Exercice Dérivation sous le signe somme avec hypothèses de mammouth obligées

a et b sont deux réels tels que $a < b$. I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

f est une application continue de $I \times [a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ sont définies et continues sur $I \times [a, b]$.

On considère la fonction de I dans $\mathbb{R}$, $\varphi : x \to \displaystyle\int_a^b f(x, t)\, dt$.

Q1. Montrer que φ est définie sur I.

Q2. c est un élément de I. On se propose de montrer que φ est dérivable en c et que $\varphi'(c) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(c, t)\, dt$.

Soit α un réel strictement positif tel que : $[c - \alpha, c + \alpha] \subset I$.

a) Montrer que l'on peut trouver un réel positif M tel que :

$$\forall (x, t) \in [c - \alpha, c + \alpha] \times [a, b], \ \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t)\right| \leqslant M$$

b) Soit h un réel tel que $0 < |h| \leqslant \alpha$. Montrer que :

$$\forall t \in [a, b], \ |f(c + h, t) - f(c, t) - h\, \frac{\partial f}{\partial x}(c, t)| \leqslant \frac{h^2}{2}\, M.$$

(fixer t dans $[a, b]$ et considérer $g : x \to f(x, t)$).

En déduire que :

$$\left|\frac{\varphi(c + h) - \varphi(c)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(c, t)\, dt\right| \leqslant |h| \frac{(b - a)M}{2}$$

Conclure proprement.

Q3. Application.

a) Montrer que $\varphi : x \to \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1 + t^2}\, dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $x \to -\displaystyle\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}\, dt$ (utiliser ce sui précède en justifiant avec soin les conditions d'applications).

b) Montrer que $u : x \to \varphi(x^2) + \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt\right)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée nulle. Que dire alors de u ?

c) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. En déduire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$

Q1) f étant continue sur $I \times [a,b]$, toutes ses applications partielles sont continues.
En particulier si x est un élément de I, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[a,b]$ donc elle y est intégrable.
Par conséquent, pour tout élément x de I, $\int_a^b f(x,t)\,dt$ a un sens.
F est définie sur I.

Q2) a) $[c-\alpha, c+\alpha]$ et $[a,b]$ sont deux fermés de $\mathbb{R}$ donc $[c-\alpha,c+\alpha]\times[a,b]$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Montrons que cet ensemble est borné. Soit $(x,t)\in[c-\alpha,c+\alpha]\times[a,b]$.

$c-\alpha \leq x \leq c+\alpha$; $-\alpha \leq x-c \leq \alpha$; $|x-c| \leq \alpha$; $|x|-|c| \leq |x-c| \leq \alpha$; $|x| \leq |c|+\alpha$.

$a \leq t \leq b$; $t \leq b \leq |b|$; $-t \leq -a \leq |a|$; $|t| \leq \max(|a|,|b|)$

Posons $r = \max(|c|+\alpha, |a|, |b|)$

$\forall (x,t)\in[c-\alpha,c+\alpha]\times[a,b]$, $|x| \leq r$ et $|t| \leq r$

$\forall (x,t)\in[c-\alpha,c+\alpha]\times[a,b]$, $\|(x,t)\|_\infty \leq r$

$[c-\alpha,c+\alpha]\times[a,b]$ est donc contenu dans la boule fermée de centre $O=(0,0)$ et de rayon r.
$[c-\alpha,c+\alpha]\times[a,b]$ est donc un fermé borné de $\mathbb{R}^2$. La $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ est continue sur $I\times[a,b]$ donc sur ce fermé borné ; par conséquent $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ est bornée sur $[c-\alpha,c+\alpha]\times[a,b]$.

