**Exercice** $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2xyz$. Etudier les extrema de $f$.

---

$f$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^3$ comme fonction polynôme.

Si $f$ admet un optimum local en un point $A$ de l'ouvert $\mathbb{R}^3$ alors $\nabla f(A)=0_{\mathbb{R}^3}$.

Cherchons alors les points critiques de $f$. Soit $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^3} \iff \frac{\partial f}{\partial x}(X)=\frac{\partial f}{\partial y}(X)=\frac{\partial f}{\partial z}(X)=0 \iff \begin{cases}2x+2yz=0\\2y+2xz=0\\2z+2xy=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=-yz\\y=-xz\\z=-xy\end{cases}$$

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases}x=-yz\\y=yz^2\\z=y^2z\end{cases} \iff \begin{cases}y(1-z^2)=0\\z(1-y^2)=0\\x=-yz\end{cases}$$

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases}y=0\\z=0\\x=0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}z^2=1\ (\text{donc } z\neq 0\,!!)\\1-y^2=0\\x=-yz\end{cases}$$

$$\nabla f(X)=0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}z=1\\y=1\\x=-1\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}z=1\\y=-1\\x=1\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}z=-1\\y=1\\x=1\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}z=-1\\y=-1\\x=-1\end{cases}$$

$f$ admet cinq points critiques : $O=(0,0,0)$, $A=(-1,1,1)$, $B=(1,-1,1)$, $C=(1,1,-1)$

$D=(-1,-1,-1)$.

Soit $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X)=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X)=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(X)=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(X)=2z$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(X)=2y$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(X)=2x$. $\nabla^2 f(X)=\begin{pmatrix}2&2z&2y\\2z&2&2x\\2y&2x&2\end{pmatrix}$.

Etude en O.

$\forall H=(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3,\ q_0(H)=2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2\geqslant 0$

$\forall H=(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3,\ q_0(H)=0 \Rightarrow 2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2=0 \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$.

Ainsi $\forall H\in\mathbb{R}^3-\{0\},\ q_0(H)>0$. <u>$f$ admet en O un minimum local strict.</u>

**Etude en $A = (-1, 1, 1)$.**

$$\nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$H = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. $q_A(H) = 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 + 4\alpha\beta + 4\alpha\gamma - 4\beta\gamma$.

$$q_A(H) = 2[\alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma] + 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 4\beta\gamma$$

$$q_A(H) = 2[(\alpha+\beta+\gamma)^2 - (\beta+\gamma)^2] + 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 4\beta\gamma$$

$$q_A(H) = 2(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2\beta^2 - 2\gamma^2 - 4\beta\gamma + 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 4\beta\gamma$$

$$q_A(H) = 2(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 8\beta\gamma = 2(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 8\,\frac{(\beta+\gamma)^2 - (\beta-\gamma)^2}{4}$$

$$q_A(H) = 2(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\beta+\gamma)^2 + 2(\beta-\gamma)^2$$

Posons $H_1 = (0, 1, -1)$ et $H_2 = (-2, 1, 1)$

$q_A(H_1) = 8 > 0$ et $q_A(H_2) = -8 < 0$. **f n'a pas d'extremum local en A.**

**Etude en $B = (1, -1, 1)$**

Notons que la transformation "$(x, y, z) \to (-x, -y, z)$" transforme A en B et laisse f invariante. Dans ces conditions f n'a pas d'extremum local en B

**Etude en $C = (1, 1, -1)$**

La transformation "$(x, y, z) \to (x, -y, -z)$" transforme B en C et laisse f invariante. Dans ces conditions **f n'a pas d'extremum local en C.**

Etude en $D = (-1, -1, -1)$. La transformation "$(x, y, z) \to (x, -y, -z)$" transforme A en D et laisse f invariante. Dans ces conditions **f n'a pas d'extremum local en D.**

## AVEC CONDITIONS D'ORDRE 2

**Exercice** .- Etudier les extremums de $f$ définie par :
$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = x^3 + y^2 - xy + z^2$

$f$ est une fonction polynôme donc $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$.

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2 - y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y - x$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z$.

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - y = 0 \\ 2y - x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 2y \\ y(12y-1) = 0 \end{cases}$

Donc clairement $f$ possède deux points critiques : $O = (0,0,0)$ et $A = (\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, 0)$.

* Etude de $f$ au voisinage de $O$.

(v1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x,0,0) = x^3$ ; $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x,0,0) - f(O) = x^3$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $f(x,0,0) - f(O) > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*_-$, $f(x,0,0) - f(O) < 0$.

$f$ n'admet donc pas d'extremum en $O$.

(v2) Soit $H(f,O)$ la hessienne de $f$ en $O$ ($f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$... voir plus haut)

Soit $X = (x,y,z)$. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(X) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) = -1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(X) = 0$ et

$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(X) = 0$. Ainsi $H(f,O) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Soit $H = (h_1, h_2, h_3)$. $\varphi(H) = {}^tH\, H(f,O)\, H = 2(\beta^2 - \alpha\beta + \gamma^2) = 2\left[\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4} + \gamma^2\right]$.

Posons $H_1 = (0,1,0)$ et $H_2 = (2,1,0)$. $\varphi(H_1) = 2 > 0$ et $\varphi(H_2) = -2 < 0$

donc $f$ n'admet pas d'extremum en $O$.

* Etude de $f$ au voisinage de $A = (\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, 0)$.

$H(f,A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Soit $H = (h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3$. $\varphi(H) = {}^tH\, H(f,A)\, H = \alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2 + 2\gamma^2$

$\varphi(H) = \left(\alpha - \beta\right)^2 - \beta^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 = (\alpha - \beta)^2 + \beta^2 + 2\gamma^2$

Remarque que 1° $\varphi(H) \geq 0$ 2°. $\varphi(H) = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = \beta = \gamma = 0 \Leftrightarrow H = 0$

Ainsi $\forall H \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$, $\varphi(H) > 0$.

Donc <u>$f$ admet un minimum local en $A = (\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, 0)$.</u> Notons que $f(A) = -\frac{1}{432}$.

Remarques 1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x,0,0) = x^3$ et donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x,0,0) = -\infty$ ; ce minimum n'est pas global.

