 - (\beta^2 - 4\beta\gamma + \gamma^2) = (\alpha - \beta + \gamma)^2 - (\beta - 2\gamma)^2 + 3\gamma^2$.

Pour $H_1 = (1,0,0)$; $q_A(H_1) = 1 > 0$ Pour $H_2 = (1,1,0)$; $q_A(H_2) = -1 < 0$

Ainsi <u>f ne possède pas d'extremum local en A.</u>

Exercice Extremum de $f : (x,y) \to x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

f est une fonction polynôme donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ et même $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Si f admet un extremum local en un point A de l'ouvert $\mathbb{R}^2$: $\nabla f(A) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

Cherchons les points critiques de f. Soit $X=(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(X) = \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4(x-y) = 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = x-y \\ -y^3 = x-y \end{cases}$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = -y^3 \\ x^3 = x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^3 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2 = 2 \\ y = -x \end{cases}$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$$

Ainsi f admet trois points critiques $O=(0,0)$, $A=(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $B=(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

Etudions si f admet en O, A ou B un extremum local.

Notons que $f(B)=f(A)$! mieux $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(-x,-y) = f(x,y)$.

<u>**Version 1.**</u> A la main !

(*) Soit $H=(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. $f(O+H)-f(O) = \alpha^4+\beta^4-2(\alpha-\beta)^2$.

Si $\beta=\alpha$: $f(O+H)-f(O) = 2\alpha^4$ qui est strictement positif si $\alpha \neq 0$

Si $\beta=0$: $f(O+H)-f(O) = \alpha^4 - 2\alpha^2 = \alpha^2(\alpha^2-2)$ qui est strictement négatif si $\alpha^2<2$ et $\alpha^2 \neq 0$.

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $H_1 = \left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right)$ et $H_2 = \left(\min\left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), 0\right)$!!

$\|H_1\|_2 = \sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{r^2}{4}} = \frac{r}{\sqrt{2}} < r$ donc $H_1 \in B(O,r)$ de plus $f(O+H_1)-f(O) = 2\left(\frac{r}{2}\right)^4 > 0$.

$\|H_2\| = \left|\min\left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| = \min\left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leqslant \frac{r}{2} < r$; $H_2 \in B(O,r)$.

Posons $\delta = \min\left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. $f(O+H_2)-f(O) = \delta^2(\delta^2-2) < 0$ car $0<\delta<\sqrt{2}$.

$\forall r \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists H_1 \in B(0,r)$, $\exists H_2 \in B(0,r)$, $f(0+H_1)-f(0)>0$ et $f(0+H_2)-f(0)<0$.

f n'admet pas d'extremum local en O.

(*) Soit $H=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

$$f(A+H)-f(A) = (\sqrt{2}+\alpha)^4+(-\sqrt{2}+\beta)^4-2(\sqrt{2}+\alpha+\sqrt{2}-\beta)^2-(-8).$$

$$f(A+H)-f(A) = (\sqrt{2})^4+4(\sqrt{2})^3\alpha+6(\sqrt{2})^2\alpha^2+4\sqrt{2}\alpha^3+\alpha^4+(-\sqrt{2})^4+4(-\sqrt{2})^3\beta+6(-\sqrt{2})^2\beta^2$$
$$+4(-\sqrt{2})\beta^3+\beta^4-2\left((2\sqrt{2})^2+\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta+4\sqrt{2}\alpha-4\sqrt{2}\beta\right)+8$$

$$f(A+H)-f(A) = 4+8\sqrt{2}\alpha+12\alpha^2+4\sqrt{2}\alpha^3+\alpha^4+4-8\sqrt{2}\beta+12\beta^2-4\sqrt{2}\beta^3+\beta^4$$
$$-16-2\alpha^2-2\beta^2+4\alpha\beta-8\sqrt{2}\alpha+8\sqrt{2}\beta+8$$

$$f(A+H)-f(A)=\alpha^4+\beta^4+10\alpha^2+10\beta^2+4\sqrt{2}\alpha^3-4\sqrt{2}\beta^3+4\alpha\beta$$

$$f(A+H)-f(A)=\alpha^2[\alpha^2+4\sqrt{2}\alpha+10]+\beta^2[\beta^2-4\sqrt{2}\beta+10]+4\alpha\beta$$