$\exists M \in \mathbb{R}_+$, $\forall (x,t)\in[c-\alpha,c+\alpha]\times[a,b]$, $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq M$.

b) Fixons t dans $[a,b]$. Posons $\forall x\in[c-\alpha,c+\alpha]$, $g(x)=f(x,t)$.

g est dérivable sur $[c-\alpha,c+\alpha]$ et $\forall x\in[c-\alpha,c+\alpha]$, $g'(x)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ ($\frac{\partial f}{\partial x}$ existe sur $I\times[a,b]$)
g' est dérivable sur $[c-\alpha,c+\alpha]$ et $\forall x\in[c-\alpha,c+\alpha]$, $g''(x)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ ($\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ existe sur $I\times[a,b]$)
g'' est continue sur $[c-\alpha,c+\alpha]$ car $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ est continue sur $I\times[a,b]$.
Finalement g est C^2 sur $[c-\alpha,c+\alpha]$.
Soit h un réel tel que : $0<|h|\leq\alpha$. $c+h\in[c-\alpha,c+\alpha]$.
La formule de Taylor appliquée à g entre c et $c+h$ donne :

$$|g(c+h)-g(c)-h\,g'(c)| \leq \frac{h^2}{2}\max_{u\in[c,c+h]}|g''(u)| = \frac{h^2}{2}\max_{u\in[c,c+h]}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,t)\right| \leq \frac{h^2}{2}\times M$$

ce qui s'écrit encore : $\left| f(c+h,t) - f(c,t) - h\,\frac{\partial f}{\partial x}(c,t) \right| \le \frac{h^2}{2} M$

donc $\forall t \in [a,b],\ \left| f(c+h,t) - f(c,t) - h\,\frac{\partial f}{\partial x}(c,t) \right| \le \frac{h^2}{2} M.$

Notons que $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(c,t)$ est continue sur $[a,b]$.

$$\left| \varphi(c+h) - \varphi(c) - h \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(c,t)\,dt \right| = \left| \int_a^b \left[f(c+h,t) - f(c,t) - h \frac{\partial f}{\partial x}(c,t) \right] dt \right|$$

$$\left| \varphi(c+h) - \varphi(c) - h \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(c,t)\,dt \right| \le \int_a^b \left| f(c+h,t) - f(c,t) - h \frac{\partial f}{\partial x}(c,t) \right| dt \le \int_a^b \frac{h^2}{2} M\,dt = \frac{h^2}{2} M (b-a).$$

Donc $\forall h \in \mathbb{R},\ 0<|h| \le \alpha \Rightarrow \left| \varphi(c+h) - \varphi(c) - h \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(c,t)\,dt \right| \le \frac{h^2}{2} M (b-a)$

En divisant par $|h|$ il vient :

$$\forall h \in \mathbb{R},\quad 0 < |h| \le \alpha \Rightarrow \left| \frac{\varphi(c+h) - \varphi(c)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(c,t)\,dt \right| \le \frac{|h|}{2} M (b-a).$$

Comme $\lim_{h \to 0} \left(\frac{|h|}{2} M (b-a) \right) = 0$: $\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(c+h) - \varphi(c)}{h} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(c,t)\,dt$

ce qui prouve que <u>φ est dérivable en c et que</u> <u>$\varphi'(c) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(c,t)\,dt.$</u>

(9) Posons $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1],\ f(x,t) = \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$

$(x,t) \to -x(1+t^2)$ et $(x,t) \to \frac{1}{1+t^2}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times [0,1]$; $u \mapsto e^u$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent f est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times [0,1]$.

$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1],\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -(1+t^2) \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} = -e^{-x(1+t^2)}.$

f est C^1 sur $\mathbb{R} \times [0,1]$ et $(x,t) \to -(1+t^2)$ aussi ! Par produit $\frac{\partial f}{\partial x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times [0,1]$ *; en particulier $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ existe et est continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$.

Ce qui précède montre alors que $\varphi : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

---

* ce qui amène la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$

$\forall x \in \mathbb{R},\quad \varphi'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt = \int_0^1 -e^{-x(1+t^2)}\,dt = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}\,dt.$

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}\,dt.$

b) $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est la primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$ qui vaut 0 en 0.

donc $x \mapsto \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto x^2$ aussi, par composition : $x \mapsto \varphi(x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Finalement $u : x \mapsto \varphi(x^2) + \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = 2x\,\varphi'(x^2) + 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt + 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x e^{-t^2}\,dt \underset{t=ux}{=} \int_0^1 e^{-u^2x^2}\,x\,du = x\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,dt$

$\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt + 2e^{-x^2}x\int_0^1 e^{-t^2}\,dt = \dots = 0$!