2. Les valeurs propres de $H(f,A)$ sont $2$, $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ $(\ldots > 0\,!)$.

**Exercice** .. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto (y-z)^2 + y^3 x^2$. Etudier les extremums de $f$.

ESCP 98

$f$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^3$ car $f$ est une fonction polynôme.
En particulier $f$ est de classe $C^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$, donc si $f$ possède un extremum local en un point $A$ de $\mathbb{R}^3$ alors $\operatorname{grad} f(A) = 0$.
Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X) = \frac{\partial f}{\partial y}(X) = \frac{\partial f}{\partial z}(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^3x = 0 \\ 2(y-z) + 3y^2x^2 = 0 \\ -2(y-z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ 2y^3x = 0 \\ 3y^2x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{et} \\ z = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ \text{et} \\ y = z \end{cases}$$

<u>L'ensemble des points critiques de $f$ est $\{(a,0,0) ; a \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,b,b) ; b \in \mathbb{R}\}$.</u>

- Soit $A = (a, 0, 0)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

$\forall X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) = 2y^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) = 2 + 6yx^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(X) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) = 6y^2x$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(X) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(X) = -2$.

$$\forall X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad H(f, X) = \begin{pmatrix} 2y^3 & 6y^2x & 0 \\ 6y^2x & 2 + 6yx^2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

En particulier $H(f, a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Alors $\forall H = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$, $Q(H) = {}^tH\, H(f,A)\, H = 2h_2^2 - 4h_2h_3 + 2h_3^2 = 2(h_2 - h_3)^2$.

On a donc : $\forall H \in \mathbb{R}^3$, $Q(H) \geq 0$ sans avoir $\forall H \in \mathbb{R}^3$, $H \neq 0 \Rightarrow Q(H) > 0$.

<u>Nous ne pouvons pas conclure</u> ... en utilisant les conditions d'ordre 2.

Soit $H = (\alpha, \beta, \gamma)$. $f(A+H) - f(A) = f(a+\alpha, \beta, \gamma) - f(a, 0, 0) = f(a+\alpha, \beta, \gamma)$

$f(A+H) - f(A) = (\beta - \gamma)^2 + \beta^3 (a+\alpha)^2$.

Ainsi si $H = (\alpha, \beta, \underline{\underline{\beta}})$, $f(A+H) - f(A) = \beta^3 (a+\alpha)^2$ ... quantité qui ne
voisinage de 0
semble pas garder un signe constant au V. Montrons alors que $f$ n'a pas d'extremum en $A$.

<u>1er Cas.</u> - $a \neq 0$. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $H_1 = (0, \frac{r}{2}, \frac{r}{2})$ et $H_2 = (0, -\frac{r}{2}, -\frac{r}{2})$.

$f(A+H_1) - f(A) = (\frac{r}{2})^3 a^2 > 0$ et $f(A+H_2) - f(A) = -(\frac{r}{2})^3 a^2 < 0$. De plus $H_1 \in B_\infty(0,r)$ et $H_2 \in B_\infty(0,r)$.

Ainsi $\forall r \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists H_1 \in B_\infty(0,r)$, $\exists H_2 \in B_\infty(0,r)$, $f(A+H_1) - f(A) > 0$ et $f(A+H_2) - f(A) < 0$

$f$ n'a pas d'extremum local en $A$.

<u>2ème Cas.</u> - $a = 0$. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $H_1 = (\frac{r}{2}, \frac{r}{2}, \frac{r}{2})$ et $H_2 = (\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}, -\frac{r}{2})$.

$H_1 \in B_\infty(0,r)$, $H_2 \in B_\infty(0,r)$, $f(A+H_1) - f(A) = \left(\frac{r}{2}\right)^5 > 0$ et $f(A+H_2) - f(A) = -\left(\frac{r}{2}\right)^5 < 0$.

$\forall r \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists H_1 \in B_\infty(0,r)$, $\exists H_2 \in B_\infty(0,r)$, $f(A+H_1) - f(A) > 0$ et $f(A+H_2) - f(A) < 0$.

$f$ n'a pas d'extremum local en $A$.

<u>Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f$ n'a pas d'extremum local en $A = (a,0,0)$.</u>

- Soit $B = (0,b,b)$ avec $b \in \mathbb{R}^*$ (le cas $b=0$ vient d'être traité non ?).

$$H(f,B) = \begin{pmatrix} 2b^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\forall H = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$, $\varphi(H) = {}^tH\, H(f,B)\, H = 2b^3 h_1^2 + 2h_2^2 + 2h_3^2 - 4h_2 h_3 = 2b^3 h_1^2 + 2(h_2 - h_3)^2$.

<u>1er Cas.</u> - $b < 0$. Posons $H_1 = (0,1,0)$ et $H_2 = (1,0,0)$.

$\varphi(H_1) = 2 > 0$ et $\varphi(H_2) = 2b^3 < 0$ ; $f$ n'a pas d'extremum en $B$.

<u>2e Cas.</u> - $b > 0$. $\forall H = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$, $\varphi(H) = 2b^3 h_1^2 + 2(h_2 - h_3)^2 \geq 0$ mais on n'a pas $\forall H \in \mathbb{R}^3, H \neq 0 \Rightarrow \varphi(H) > 0$.

Les conditions d'ordre 2 ne donnent pas de conclusion.

Soit $H = (\alpha, \beta, \delta) \in \mathbb{R}^3$. $f(B+H) - f(B) = f(\alpha, b+\beta, b+\delta) - f(0,b,b) = (\beta - \delta)^2 + (b+\beta)^3 \alpha^2$.

Il semble que cette différence soit positive au voisinage de $0$. Montrons que $f$ possède un minimum local en $B$. Posons $r = b$.

Si $H \in B_\infty(0,r)$ : $|\alpha| < b$, $|\beta| < b$, $|\delta| < b$, alors $b + \beta > 0$ et ainsi $f(B+H) - f(B) \geq 0$.

$\exists r \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall H \in B_\infty(0,r)$, $f(B+H) \geq f(B)$. $f$ possède un minimum local en $B$.

plus de place pour récapituler !

**Exercice** $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 4\}$ et $\forall (x,y)\in D,\ f(x,y)=(2x^2+3y^2)\,e^{-x^2-y^2}$.

Q1. Montrer que $f$ admet sur $D$ un maximum $M$ et un minimum $m$.

Q2. Trouver $m$ (resp. $M$) et l'ensemble des points qui réalisent ce minimum (resp. maximum).

---

Q1 $D=\{X\in\mathbb{R}^2 \mid \|X\|^2\leqslant 4\}=\{X\in\mathbb{R}^2 \mid \|X\|\leqslant 2\}$

Ainsi $D$ est la boule fermée de centre $O=(0,0)$ et de rayon 2.

$D$ est donc une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$.

$(x,y)\mapsto -x^2-y^2$ est continue sur $D$ (restriction à $D$ d'une fonction polynôme) et $t\mapsto e^t$ est continue sur $\mathbb{R}$ ; par composition $(x,y)\mapsto e^{-x^2-y^2}$ est continue sur $D$.