$$f(A+H)-f(A)=\alpha^2[(\alpha+2\sqrt{2})^2+2]+\beta^2[(\beta-2\sqrt{2})^2+2]+4\alpha\beta$$

$$f(A+H)-f(A)=\alpha^2(\alpha+2\sqrt{2})^2+\beta^2(\beta-2\sqrt{2})^2+2\alpha^2+2\beta^2+4\alpha\beta.$$

$$f(A+H)-f(A)=\alpha^2(\alpha+2\sqrt{2})^2+\beta^2(\beta-2\sqrt{2})^2+2(\alpha+\beta)^2\geqslant 0.$$

f admet en A un minimum absolu qui vaut -8.

Comme $f(B)=f(A)$: f admet en B un minimum absolu qui vaut -8.

Version 2 utilisant les conditions d'ordre 2.

Nous avons vu que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et que :

$\forall X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(X)=4x^3-4(x-y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(X)=4y^3+4(x-y)$. Alors

$\forall X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X)=12x^2-4$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(X)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(X)=4$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X)=12y^2-4$

Alors la hessienne de f en X est $\nabla^2 f(X) = \begin{pmatrix} 12x^2-4 & 4 \\ 4 & 12y^2-4 \end{pmatrix}$.

$rt-s^2 = (12x^2-4)(12y^2-4) - 16 = (12)^2 x^2 y^2 - 4\times 12 y^2 - 4\times 12 x^2$

$rt-s^2 = 48\,[3x^2y^2 - x^2 - y^2]$

Si $X=0$, $rt-s^2=0$ et on ne peut pas conclure !!

Si $X = A$ ou B $\quad rt-s^2 = 48\,[3\times 2\times 2 - 2 - 2] > 0$ et $r = 12\times 2 - 4 > 0$

Alors f admet en A et B un minimum ...local...

EXTREMUM AVEC OU SANS CONDITION D'ORDRE 2

Exercice 1 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = xy - x^2y - xy^2$. Etudier les extrema de f.

f est de classe C^1 et même C^2, comme fonction polynôme, sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

Si f admet un extremum local en un point A de $\mathbb{R}^2$, $\nabla f(A) = 0$ donc A est un point critique de f. Cherchons les points critiques de f. Soit $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(X) = \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2xy - y^2 = 0 \\ x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1-2x-y) = 0 \\ x(1-x-2y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x(1-x) = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y \neq 0 \\ y = 1-2x \\ x(1-x-2+4x) = 0 \end{cases}$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y \neq 0 \\ y = 1-2x \\ x(3x-1) = 0 \end{cases}$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 1/3 \end{cases}.$$

f admet quatre points critiques $O = (0,0)$, $A = (1,0)$, $B = (0,1)$ et $C = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

<u>Version 1..</u> Avec les conditions d'ordre 2.

$\forall X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) = -2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) = -2x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) = 1 - 2x - 2y$

	O	A	B	C
$rt - s^2$	-1	-1	-1	$1/3$
r				$-2/3$
	RIEN	RIEN	RIEN	MAX LOC.

f ne présente pas d'extremum en O, A et B.

f présente un maximum local en C.

Version 2 .. Sans la condition d'ordre 2.

$\boxed{O}$ * Soit $H=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. $f(O+H)-f(O)=\alpha\beta-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2=\alpha\beta(1-\alpha-\beta)$

$O=(0,0)$ Si $\alpha=\beta$ $f(O+H)-f(O)=\alpha^2(1-2\alpha)$

Si $\alpha=-\beta$ $f(O+H)-f(O)=-\alpha^2$

Soit $r\in\mathbb{R}_+^*$. Posons $H_1=\left(-\frac{r}{2},-\frac{r}{2}\right)$ et $H_2=\left(\frac{r}{2},-\frac{r}{2}\right)$.

$\|H_1\|=\|H_2\|=\frac{1}{\sqrt{2}}r<r$ donc $H_1\in B(O,r)$ et $H_2\in B(O,r)$.