$\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = 0$ donc u est constante sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = u(0) = \varphi(0) - \left(\int_0^0 e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\operatorname{Arctan} t]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad 0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt \underset{1+t^2 \geq 1}{\leq} \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt \leq \int_0^1 e^{-x^2}\,dt = e^{-x^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leq \varphi(x^2) \leq e^{-x^2}.$

Par encadrement $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x^2) = 0$; $\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4} - \varphi(x^2)\right) = \frac{\pi}{4}.$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^x e^{-t^2}\,dt \geq 0$: $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ existe et vaut $\sqrt{\pi}/2$; par parité $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ existe et vaut $\sqrt{\pi}$.

un changement de variable $u = \sqrt{2}\,t$ prouve alors que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du$ existe et vaut $\sqrt{2\pi}$.

Exercice **Un troisième exemple.** EDHEC 2001

On désigne par n et r deux entiers naturels vérifiant $n \geqslant 2$ et $r \geqslant 3$.

On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à r résultats différents R_1, R_2, ..., R_r de probabilités respectives x_1, x_2, ..., x_r. On supppose que, pour tout i de $[\![1, r]\!]$, $0 < x_i < 1$.

On effectue n épreuves indépendantes du type de celle décrite ci-dessus.

Pour tout i de $[\![1, r]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat numéro i n'est pas obtenu à l'issue de ces n épreuves et qui vaut 0 sinon.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des n épreuves.

Q1 a. Exprimer la variable X en fonction de X_1, X_2, ..., X_r.

b. Donner la loi de X_i pour tout i de $\{1, 2, ..., r\}$.

c. En déduire que l'espérance de X est $E(X) = \sum_{i=1}^{r} (1 - x_i)^n$.

La suite de cet exercice consiste à rechercher les valeurs des réels x_i en lesquelles $E(X)$ admet un minimum.

En clair on cherche un minimum pour $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} (1 - x_i)^n$ sous les contraintes $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, ..., $x_r > 0$ et $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = 1$.

Q2 a. Écrire $E(X)$ comme une fonction, que l'on notera h, des $(r-1)$ variables x_1, ..., x_{r-1}.

La fonction h est alors définie sur un ouvert Ω' que l'on précisera.

Mettre en place tous les acteurs d'une optimisation sous contrainte.

b. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω'.

Q3 a. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de h.

b. Montrer que le seul point de $\mathbb{R}^{r-1}$ en lequel les dérivées partielles d'ordre 1 de h s'annulent simultanément est le point $B = \left(\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}, \cdots, \dfrac{1}{r}\right)$.

c. Conclure cette première phase.

d. Complément (uniquement pour faire voir à Sylvain comment on fait) : montrer que h possède un minimum locale en B.

Q4 a. Montrer que $\varphi : t \to t^n$ est convexe sur $]0, 1[$.

Alors si z_1, z_2, ..., z_r sont r éléments de $]0, 1[$ et α_1, α_2, ..., α_r sont réels positifs tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r = 1$ on a :

$$\varphi\left(\sum_{k=1}^{r} \alpha_k\, z_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{r} \alpha_k\, \varphi(z_k).$$

b. Montrer alors $E(X)$ est minimum si et seulement si $x_1 = x_2 = \cdots = x_r = \dfrac{1}{r}$.

Q1 a) $X = \sum_{i=1}^{r} X_i$

b) Soit $i \in [\![1, r]\!]$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ notons A_k l'événement : la $k^{\text{ième}}$ épreuve ne donne pas le résultat R_i.

Alors $\{X_i = 1\} = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$. Les épreuves se font de manière indépendante donc $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des événements indépendants.

Alors $P(X_i = 1) = P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$ et $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(A_k) = 1 - x_i$.

Ainsi $P(X_i = 1) = (1-x_i)^n$.

$\forall i \in [\![1,r]\!]$, $P(X_i = 1) = (1-x_i)^n$ et $P(X_i = 0) = 1-(1-x_i)^n$.

c) $E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{r} X_i\right) = \sum_{i=1}^{r} E(X_i) = \sum_{i=1}^{r} (1-x_i)^n$

$E(X) = \sum_{i=1}^{r} (1-x_i)^n$.