$(x,y)\mapsto 2x^2+3y^2$ est continue sur $D$ (restriction à $D$ d'une fonction polynôme) ; alors par produit $f$ est continue sur $D$.

$f$ est continue sur $D$ et $D$ est un fermé borné ainsi $f$ possède un maximum $M$ et un minimum $m$ sur $D$.

Q2 $\forall (x,y)\in D,\ f(x,y)\geqslant 0$ et $f(0,0)=0$.

Donc $\forall (x,y)\in D,\ f(x,y)\geqslant f(0,0)=0$.

Alors $m=0$ et $O=(0,0)$ réalise le minimum de $f$.

$$\forall (x,y)\in D,\ f(x,y)=0 \iff (2x^2+3y^2)\,e^{-x^2-y^2}=0 \underset{e^{-x^2-y^2}\neq 0}{\iff} 2x^2+3y^2=0 \underset{x^2\geqslant 0,\ y^2\geqslant 0}{\iff} x^2=y^2=0 \iff x=y=0$$

$O$ est le seul point de $D$ qui réalise le minimum de $f$.

Posons $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4\}$. $\Omega$ est la boule ouverte de centre $O$ et de rayon 2.

Donc $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

$(x,y)\mapsto -x^2-y^2$ est de classe $C^1$ sur $D$ (restriction d'une fonction polynôme) et $t\mapsto e^t$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ ; par composition $(x,y)\mapsto e^{-x^2-y^2}$ est de classe $C^1$ sur $D$.

$(x,y) \to (2x^2+3y^2)$ est de classe $C^1$ sur $D$ (fonction polynôme). Par produit $f$ est de classe $C^1$ sur $D$ donc sur $\Omega$.

Comme seulement si $f$ admet un extremum local en un point $A$ de $\Omega$ : $\nabla f(A) = 0_{\mathbb{R}^2}$.
Donc si $f$ réalise son maximum en un point $A$ de $\Omega$ : $\nabla f(A) = 0_{\mathbb{R}^2}$.
Cherchons les points critiques de la restriction de $f$ à $\Omega$. Soit $X=(x,y)\in\Omega$.

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(X) = \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 4x e^{-x^2-y^2} + (2x^2+3y^2)(-2x)e^{-x^2-y^2} \\ 0 = 6y e^{-x^2-y^2} + (2x^2+3y^2)(-2y)e^{-x^2-y^2} \end{cases}$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2x e^{-x^2-y^2}[2-2x^2-3y^2] \\ 0 = 2y e^{-x^2-y^2}[3-2x^2-3y^2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2-2x^2-3y^2) = 0 \\ y(3-2x^2-3y^2) = 0 \end{cases}$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y(3-3y^2) = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 0 \\ x(2-2x^2) = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \neq 0,\ y \neq 0 \\ 2x^2+3y^2 = 2 \\ 2x^2+3y^2 = 3 \end{cases} \quad !!$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases}.$$

$f$ admet cinq points critiques : $O=(0,0)$, $A=(0,1)$, $B=(0,-1)$, $C=(1,0)$, $D=(-1,0)$.
Notons que $f(O)=0$, $f(A)=f(B)=3e^{-1}$ et $f(C)=f(D)=2e^{-1}$

Étudions alors $f$ sur $D\setminus\Omega$.
$D\setminus\Omega = D\cap\bar{\Omega}$ est un fermé comme intersection de deux fermés de $\mathbb{R}^2$.
$D\setminus\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=4\}$.
Soit $(x,y)\in D\setminus\Omega$. $y^2 = 4-x^2$. $y^2\geq 0$ donc $x^2\leq 4$ ; $x\in[-2,2]$.
De plus $f(x,y) = (2x^2+3(4-x^2))e^{-4} = (12-x^2)e^{-4} \leq 12e^{-4}$.
De plus $f(x,y) = 12e^{-4} \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$
Notons que $\begin{cases} =0 \\ y^2=4-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$

$f$ admet un maximum sur $D \setminus \Omega$ qui vaut $12e^{-4}$ et atteint en les points $(0,2)$ et $(0,-2)$.

$12e^{-4} < 3e^{-1} \Leftrightarrow 4 < e^3$. Or $e > 2$ donc $e^3 > 8$.

Ainsi $12e^{-4} < 3e^{-1} = f(A) = f(B)$. Alors le maximum de $f$ n'est pas atteint en un point de $D \setminus \Omega$ car il existe un point de $\Omega$ dont l'image par $f$ a une valeur strictement supérieure au maximum de $f$ sur $D \setminus \Omega$.

Ainsi le maximum de $f$ est atteint en un point de $\Omega$ qui ne peut être que $O$, $A$, $B$, $C$ ou $D$.

Or $f(O) < f(C) = f(D) < f(A) = f(B) = 3e^{-1}$.

**Hors de doute le maximum de $f$ sur $D$ vaut $3e^{-1}$ et il est atteint en les seuls points $A = (0,1)$ et $B = (0,-1)$.**

**Exercice 1** **V1** Etudier les extremums de la fonction $f$ définie par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2xyz^2$$

Ou : **V2** $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2xyz^2$.

Q1. Montrer que $(x,y,z)$ est un point critique de $f$ si et seulement si $x = y = 0$.

Q2. $z$ est un réel et $A = (0,0,z)$. On se propose d'étudier l'existence d'un extremum pour $f$ en $A$.

a) On suppose que $z^2 > 1$. Montrer que l'on peut conclure avec les conditions d'ordre 2 et conclure !

b) On suppose que $z^2 \leqslant 1$. Montrer que l'on peut pas conclure avec les conditions d'ordre 2.

c) $z^2 < 1$. En revenant à $f(A+H) - f(A)$ montrer que $f$ possède un extremum local en $A$ (on pourra remarquer que $\gamma \to 1 - (\gamma + z)^4$ à une limite strictement positive en 0).

d) $z^2 = 1$. En revenant à $f(A+H) - f(A)$ montrer que $f$ ne possède pas d'extremum local en $A$ (faire $\alpha = \beta$).

---

**Q1** $f$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^3$ comme fonction polynôme.
Notons également que si $f$ possède un extremum en un point $A$ de l'ouvert $\mathbb{R}^3$ alors $\operatorname{grad} f(A) = 0_{\mathbb{R}^3}$

Soit $X=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. $\frac{\partial f}{\partial x}(X) = 2x - 2yz^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(X) = 2y - 2xz^2$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(X) = -4xyz$.

$$\operatorname{grad} f(X) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2yz^2 = 0 \\ 2y - 2xz^2 = 0 \\ -4xyz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \neq 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ x = 0\ ! \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ z = 0 \\ x = 0\ ! \\ y = 0\ ! \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

En s'appuyant sur $-4xyz = 0$

Si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ : $(x,y,z)$ est un point critique de $f$ $\Leftrightarrow$ $x = y = 0$.