$f(O+H_1)-f(O)=\left(-\frac{r}{2}\right)^2\left(1-2\left(-\frac{r}{2}\right)\right)>0$. $f(O+H_2)-f(O)=-\left(\frac{r}{2}\right)^2<0$.

$\forall r\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists H_1\in B(O,r),\ \exists H_2\in B(O,r),\ f(O+H_1)-f(O)>0$ et $f(O+H_2)-f(O)<0$.

f n'admet pas d'extremum local en O.

$\boxed{A}$ * Soit $H=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. $f(A+H)-f(A)=(1+\alpha)\beta-(1+\alpha)^2\beta-(1+\alpha)\beta^2-0$

$A=(1,0)$ $f(A+H)-f(A)=\beta+\alpha\beta-\beta-2\alpha\beta-\alpha^2\beta-\beta^2-\alpha\beta^2=-\alpha\beta-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2-\beta^2=-\beta(\alpha+\beta)(1+\alpha)$

$$f(A+H)-f(A)=\begin{cases}-\beta^2 & \text{si } \alpha=0\\ \frac{\alpha^2}{4}(1+\alpha) & \text{si } \beta=-\frac{\alpha}{2}.\end{cases}$$

Soit $r\in\mathbb{R}_+^*$. Posons $H_1=\left(\frac{r}{2},-\frac{r}{4}\right)$. $\|H_1\|=\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{r^2}{16}}<r$; $H_1\in B(O,r)$ et

$f(A+H_1)-f(A)=\frac{(r/2)^2}{4}\left(1+\frac{r}{2}\right)>0$.

Posons $H_2=\left(0,\frac{r}{2}\right)$. $\|H_2\|=\sqrt{0^2+\frac{r^2}{4}}<r$; $H_2\in B(O,r)$ et

$f(A+H_2)-f(A)=-\left(\frac{r}{2}\right)^2<0$.

$\forall r\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists H_1\in B(O,r),\ \exists H_2\in B(O,r),\ f(A+H_1)-f(A)>0$ et $f(A+H_2)-f(A)<0$.

f n'a pas d'extremum local en A.

$\boxed{B}$ * f étant symétrique en x et y, l'étude précédente permet de

$B=(0,1)$ dire que f n'a pas d'extremum local en B.

$\boxed{C}$ * Soit $H = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$C = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

$$f(C+H) - f(C) = (\tfrac{1}{3}+\alpha)(\tfrac{1}{3}+\beta) - (\tfrac{1}{3}+\alpha)^2(\tfrac{1}{3}+\beta) - (\tfrac{1}{3}+\alpha)(\tfrac{1}{3}+\beta)^2 - \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{27} + \tfrac{1}{27}.$$

$\frac{1}{9} - \frac{1}{9} = 0 !!$

$$f(C+H) - f(C) = \tfrac{1}{3}\alpha + \tfrac{1}{3}\beta + \alpha\beta - (\tfrac{1}{9} + \tfrac{2}{3}\alpha + \alpha^2)(\tfrac{1}{3}+\beta) - (\tfrac{1}{3}+\alpha)(\tfrac{1}{9} + \tfrac{2}{3}\beta + \beta^2) + \tfrac{2}{27}.$$

$$f(C+H) - f(C) = \overline{\tfrac{1}{3}\alpha} + \overline{\tfrac{1}{3}\beta} + \alpha\beta - \overline{\tfrac{1}{27}} - \overline{\tfrac{2}{9}\alpha} - \tfrac{1}{3}\alpha^2 - \overline{\tfrac{\beta}{9}} - \tfrac{2}{3}\alpha\beta - \alpha^2\beta - \overline{\tfrac{1}{27}} - \overline{\tfrac{2}{9}\beta} - \tfrac{1}{3}\beta^2 - \overline{\tfrac{\alpha}{9}}$$
$$- \tfrac{2}{3}\alpha\beta - \alpha\beta^2 + \overline{\tfrac{2}{27}}$$

$$f(C+H) - f(C) = \alpha\beta - \tfrac{1}{3}\alpha^2 - \tfrac{2}{3}\alpha\beta - \alpha^2\beta - \tfrac{1}{3}\beta^2 - \tfrac{2}{3}\alpha\beta - \alpha\beta^2.$$

$$f(C+H) - f(C) = -\tfrac{1}{3}\left[+\alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2\right]$$

$$f(C+H) - f(C) = -\tfrac{1}{3}\left[\tfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta) + \tfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2) + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2\right]$$

$$f(C+H) - f(C) = -\tfrac{1}{3}\left[\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)^2 + \alpha^2(\tfrac{1}{2}+3\beta) + \beta^2(\tfrac{1}{2}+3\alpha)\right]$$

Remarque si $\frac{1}{2} + 3\beta \geq 0$ et $\frac{1}{2} + 3\alpha \geq 0$ alors $f(C+H) - f(C) \leq 0$.