Q2 a) $x_r = x_1 + x_2 + \dots + x_{r-1}$ donc $E(X) = \sum_{i=1}^{r-1} (1-x_i)^n + (x_1 + \dots + x_{r-1})^n$

Position du problème. Posons :

- $\Omega =]0,1[^r$
- $\forall \hat{x} = (x_1, \dots, x_r) \in \Omega$, $f(\hat{x}) = \sum_{i=1}^{r} (1-x_i)^n$
- $\mathcal{C} = \{\hat{x} = (x_1, \dots, x_r) \in \Omega \mid x_1 + x_2 + \dots + x_r = 1\}$

On cherche alors à montrer que f a chaque un minimum sous la contrainte $\mathcal{C}$ et un point qui le réalise.

Une remarque.. Supposons que f admette un minimum sous la contrainte $\mathcal{C}$ en un point $A = (a_1, \dots, a_r)$ de $\Omega \cap \mathcal{C}$.

Alors $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_r > 0$, $1 - a_r = a_1 + \dots + a_{r-1}$.

Soit $\hat{x} = (x_1, \dots, x_r) \in \mathcal{C} \cap \Omega$. $f(\hat{x}) \geq f(A)$ et $1 - x_r = \sum_{i=1}^{r-1} x_i$

Ainsi : $\sum_{i=1}^{r-1} (1-x_i)^n + (x_1 + \dots + x_{r-1})^n \geq \sum_{i=1}^{r-1} (1-a_i)^n + (a_1 + \dots + a_{r-1})^n$.

Notons que $x_1 \in]0,1[, \dots, x_{r-1} \in]0,1[$ et $x_r = 1 - (x_1 + \dots + x_{r-1}) \in]0,1[$, ce qui équivaut alors $x_1 \in]0,1[, \dots, x_{r-1} \in]0,1[$ et $1 - (x_1 + \dots + x_{r-1}) > 0$

Alors la fonction $h : (x_1, \dots, x_{r-1}) \mapsto \sum_{i=1}^{r-1} (1-x_i)^n + \left(\sum_{i=1}^{r-1} x_i\right)^n$ admet sur l'ouvert $\Omega' = \{(x_1, \dots, x_{r-1}) \in]0,1[^{r-1} \mid 1 - (x_1 + \dots + x_{r-1}) > 0\}$ un minimum en $B = (a_1, a_2, \dots, a_{r-1})$. Comme h est de classe $\mathcal{C}^1$ (fonction polynômiale) sur l'ouvert Ω' : $\nabla h(B) = 0$.

b) h est de classe C^2 sur l'ouvert Ω' comme fonction polynomiale

Q3 a) Soit $\hat{x} = (x_1,\dots,x_{r-1}) \in \Omega'$. Soit $k \in [\![1,r-1]\!]$

$$\frac{\partial h}{\partial x_k}(\hat{x}) = -n(1-x_k)^{n-1} + n(x_1+\dots+x_{r-1})^{n-1}.$$

b) Soit $\hat{x} = (x_1,\dots,x_{r-1}) \in \Omega'$

$$\nabla h(\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,r-1]\!],\ -n(1-x_k)^{n-1} + n(x_1+\dots+x_{r-1})^{n-1} = 0$$

$$\nabla h(\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,r-1]\!]\quad (1-x_k)^{n-1} = (x_1+\dots+x_{r-1})^{n-1}$$

Or $t \mapsto t^{n-1}$ est injective sur $\mathbb{R}_+$

Ainsi $\nabla h(\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,r-1]\!],\quad 1-x_k = x_1+\dots+x_{r-1}$

$$\nabla h(\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in [\![2,r-1]\!],\ 1-x_k = 1-x_1 \\ 1-x_1 = x_1+\dots+x_{r-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = \dots = x_{r-1} \\ 1-x_1 = (r-1)x_1 \end{cases}$$

$$\nabla h(\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_{r-1} = \frac{1}{r}.$$

$B = (\frac{1}{r},\dots,\frac{1}{r})$ est le seul point critique de h sur Ω'.