**Q2** Soit $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(X) = -4xy$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) = -2z^2$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(X) = -4yz$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(X) = -4xz$.

Soit $z \in \mathbb{R}$ et soit $A = (0,0,z)$. $H(f,A) = \begin{pmatrix} 2 & -2z^2 & 0 \\ -2z^2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Posons $\forall H \in \mathbb{R}^3$, $\varphi(H) = {}^tH\, H(f,A)\, H$.

$\forall H = (h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3$, $\varphi(H) = 2h_1^2 + 2h_2^2 - 4z^2 h_1 h_2 = 2\left[(h_1 - z^2 h_2)^2 + h_2^2(1 - z^4)\right]$

<u>a)</u> Supposons $z^2 > 1$. Alors $1 - z^4 < 0$

Posons $H_1 = (1,0,0)$ et $H_2 = (z^2,1,0)$. $\varphi(H_1) = 2 > 0$ et $\varphi(H_2) = 1 - z^4 < 0$.

<u>$f$ n'a pas d'extremum local en $A$ lorsque $z^2 > 1$.</u>

b) Supposons $z^2 \leq 1$. Alors $1-z^4 \geq 0$.

Soit $H=(h_1,h_2,h_3)$.

$\varphi(H) = 2\left[(h_1-z^2h_2)^2+h_2^2(1-z^4)\right] \geq 0$

$\varphi(H)=0 \Leftrightarrow (h_1-z^2h_2)^2 = h_2^2(1-z^4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h_1 = z^2h_2 \\ h_2(1-z^4)=0 \end{cases}$.

Comme $H=(h_1,h_2,h_3)$, $\varphi(H)=0$ ne donne pas nécessairement $H=0$ ($\varphi(0,0,1)=0$ ... !)

Ainsi on a $\forall H \in \mathbb{R}^3$, $\varphi(H) \geq 0$ sans avoir $\forall H \in \mathbb{R}^3-\{0\}$, $\varphi(H)>0$.

On ne peut donc pas conclure.

c) Soit $H=(\alpha,\beta,\gamma)$. Notons que $f(A)=f(0,0,z)=0$.

$f(A+H)-f(A) = f(A+H) = \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta(\gamma+z)^2 = (\alpha-\beta(\gamma+z)^2)^2-\beta^2(\gamma+z)^4+\beta^2$

$f(A+H)-f(A) = (\alpha-\beta(\gamma+z)^2)^2+\beta^2\left[1-(\gamma+z)^4\right]$.

Supposons $\underline{\underline{z^2<1}}$. Alors $\lim\limits_{\gamma \mapsto 0} 1-(\gamma+z)^4 = 1-z^4 > 0$.

Posons $\varepsilon = 1-z^4$.

$\exists h \in \mathbb{R}^*_+$, $\forall \gamma \in \mathbb{R}$, $|\gamma|<h \Rightarrow \left|(1-(\gamma+z)^4)-(1-z^4)\right| < \varepsilon = 1-z^4$

En particulier $-\left((1-(\gamma+z)^4)-(1-z^4)\right) < 1-z^4$ pour $\gamma \in \mathbb{R}$ et $|\gamma|<h$.

Donc $-((1-(\gamma+z)^4)+(1-z^4) < 1-z^4$ pour $\gamma \in \mathbb{R}$ et $|\gamma|<h$

Donc $\forall \gamma \in \mathbb{R}$, $|\gamma|<h \Rightarrow 1-(\gamma+z)^4>0$.

Supposons que $H \in B_\infty(0,h)$. $|\alpha|<h$, $|\beta|<h$ et $|\gamma|<h$

Donc $f(A+H)-f(A) = (\alpha-\beta(\gamma+z)^2)^2+\beta^2(1-(\gamma+z)^4) \geq 0$.

Donc $\forall H \in B_\infty(0,h)$, $f(A+H)-f(A) \geq 0$ ou $\forall X \in B_\infty(\underline{A},h)$, $f(X) \geq f(A)$.

$\underline{\underline{f \text{ admet en } A \text{ un minimum local lorsque } z^2<1.}}$

c) Supposons $z^2=1$. Soit $H=(\alpha,\beta,\delta)\in\mathbb{R}^3$.

$f(A+H)-f(A)=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta(\delta+z)^2$.

<u>Supposons $\alpha=\beta$.</u> $f(A+H)-f(A)=2\alpha^2-2\alpha^2(\delta+z)^2=2\alpha^2[1-\delta^2-2\delta z-z^2]$

$f(A+H)-f(A) \underset{z^2=1}{=} 2\alpha^2(-\delta^2-2\delta z)=-2\alpha^2\delta(\delta+2z)$

<u>1er cas.</u> $z=1$. $f(A+H)-f(A)=-2\alpha^2\delta(\delta+2)$

Soit $r\in\mathbb{R}_+^*$. Posons $H_1=(\frac{r}{2},\frac{r}{2},\frac{r}{2})$.

Alors $H_1\in B_\infty(0,r)$ et clairement $f(A+H_1)-f(A)<0$

Posons $H_2=(\frac{r}{2},\frac{r}{2},\max(-\frac{r}{2},-1))=(\frac{r}{2},\frac{r}{2},-\min(\frac{r}{2},1))$

$H_2=(\alpha,\beta,\delta)$ avec $\alpha=\beta=\frac{r}{2}$ et $\delta=-\min(\frac{r}{2},1)$.

$-\delta=\min(\frac{r}{2},1)$ donc $0<-\delta\leq\frac{r}{2}<r$ et $0<-\delta\leq 1<2$

Alors $|\alpha|<r$, $|\beta|<r$, $|\delta|<r$ donc $H_2\in B_\infty(0,r)$.

De plus $\alpha>0$, $\beta>0$, $\delta<0$ et $\delta+2>0$ ; $f(A+H_2)-f(A)=-2\alpha^2\delta(\delta+2)<0$.

Nous avons donc prouvé que $\forall r\in\mathbb{R}_+^*$, $\exists H_1\in B_\infty(0,r)$, $\exists H_2\in B_\infty(0,r)$,
$f(A+H_1)-f(A)>0$ et $f(A+H_2)-f(A)<0$. <u>f n'a pas d'extremum local en A si $z=1$.</u>

<u>2ème cas.</u> $z=-1$ $f(A+H)-f(A)=-2\alpha^2\delta(\delta-2)=2\alpha^2\delta(2-\delta)$.