Donc si $\beta \geq -\frac{1}{6}$ et $\alpha \geq -\frac{1}{6}$ alors $f(C+H) - f(C) \leq 0$.

Supposons que $H \in B(0, \frac{1}{6})$. Alors $\max(|\alpha|, |\beta|) \leq \|H\| < \frac{1}{6}$.

Alors $|\alpha| < \frac{1}{6}$ et $|\beta| < \frac{1}{6}$; $-\frac{1}{6} < \alpha$ et $-\frac{1}{6} < \beta$; $3\alpha + \frac{1}{2} > 0$ et $3\beta + \frac{1}{2} > 0$.

Donc $f(C+H) - f(C) \leq 0$.

$\forall H \in B(0, \frac{1}{6})$, $f(C+H) - f(C) \leq 0$.

f admet un maximum local en C.

ECHEC DES CONDITIONS D'ORDRE 2

Exercice .. Etudier les extremums de $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^4 - xy^3 + 3y^4 \end{array}$

---

f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale et $\mathbb{R}^2$ est un ouvert.

Ainsi, si f admet un extremum local en un point A de $\mathbb{R}^2$, $\nabla f(A) = 0_{\mathbb{R}^2}$ donc A est un point critique de f. Cherchons les points critiques de f.

Soit $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. $\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(X) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - y^3 = 0 \\ -3xy^2 + 12y^3 = 0 \end{cases}$

$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y^2(x-4y) = 0 \\ 4x^3 - y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 4x^3 - y^3 = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 4y \\ 4x^3 - y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 4y \\ 4^4y^3 - y^3 = 0 \end{cases}$

$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 4y \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0.$

<u>$O = (0,0)$ est le seul point critique de f.</u>

f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale.

$\forall X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) = 12x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) = -6xy + 36y^2$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) = -3y^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(O) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(O) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(O) = 0.$ $rt - s^2 = 0$! On ne peut pas conclure.

Soit $H = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

VI $f(O+H) - f(O) = \alpha^4 - \alpha\beta^3 + 3\beta^4 = \alpha(\alpha^3 - \beta^3) + 3\beta^4 = \alpha(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) + 3\beta^4.$

1er cas.. $\alpha(\alpha - \beta) \geqslant 0$. $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\beta^2 \geqslant 0$. Alors $f(O+H) - f(O) \geqslant 0$

2e cas.. $\alpha(\alpha - \beta) < 0$. <u>ex</u> $0 < \alpha < \beta$. $f(O+H) - f(O) = \alpha^4 - \alpha\beta^3 + 3\beta^4 \geqslant -\alpha\beta^3 + 3\beta^4$

$f(O+H) - f(O) \geqslant 2\beta^4 + \underbrace{\beta^3(\beta - \alpha)}_{\geqslant 0} \geqslant 0$

b) $0 > \alpha > \beta$. $f(0+H) - f(0) = \alpha^4 - \alpha\beta^3 + 3\beta^4 \geq -\alpha\beta^3 + 3\beta^4 = \underbrace{\beta^3}_{<0}\underbrace{(\beta - \alpha)}_{<0}$

Finalement $\forall H \in \mathbb{R}^2$, $f(0+H) - f(0) \geq 0$

<u>f admet en 0 un minimum global.</u>

(V2) Fixons β dans $\mathbb{R}$ et étudions $\psi : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha \longmapsto \alpha^4 - \alpha\beta^3 + 3\beta^4 \end{array}$.

ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\psi'(\alpha) = 4\alpha^3 - \beta^3$.