c) L'analyse faite en Q2 c) montre que si f admet un minimum sous la contrainte C en $A = (a_1,\dots,a_r)$ alors :

1) $(a_1, a_2,\dots,a_{r-1}) = (\frac{1}{r}, \frac{1}{r},\dots,\frac{1}{r})$

2) $a_r = 1-(a_1+a_2+\dots+a_{r-1})$

Donc $a_1 = a_2 = \dots = a_{r-1} = \frac{1}{r}$ et $a_r = 1 - \frac{r-1}{r} = \frac{1}{r}$; par conséquent

$A = (\frac{1}{r}, \frac{1}{r},\dots,\frac{1}{r})$.

Nous étudierons dans Q4 l'existence d'un minimum pour f sous la contrainte C en $A = (\frac{1}{r},\dots,\frac{1}{r})$.

d) Soit q_B la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{n-1}$ associée à la hessienne de h en B.

$\forall i \in [\![1, r-1]\!]$, $\forall \hat{x} = (x_1, \dots, x_{r-1}) \in \mathbb{R}'$, $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}(\hat{x}) = n(n-1)(1-x_i)^{n-2} + n(n-1)(x_1 + \dots + x_{r-1})^{n-2}$

$\forall (i,j) \in [\![1, r-1]\!]^2$, $\forall \hat{x} = (x_1, \dots, x_{r-1}) \in \mathbb{R}'$, $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i}(\hat{x}) = n(n-1)(x_1 + \dots + x_{r-1})^{n-2}$ si $i \neq j$.

Alors $\forall i \in [\![1, r-1]\!]$, $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}(B) = 2n(n-1)\left(\dfrac{r-1}{r}\right)^{n-2}$ et

$\forall (i,j) \in [\![1, r-1]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}(B) = n(n-1)\left(\dfrac{r-1}{r}\right)^{n-2}$.

Alors $\nabla^2 h(B) = n(n-1)\left(\dfrac{r-1}{r}\right)^{n-2} \begin{pmatrix} 2 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 2 \end{pmatrix}$.

Soit $H = (h_1, \dots, h_{r-1}) \in \mathbb{R}^{r-1}$

$q_B(H) = n(n-1)\left(\dfrac{r-1}{r}\right)^{n-2} (h_1 \dots h_{r-1}) \begin{pmatrix} 2 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_{r-1} \end{pmatrix}$.

$q_B(H) = n(n-1)\left(\dfrac{r-1}{r}\right)^{n-2} (h_1 \dots h_{r-1}) \begin{pmatrix} h_1 + h_1 + \dots + h_{r-1} \\ h_2 + h_1 + \dots + h_{r-1} \\ \dots \\ h_{r-1} + h_1 + \dots + h_{r-1} \end{pmatrix}$

$q_B(H) = n(n-1)\left(\dfrac{r-1}{r}\right)^{n-2} \displaystyle\sum_{i=1}^{r-1} h_i (h_i + h_1 + \dots + h_{r-1})$

$q_B(H) = n(n-1)\left(\dfrac{r-1}{r}\right)^{n-2} \displaystyle\sum_{i=1}^{r-1} h_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{r-1} h_i\right)^2$

Ainsi $\forall H \in \mathbb{R}^{r-1} \setminus \{0\}$, $q_B(H) > 0$.

Alors h admet en B un minimum local (strict).

(Q4) a) φ est deux fois dérivable sur $]0,1[$ et $\forall t \in]0,1[$, $\varphi''(t) = n(n-1)(1-t)^{n-2} \geq 0$

par convexe sur $J =]0,1[$.

Alors $\forall a, b \in J^2$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $\varphi(\lambda a + (1-\lambda) b) \leq \lambda \varphi(a) + (1-\lambda)\varphi(b)$.

$\forall (a,b) \in J^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+^2$, $\lambda + \mu = 1 \Rightarrow \varphi(\lambda a + \mu b) \leq \lambda \varphi(a) + \mu \varphi(b)$.

Plus généralement :

$\forall (z_1,\dots,z_r) \in I^r$, $\forall (\alpha_1,\dots,\alpha_r) \in \mathbb{R}_+^r$, $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1 \Rightarrow \varphi(\sum_{i=1}^r \alpha_i z_i) \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i \varphi(z_i)$.