Soit $r\in\mathbb{R}_+^*$. Posons $H_1=(\frac{r}{2},\frac{r}{2},\min(\frac{r}{2},1))$ et $H_2=(\frac{r}{2},\frac{r}{2},-\frac{r}{2})$

Alors $H_1\in B_\infty(0,r)$, $H_2\in B_\infty(0,r)$, $f(A+H_1)-f(A)>0$ et $f(A+H_2)-f(A)<0$.

$\forall r\in\mathbb{R}_+^*$, $\exists H_1\in B_\infty(0,r)$, $\exists H_2\in B_\infty(0,r)$, $f(A+H_1)-f(A)>0$ et $f(A+H_2)-f(A)<0$.

<u>f n'a pas d'extremum local en A si $z=-1$.</u>

Conclusion. Si $z\in]-1,1[$, f possède un minimum local en $A=(0,0,z)$

Si $z\in\mathbb{R}-]-1,1[$, f ne possède pas d'extremum local en $A=(0,0,z)$

**Exercice 1** a) $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=x^2+xy+y^2+2x+3y$. Etudier les extremums éventuels de $f$.

b) $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=x^3+y^3-3xy$. Etudier les extremums éventuels de $f$.

c) $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R},\ f(x,y)=x\big((\ln x)^2+y^2\big)$. Etudier les extremums éventuels de $f$.

d) $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=x^2y+y^2z+2x-z$. Etudier les extremums éventuels de $f$.

---

**Quelques pistes...**

a) Un point critique $A=(-\frac{1}{3},-\frac{4}{3})$ $r=2>0$ $rt-s^2=4-1=3>0$

$f$ possède un minimum local strict en $A$.

Mieux $H=(\alpha,\beta)$ donne $f(A+H)-f(A)=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\frac{\beta}{2})^2+\frac{3}{4}\beta^2\geqslant 0$

$f$ admet en $A$ un minimum global strict.

b) Deux points critiques $A=(0,0)$ et $B=(1,1)$.

$A=(0,0)$, $rt-s^2=-9$ RIEN. $B=(1,1)$ $rt-s^2=27$ et $r=6>0$ : mini loc. strict

c) Deux points critiques $A=(1,0)$ et $B=(1,e^{-2})$.

- Pour $A=(1,0)$, $rt-s^2=4$ et $r=2$ ; mini local strict

Mieux $f(A)=0$ et $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$, $f(x,y)=x[(\ln x)^2+y^2]\geqslant 0$

Donc en $A=(1,0)$ $f$ admet un minimum global (strict).

- Pour $B=(1,e^{-2})$, $rt-s^2=-4<0$. RIEN.

d) Deux points critiques $A=(-1,1,-\frac{1}{2})$ et $B=(1,-1,\frac{1}{2})$.

$$\nabla^2 f(A)=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&-1&2\\0&2&0\end{pmatrix}\qquad q_A(H)\overset{H=(\alpha,\beta,\gamma)}{=}2\alpha^2-\beta^2-4\alpha\beta+4\beta\gamma$$

$$q_A(H)=2(\alpha-\beta)^2-3(\beta-\frac{2}{3}\gamma)^2+\frac{4}{3}\gamma^2$$

Rien car si $H_1=(2,2,3)$, $q_A(H_1)>0$ et si $H_2=(1,1,0)$, $q_A(H_2)<0$

$$\nabla^2 f(B)=\begin{pmatrix}-2&2&0\\2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}\qquad q_B(H)\overset{H=(\alpha,\beta,\gamma)}{=}-2\alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta-4\beta\gamma=-2(\alpha-\beta)^2+3(\beta-\frac{2}{3}\gamma)^2-\frac{4}{3}\gamma^2$$

Rien car si $H_1=(1,1,0)$, $q_B(H_1)>0$ et si $H_2=(2,2,3)$, $q_B(H_2)<0$

<u>Exercice</u> .. $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geqslant 0, y\geqslant 0 \text{ et } x+y\leqslant 1\}$

$\forall (x,y)\in U^2,\ f(x,y)=x^2-2y^2-5xy+x+y$.

Q1.. Montrer que $U$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $f$ possède un maximum et un minimum sur $U$

Q2.. $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0, y>0 \text{ et } x+y<1\}$

Montrer que $V$ est un ouvert et déterminer les extremums locaux de $f$ sur $V$.

Q3.. Etudier $f$ sur $\{(x,y)\in U \mid x=0\}$, $\{(x,y)\in U \mid y=0\}$ et $\{(x,y)\in U \mid x+y=1\}$.

Q4.. Déterminer le maximum $M$ de $f$ sur $U$ et $\{X\in U \mid f(X)=M\}$.

Même chose avec le minimum.

---

(Q1) Pour $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $u(x,y)=x+y$. $u$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc l'image réciproque par $u$ du fermé $]-\infty,1]$ de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Ainsi $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y\leqslant 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

$[0,+\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$ donc $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

$U=[0,+\infty[\times[0,+\infty[\ \cap\ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y\leqslant 1\}$ est alors un fermé de $\mathbb{R}^2$ comme intersection de deux fermés de $\mathbb{R}^2$.

Soit $(x,y)\in U$. $|x|\underset{x\geqslant 0}{=}x\overset{y\geqslant 0}{\leqslant}x+y\leqslant 1$ et $|y|\underset{y\geqslant 0}{=}y\overset{x\geqslant 0}{\leqslant}x+y\leqslant 1$. $\max(|x|,|y|)\leqslant 1$.

Donc $\forall X\in U$, $\|X\|_\infty\leqslant 1$. $U$ est alors un borné de $\mathbb{R}^2$.

Finalement $U$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$.

$f$ est continue sur $U$ car $f$ est la restriction d'une fonction polynôme.

$f$ est continue sur un fermé borné $U$ de $\mathbb{R}^2$ donc $f$ possède sur $U$ un maximum et un minimum.

(Q2) $V=(]0,+\infty[\times]0,+\infty[)\cap u^{-1}(]-\infty,1[)$.

$]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ est un ouvert comme produit de deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $u^{-1}(]-\infty,1[)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}$ par une fonction continue.

Ainsi $V$ est un ouvert comme intersection de deux ouverts de $\mathbb{R}^2$.

$f$ est de classe $C^1$ sur $V$ et $V$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ donc si $f$ possède un extremum local en A sur V alors grad $f$ (A) = 0.

Soit $A = (x,y) \in V$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 2x - 5y + 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(A) = -4y - 5x + 1$

$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y + 1 = 0 \\ -4y - 5x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/33 \\ y = 7/33 \end{cases}$

$A = (\frac{1}{33}, \frac{7}{33})$ est le seul point critique de $f$ sur V. Notons que $f$ est de classe $C^2$ sur V et que : $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = 2$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) = -5$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = -4$

Ainsi $s^2 - rt = 25 + 8 > 0$. $f$ n'admet pas d'extremum local en A.