$\psi'(\alpha) \geq 0 \iff 4\alpha^3 \geq \beta^3 \iff \alpha \geq \dfrac{\beta}{\sqrt[3]{4}}$.

ψ est décroissante sur $\left]-\infty, \dfrac{\beta}{\sqrt[3]{4}}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{\beta}{\sqrt[3]{4}}, +\infty\right[$.

Ainsi $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\psi(\alpha) \geq \psi\left(\dfrac{\beta}{\sqrt[3]{4}}\right)$.

$$\psi\left(\frac{\beta}{\sqrt[3]{4}}\right) = \frac{\beta^4}{4\sqrt[3]{4}} - \frac{\beta^4}{\sqrt[3]{4}} + 3\beta^4 = \beta^4\left[3 - \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}\right] = 3\beta^4\,\frac{4\sqrt[3]{4} - 1}{4\sqrt[3]{4}} \geq 0.$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\psi(\alpha) \geq 0$.

Alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha^4 - \alpha\beta^3 + 3\beta^4 \geq 0$ et ceci pour tout β dans $\mathbb{R}$.

Donc $\forall H \in \mathbb{R}^2$, $f(0+H) - f(0) \geq 0$

(V3) $f(0+H) - f(0) = \alpha^4 - \alpha\beta^3 + 3\beta^4 = \alpha^4 \underbrace{- \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\beta^2}_{=0\,!} - \alpha\beta^3 + 3\beta^4$

$$f(0+H) - f(0) = \underbrace{\left[\left(\alpha^2 - \frac{\beta^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{\beta^2}{2}\right)^2\right]}_{\alpha^4 - \alpha^2\beta^2} + \underbrace{\left[\left(\alpha\beta - \frac{\beta^2}{2}\right)^2 - \frac{\beta^4}{4}\right]}_{\alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^3} + 3\beta^4$$

$$f(0+H) - f(0) = \underbrace{\left(\alpha^2 - \frac{\beta^2}{2}\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\left(\alpha\beta - \frac{\beta^2}{2}\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{3\beta^4 - \frac{\beta^4}{4} - \frac{\beta^4}{4}}_{\geq 0} \geq 0.$$

ECHEC DES CONDITIONS D'ORDRE 2

Exercice .. Etudier les extremums de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longrightarrow x^2+y^2+2xy+xy^3$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ et même $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynômiale.

$\mathbb{R}^2$ étant ouvert, si f admet un extremum local en un point A de $\mathbb{R}^2$, A est un point critique de f. Cherchons les points critiques de f.

Soit $X=(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(X) = \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y+y^3=0 \\ 2y+2x+3xy^2=0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x+2y+y^3=0 \\ y^2(3x-y)=0 \end{cases}$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=3x \\ 0=2x+6x+27x^3 = x(27x^2+8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=3x \\ x=0 \end{cases}$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}.$$

f admet un point critique et un seul : $O=(0,0)$.

$\forall X=(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) = 2+6xy$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) = 2+3y^2$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(O) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(O) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(O) = 2$; $\quad rt-s^2=0$!!

Soit $H=(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. $\quad f(O+H)-f(O) = \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta+\alpha\beta^3$.

Remarque.. Si $\beta=-\alpha$: $f(O+H)-f(O) = -\alpha^4$ et si $\beta=\alpha$ $f(O+H)-f(O) = 4\alpha^2+\alpha^4$.

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $H_1 = \left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right)$ et $H_2 = \left(\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}\right)$.

$\|H_1\| = \|H_2\| = \sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{r^2}{4}} = \frac{r}{\sqrt{2}} < r$; $\quad H_1 \in B(O,r)$ et $H_2 \in B(O,r)$.

De plus $f(O+H_1)-f(O) = 4\left(\frac{r}{2}\right)^2+\left(\frac{r}{2}\right)^4 > 0$ et $f(O+H_2)-f(O) = -\left(\frac{r}{2}\right)^4 < 0$.

Donc $\forall r \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists H_1 \in B(O,r)$, $\exists H_2 \in B(O,r)$, $f(O+H_1)-f(O)>0$ et $f(O+H_2)-f(O)<0$.