Donc <u>$f$ n'a pas d'extremum local sur V.</u>

Par conséquent le maximum (resp. minimum) de $f$ ne peut être atteint qu'en un point de $\{(x,y) \in U \mid x = 0$ ou $y = 0$ ou $x + y = 1\}$.

9) Posons $U_1 = \{(x,y) \in U \mid x = 0\}$ ; $U_1 = \{0\} \times [0,1]$.

Posons $\forall y \in [0,1]$, $\varphi(y) = f(0,y) = -2y^2 + y$ ; $\forall y \in [0,1]$, $\varphi'(y) = -4y + 1$.

| $y$ | 0 | | 1/4 | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'(y)$ | | + | 0 | − | |
| $\varphi(y)$ | 0 | ↗ | $\frac{1}{8}$ | ↘ | −1 |

Ainsi le maximum (resp. minimum) de $f$ sur $U_1$ est $\frac{1}{8}$ (resp. −1) et il est atteint en le seul point $(0, \frac{1}{4})$ (resp. $(0,1)$)

Posons $U_2 = \{(x,y) \in U \mid y = 0\}$ ; $U_2 = [0,1] \times \{0\}$.

Posons $\forall x \in [0,1]$, $\psi(x) = f(x,0) = x^2 + x$. $\forall x \in [0,1]$, $\psi'(x) = 2x + 1$

| $x$ | 0 | | 1 |
|---|---|---|---|
| $\psi'(x)$ | | + | |
| $\psi(x)$ | 0 | ↗ | 2 |

le maximum de $f$ sur $U_2$ est 2 et il est atteint en le seul point $(1,0)$ ;

le minimum de $f$ sur $U_2$ est 0 —————— $(0,0)$.

Posons $U_3 = \{(x,y) \in U \mid x + y = 1\}$. $U_3 = \{(x, 1-x) ; x \in [0,1]\}$.

Posons $\forall x \in [0,1]$, $\ell(x) = f(x, 1-x) = x^2 - 2(1-x)^2 - 5x(1-x) + x + 1 - x = 4x^2 - x - 1$.

$\forall x \in [0,1]$, $\ell'(x) = 8x - 1$.

| $x$ | 0 | | 1/8 | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ell'(x)$ | | − | 0 | + | |
| $\ell(x)$ | −1 | ↘ | $-17/16$ | ↗ | 2 |

Le maximum (resp. minimum) de $f$ sur $U_3$ est 2 (resp. $-\frac{17}{16}$) et il est atteint en le seul point $(1/8, 7/8)$.

Le maximum (resp. minimum) de $f$ sur U est 2 (resp. $-\frac{17}{16}$) il est atteint en le seul point $(1,0)$ (resp. $(\frac{1}{8}, \frac{7}{8})$).

# EXTREMA

## RÉPONSES DONNÉES SOUS TOUTE RÉSERVE

1. $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x[(\ln x)^2 + y^2]$
   Point critiques $(1,0)$ minimum loc ; $(e^{-2},0)$ Rien. — 2 — R

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$
   P.C. $(21,20)$ Max. abs. str. — 1 — R

3. $a > 1,\ b > 1$. $\underline{a \neq b}$. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \frac{x^2}{a^2-1} + \frac{2xy}{ab-1} + \frac{y^2}{b^2-1}$
   P.C. $(0,0)$ Min abs str. — 1 — R

4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto \frac{x^2}{2} + xyz + y - z$
   P.C. $(1,1,-1)$ Rien. — 2

5. $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto 4xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
   P.C. $(4^{-1/3}, 4^{-1/3})$ Mini loc st. — 2

6. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^3 + y^3 - 9xy + 27$
   P.C. $(0,0)$ et $(3,3)$. $(0,0)$ Rien ; $(3,3)$ Mini. loc. st. — 2

7. $f : \mathbb{R}_+^{*2} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x\ln y - y\ln x$.
   P.C. $(e,e)$ Rien — 2 — R

8. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \frac{x^2+y^2-2x+4}{x^2+y^2+2x+4}$
   P.C. $(2,0)$ Mini abs ; $(-2,0)$ Max abs — 1 — R

9. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (x+y)^2 - (x^4+y^4)$
   PC $(1,1), (0,0), (-1,-1)$. $(0,0)$ Rien ; $(1,1)$ et $(-1,-1)$ Max loc st. — 2

10. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto y^2 - 3x^2y + 2x^4$
    P.C. $(0,0)$ Rien.

11. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (y^2-x^2)(y^2-2x^2)$
    P.C. $(0,0)$ Rien

12. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2+2xyz$
    P.C. $(0,0,0)$ Mini loc. ; $(1,1,-1)$, $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(-1,-1,-1)$ Rien — 1 — R

13. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$
    PC $(0,0)$ Rien — 2 ; $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ Min. ABS. — R

14. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 + (y^3-y)^2$
    P.C. $(0,0), (0,1), (0,-1) \leftarrow$ Mini abs ; $(0,\frac{1}{\sqrt{3}}), (0,-\frac{1}{\sqrt{3}}) \leftarrow$ Rien — 2 — R

---

(15) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to xy + 2x^2y + 2xy^2$ — P.C. $(0,0), (-2,0), (0,-2)$ sela; $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)$ max loc. — R — 2

---

(16) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to xy - x^2y - xy^2$ — P.C. $(0,0), (1,0), (0,1)$ sela; $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ max loc. — R — 2

---

(17) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \to xe^xy + z^2(1+x)$ — P.C. $(0,0,0)$ sela. — 2

---

(18) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \to x^3 + y^2 - xy + z^2$ — P.C. $(0,0,0)$ sela; $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, 0\right)$ mín. loc. — 2 — R

---

(19) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \to 4x^2 + y^2 + 3z^2 - 4xz - 2yz - 4x + 2$ — $(1,1,1)$ mín abs — 1 — R

---

(20) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$ — P.C. $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ mín abs. — 1 — R

---

(21) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to x^3 + y^3 - 3xy$ — P.C. $(0,0)$ sela; $(1,1)$ mín loc. — 1 — R

---

(22) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to x^2 + y^2 + x^3$ — P.C. $(0,0)$ mín loc; $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ sela — 1 — R

---

(24) $f: (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$ — P.C. $(1,1)$ max abs. — 1 — R

---

(25) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to \dfrac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ — P.C. $(1,-1)$ max abs. — 1 — R

---

**Exercice 1** $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 9\}$. $\forall (x,y)\in D,\ f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+y^2-1$.

Montrer que $f$ possède un maximum et minimum absolus sur $D$ et les déterminer.

---

Notons que $D$ est la boule fermée de centre $0$ et de rayon $3$ pour la norme $\|\ \|_2$ ; ainsi $D$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$.

$(x,y)\to x^2+y^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ ; $t\mapsto\sqrt{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Par composition $(x,y)\mapsto\sqrt{x^2+y^2}$ est alors continue sur $\mathbb{R}^2$.

Comme $(x,y)\mapsto y^2-1$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ (fonction polynômiale), $(x,y)\mapsto\sqrt{x^2+y^2}+y^2-1$ est alors continue sur $\mathbb{R}^2$ comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$.

En particulier $f$ est continue sur $D$.

$f$ est continue sur le fermé borné $D$ donc $\underline{\underline{f \text{ possède un maximum } M \text{ et un minimum } m \text{ sur } D.}}$

Notons que $\forall (x,y)\in D$, $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+y^2-1 \underset{\sqrt{x^2+y^2}+y^2\geq 0}{\geq} -1 = f(0,0)$.

Ainsi $\underline{m=-1}$. Notons que $(0,0)$ est l'unique point de $D$ qui réalise $m=-1$.

Soit $(x,y)\in D$. $x^2+y^2\leq 9$ et en particulier $y^2\leq 9$.

Ainsi $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+y^2-1\leq\sqrt{9}+9-1=11=f(0,3)$.

Alors $\underline{M=11}$.

Notons que $(0,3)$ et $(0,-3)$ sont les seuls points de $D$ qui réalisent $M$.

<u>Remarque</u>.– Il est aisé de voir que $f$ est de classe $C^1$ sur $D-\{0\}$.
Ainsi $f$ est de classe $C^1$ sur l'ouvert $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<9\}-\{0\}$.
Sur cet ouvert $f$ n'a pas de point critique ($\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \Leftrightarrow$
$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ et $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+2y \Leftrightarrow x=y=0$ !)

Ainsi $f$ ne peut réaliser $m$ ou $M$ qu'en $0$ ou qu'en un point de $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=9\}$. Ceci constitue une bonne piste pour retrouver $m$ et $M$.

# EXTREMUM SUR UN FERMÉ... NON BORNÉ

**Exercice** .. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to x\sqrt{1-y} + y\sqrt{1-x}$. Etudier les extremums de $f$.

Notons que le domaine de définition de $f$ est $D = ]-\infty, 1] \times ]-\infty, 1]$.

Posons $\Omega = ]-\infty, 1[ \times ]-\infty, 1[$. $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme produit de deux ouverts de $\mathbb{R}$.

$(x,y) \mapsto 1-y$ est de classe $C^2$ sur $\Omega$ et strictement positive. Comme $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition $(x,y) \mapsto \sqrt{1-y}$ est de classe $C^2$ sur $\Omega$. Comme $(x,y) \to x$ est de classe $C^2$ sur $\Omega$, par produit $(x,y) \to x\sqrt{1-y}$ est de classe $C^2$ sur $\Omega$.

De même $(x,y) \to y\sqrt{1-x}$ est de classe $C^2$ sur $\Omega$.

Par somme $f$ est de classe $C^2$ sur $\Omega$. En particulier $f$ est de classe $C^1$ sur $\Omega$.

Dans ces conditions si $f$ admet un extremum local en un point $A$ de $\Omega$, $\nabla f(A) = 0_{\mathbb{R}^2}$ donc $A$ est un point critique de $f$. Cherchons les points critiques de $f$ sur $\Omega$.

Soit $X = (x,y) \in \Omega$.

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(X) = \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-y} + y\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} = 0 \\ x\dfrac{-1}{2\sqrt{1-y}} + \sqrt{1-x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt{1-x}\sqrt{1-y} \\ x = 2\sqrt{1-x}\sqrt{1-y} \end{cases}$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 2\sqrt{1-x}\sqrt{1-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 2(1-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{2}{3}.$$

$A = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ est l'unique point critique. Soit $X = (x,y)$ un élément de $\Omega$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) = -\frac{y}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)(1-x)^{-3/2} = -\frac{y}{4}\frac{1}{(1-x)^{3/2}} \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3/2}$$

De même $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = -\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3/2}$. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-y}} - \dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$ ; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) = -\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1/2}$.

"En A" $rt-s^2 = \left(-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3/2}\right)^2 - \left(-\left(\frac{1}{3}\right)^{-3/2}\right)^2 = \frac{1}{36}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{27}{36} - 3 < 0.$

$f$ n'admet pas d'extremum local en A.

donc <u>$f$ n'admet pas d'extremum local en tous les points de $\Omega$.</u>

Soit A un point de $D \setminus \Omega$.

<u>1er Cas.</u>. $\exists a \in ]-\infty, 1[$, $A = (a, 1)$. $\forall X = (x,y) \in D$, $f(X) - f(A) = x\sqrt{1-y} + y\sqrt{1-x} - \sqrt{1-a}$

En particulier $\forall x \in ]-\infty, 1]$, $f(x,1) - f(A) = \sqrt{1-x} - \sqrt{1-a} = \dfrac{a-x}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1-a}}$

$a \in ]-\infty, 1[$ et $]-\infty, 1[$ est ouvert donc $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $]a-\alpha, a+\alpha[ \subset ]-\infty, 1[$.

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $\delta = \min\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{r}{2}\right)$, $X_1 = (a+\delta, 1)$ et $X_2 = (a-\delta, 1)$.

$\|X_1 - A\| = \sqrt{((a+\delta)-a)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{\delta^2} = \delta$ et $\|X_2 - A\| = \sqrt{(a-\delta-a)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{\delta^2} = \delta$.

donc $\|X_1 - A\| = \|X_2 - A\| = \delta < r$ ; $X_1 \in B(A,r)$ et $X_2 \in B(A,r)$.

$a + \delta \le a + \frac{\alpha}{2} < a + \alpha < 1$ donc $X_1 = (a+\delta, 1) \in D$ ; $X_1 \in D$.

$a - \delta < a < 1$ ; $X_2 = (a-\delta, 1) \in D$ ; $X_2 \in D$.

Enfin $f(X_1) - f(A) = \dfrac{a-(a+\delta)}{\sqrt{1-(a+\delta)} + \sqrt{1-a}} = -\dfrac{\delta}{\sqrt{1-(a+\delta)} + \sqrt{1-a}} < 0.$

$f(X_2) - f(A) = \dfrac{a-(a-\delta)}{\sqrt{1-(a-\delta)} + \sqrt{1-a}} = \dfrac{\delta}{\sqrt{1-(a-\delta)} + \sqrt{1-a}} > 0.$

donc $\forall r \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists X_1 \in B(A,r) \cap D$, $\exists X_2 \in B(A,r) \cap D$, $f(X_1) - f(A) < 0$ et $f(X_2) - f(A) > 0$.