<u>f n'admet pas d'extremum en O.</u>

EXTREMUM AVEC CONDITION D'ORDRE DEUX

Exercice .. $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et $\forall (x,y) \in \Omega$, $f(x,y) = x \ln y + y \ln x$

Etudier les extremums de f.

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme produit de deux ouverts de $\mathbb{R}$.

$(x,y) \mapsto y$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et strictement positive sur Ω. Comme $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition $(x,y) \mapsto \ln y$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.

Comme $(x,y) \mapsto x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω, $(x,y) \mapsto x \ln y$ est (par produit) de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.

De même $(x,y) \mapsto y \ln x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.

Par somme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω. Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω !

Dans ces conditions si f admet un extremum local en un point A de Ω, A est un point critique de f. Cherchons les points critiques de f.

Soit $X = (x,y) \in \Omega$.

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \frac{\partial f}{\partial x}(X) = \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0 \iff \begin{cases} \ln y + \dfrac{y}{x} = 0 \\ \dfrac{x}{y} + \ln x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ \dfrac{y}{x} = 0 \ ! \\ \dfrac{x}{y} + \ln x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y \neq 1 \\ x = -\dfrac{y}{\ln y} \\ \dfrac{x}{y} + \ln x = 0 \end{cases}$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases} y \neq 1 \\ x = -\dfrac{y}{\ln y} \\ -\dfrac{1}{\ln y} + \ln x = 0 \end{cases} \overset{y>0,\ x>0}{\iff} \begin{cases} y < 1 \\ x = -\dfrac{y}{\ln y} \\ -\dfrac{1}{\ln y} + \ln\left(-\dfrac{y}{\ln y}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases} y < 1 \\ x = -\dfrac{y}{\ln y} \\ -\dfrac{1}{\ln y} + \ln y - \ln(-\ln y) = 0 \end{cases}$$

Posons $\forall u \in]-\infty,0[$, $\varphi(u) = -\frac{1}{u} + u - \ln(-u)$.

φ est dérivable sur $]-\infty,0[$ et $\forall u \in]-\infty,0[$, $\varphi'(u) = \frac{1}{u^2} + 1 - \frac{-1}{-u} = \frac{1+u^2-u}{u^2}$

$\forall u \in]-\infty,0[$, $\varphi'(u) = \frac{(u-1/2)^2+3/4}{u^2} > 0$.

φ est donc strictement croissante sur $]-\infty,0[$ et continue.

φ définit donc une bijection de $]-\infty,0[$ sur $]\lim\limits_{u\to-\infty}\varphi(u), \lim\limits_{u\to 0^-}\varphi(u)[$.

φ définit donc une bijection de $]-\infty,0[$ sur $]-\infty,+\infty[$ (*)

(*) $\lim\limits_{u\to-\infty}\varphi(u) = \lim\limits_{u\to-\infty}\left[u\left(-\frac{1}{u^2}+1+\frac{\ln(-u)}{-u}\right)\right] = -\infty$ et

$\lim\limits_{u\to 0^-}\varphi(u) = \lim\limits_{u\to 0^-}\left[-\frac{1}{u}\left(1-u^2-(-u)\ln(-u)\right)\right] = +\infty$.

donc $\exists!\ \alpha \in]-\infty,0[$, $\varphi(\alpha) = 0$.

or $\varphi(-1) = -\frac{1}{-1} - 1 - \ln(-(-1)) = 1-1-0 = 0$. Donc $\alpha = -1$.

Ainsi $u \in]-\infty,0[$ et $-\frac{1}{u} + u - \ln(-u) = 0 \Leftrightarrow u = -1$

Alors $y \in]0,1[$ et $-\frac{1}{\ln y} + \ln y - \ln(-\ln y) = 0 \Leftrightarrow \ln y = -1$ (ou $y = \frac{1}{e}$).

Donc $\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1/e \\ x = -\frac{y}{\ln y} = 1/e \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{e}$.

f admet un point critique et un seul le point $A = \left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.

$\forall X = (x,y) \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) = -\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) = -\frac{x}{y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) = \frac{1}{y} + \frac{1}{x}$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = -e$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) = 2e$.

$rt - s^2 = (-e)(-e) - (2e)^2 = -3e^2 < 0$.

f n'admet pas d'extremum en A.