$f$ n'a pas d'extremum local en A.

<u>2e Cas.</u>. $\exists b \in ]-\infty, 1[$, $A = (1, b)$. On montre comme dans le premier cas que $f$ n'a pas d'extremum en A ($f$ est symétrique en $x$ et $y$...).

$\underline{\underline{3^{ième} \text{ cas}}}$ : $A = (1,1)$.

$\forall X = (x,y) \in D$, $f(X) - f(A) = x\sqrt{1-y} + y\sqrt{1-x}$.

Alors $\forall X = (x,y) \in D \cap [0,1] \times [0,1]$, $f(X) - f(A) \geq 0$.

Soit $X = (x,y) \in D \cap B(A,1)$.

$\max(|x-1|, |y-1|) \leq \|X - A\| < 1$. $|x-1| < 1$ et $|y-1| < 1$ ; $-1 < x-1$ et $-1 < y-1$

Donc $x > 0$ et $y > 0$. Alors $x\sqrt{1-y} + y\sqrt{1-x} \geq 0$ ( $x \leq 1$ et $y \leq 1$ car $X = (x,y) \in D$ !)

Donc $\forall X \in D \cap B(A,1)$, $f(X) \geq f(A)$.

$\exists r \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall X \in D \cap B(A,r)$, $f(X) \geq f(A)$.

$\underline{\underline{f \text{ admet un minimum local en } A = (1,1)}}$.

$\underline{\underline{\text{Finalement } A = (1,1) \text{ est le seul point de } D \text{ où } f \text{ admette un extremum local.}}}$

**Exercice** LYON 99 (sujet de remplacement ?) $A$ est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On note $\mathcal{S}_A$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) + A(x,y).$$

Q1. Montrer que si $f$ est un élément de $\mathcal{S}_A$ alors :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f''(x+y) = \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}(x,y)$$

Q2. Montrer que si $A$ est l'application $(x,y) \to x^3 y^3$, alors $\mathcal{S}_A$ est vide.

Q3. Désormais $A$ est l'application $(x,y) \to 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3$.

Soit $f$ un élément de $\mathcal{S}_A$. Montrer que : $f(0) = 0$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ f''(t) = 12t^2$.

En déduire $\mathcal{S}_A$ (double inclusion).

Q4. Etudier les extremum de $A$.

---

Q1) Posons $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $u(x,y) = x+y$, $v(x,y) = x$ et $w(x,y) = y$.

$u, v, w$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Par composition

$\varphi_1 = f \circ u$, $\varphi_2 = f \circ v$ et $\varphi_3 = f \circ w$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Notons que $\varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_3 + A$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)\, f'(u(x,y)) = f'(x+y)$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)\, f''(x+y) = f''(x+y)$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)\, f'(v(x,y)) = f'(v(x,y))$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)\, f''(v(x,y)) = 0 \times f''(v(x,y)) = 0$.

De même $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y \partial x}(x,y) = 0$.

Alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}(x,y)$. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f''(x+y) = \dfrac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}(x,y)$.

Q2) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $\dfrac{\partial A}{\partial x}(x,y) = 3x^2 y^3$ ; $\dfrac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}(x,y) = 9x^2 y^2$.

Comme $f \in \mathcal{S}_A$ : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f''(x+y) = 9x^2 y^2$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = f''(x+0) = 9x^2 \times 0^2 = 0$. $f''$ est nulle. Ainsi $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $9x^2 y^2 = 0$ !!!

Ainsi $\mathcal{S}_A = \emptyset$.

Q3 Soit $f \in \mathcal{F}_A$. $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)+A(0,0)=2f(0)$; $f(0)=0$.

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f''(x+y)=\frac{\partial^2 A}{\partial y\partial x}(x,y)=12x^2+24xy+12y^2=12(x+y)^2$.

$\forall t\in\mathbb{R}$, $f''(t)=f''(t+0)=12(t+0)^2=12t^2$.

Ainsi $\exists c\in\mathbb{R}, \forall t\in\mathbb{R}, f'(t)=4t^3+c$.

$\exists d\in\mathbb{R}, \forall t\in\mathbb{R}, f(t)=t^4+ct+d$. Or $f(0)=0$ donc $d=0$.

Ainsi si $f\in\mathcal{F}_A$, $\exists c\in\mathbb{R}, \forall t\in\mathbb{R}, f(t)=t^4+ct$.

Réciproquement supposons que : $\exists c\in\mathbb{R}, \forall t\in\mathbb{R}, f(t)=t^4+ct$.

- $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$

- $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x+y)=(x+y)^4+c(x+y)=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4+cx+cy=f(x)+f(y)+A(x,y)$!

Ainsi $f\in\mathcal{F}_A$.

Donc $\underline{\underline{\mathcal{F}_A=\{f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})\mid \exists c\in\mathbb{R}, \forall t\in\mathbb{R}, f(t)=t^4+ct\}}}$.

Q4 Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$\frac{\partial A}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial A}{\partial y}(x,y)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}12x^2y+12xy^2+4y^3=0\\4x^3+12x^2y+12xy^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y(3x^2+3xy+y^2)=0\\x(x^2+3xy+3y^2)=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ ou $\begin{cases}x\neq 0,\\y=0\\x^2=0!\end{cases}$ ou $\begin{cases}y\neq 0\\x=0\\y^2=0!\end{cases}$ ou $\begin{cases}x\neq 0, y\neq 0\\3x^2+3xy+y^2=0\\x^2+3xy+3y^2=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ ou $\begin{cases}x\neq 0, y\neq 0\\3x^2+3xy+y^2=0\\2x^2-2y^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ ou $\begin{cases}x\neq 0, y\neq 0\\x=y\\7x^2=0!\end{cases}$ ou $\begin{cases}x\neq 0, y\neq 0\\x=-y\\y^2=0\ !\end{cases}$

$O=(0,0)$ est le seul point critique de $A$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $A(x,x)=14x^4$ et $A(x,-x)=-2x^4$.

Soit $r\in\mathbb{R}^*_+$. $X_1=(\frac{r}{2},\frac{r}{2})\in B_\infty(O,r)$ et $A(X_1)>0$. $X_2=(\frac{r}{2},-\frac{r}{2})\in B_\infty(O,r)$ et $A(X_2)<0$.

Ainsi $A$ ne possède pas d'extremum en $O$.