En particulier $\forall (z_1,\dots,z_r) \in I^r$, $\varphi\left(\frac{z_1+z_2+\cdots+z_r}{r}\right) \leq \frac{\varphi(z_1)+\varphi(z_2)+\cdots+\varphi(z_r)}{r}$.

b) Montrons alors que si $\hat{x} = (u_1,\dots,u_r) \in \mathcal{C} \cap \Omega$ alors $f(\hat{x}) \geq f(A)$ où

$A = (\frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \dots, \frac{1}{r})$.

Soit $\hat{x} = (u_1,\dots,u_r) \in \mathcal{C} \cap \Omega$. $1-u_1 \in]0,1[$, $1-u_2 \in]0,1[$, ..., $1-u_r \in]0,1[$

et $u_1+u_2+\cdots+u_r = 1$.

Alors $\varphi\left(\frac{1-u_1+1-u_2+\cdots+1-u_r}{r}\right) \leq \frac{1}{r}\sum_{i=1}^r \varphi(1-u_i) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^r (1-u_i)^n = \frac{1}{r} f(\hat{x})$

Donc $\varphi\left(\frac{r-1}{r}\right) \leq \frac{1}{r} f(\hat{x})$. $f(\hat{x}) \geq r\,\varphi\left(\frac{r-1}{r}\right) = r\left(\frac{r-1}{r}\right)^n$.

Or $f(A) = \sum_{i=1}^r (1-\frac{1}{r})^n = r\left(\frac{r-1}{r}\right)^n$. Ainsi $f(\hat{x}) \geq f(A)$.

$\forall \hat{x} \in \mathcal{C} \cap \Omega$, $f(\hat{x}) \geq f(A)$. f possède un minimum global sous la contrainte $\mathcal{C}$, ce minimum est atteint en le seul point $A = (\frac{1}{r},\dots,\frac{1}{r})$ il vaut $r\left(\frac{r-1}{r}\right)^n$.

Finalement $E(X)$ est minimum si et seulement si $u_1 = u_2 = \cdots = u_r = \frac{1}{r}$.

Exercice **Fonction convexe.**

Q1. Faire un rappel sur les fonctions numériques convexes.

> D est un convexe de $\mathbb{R}^n$ et f est une application de D dans $\mathbb{R}$.
>
> On dit que **f est convexe sur D** si : $\forall\lambda \in [0,1],\ \forall(A,B) \in D^2,\ f(\lambda A + (1-\lambda)B) \leqslant \lambda f(A) + (1-\lambda)f(B)$.
>
> On dit que f est **concave sur D** si $-f$ est convexe sur D.

▶ Dans tout l'exercice, Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall(A,B) \in \Omega^2,\ \forall t \in [0,1],\ \varphi_{AB}(t) = f\big(t\,A + (1-t)\,B\big) = f\big(B + t(A-B)\big)$.

Q2. Montrer que f est convexe si et seulement si, pour tout couple (A,B) d'éléments de Ω, φ_{AB} est convexe.

Q3. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

a) A et B sont deux éléments de Ω. Montrer que φ_{AB} est dérivable sur $[0,1]$ et que pour tout élément t de $[0,1]$,

$$\varphi'_{AB}(t) = < \nabla f\big(B + t(A-B)\big), A-B > = < \nabla f\big(t\,A + (1-t)\,B\big), A-B > .$$

b) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est convexe sur Ω.

ii) $\forall(A,X) \in \Omega^2,\ f(X) \geqslant f(A) + < \nabla f(A), X-A >$.

iii) $\forall(X,Y) \in \Omega^2,\ < \nabla f(Y), Y-X > \geqslant < \nabla f(X), Y-X >$ ou $< \nabla f(Y) - \nabla f(X), Y-X > \geqslant 0$.

c) A est un point de Ω. Montrer que si A est un point critique de f alors f admet en A un minimum global.
f est convexe sur Ω.

Q1. Un minimum sur les fonctions numériques convexes d'une variable. Dans ce qui suit I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Déf. 1 f est une application de I dans $\mathbb{R}$. f est **convexe** sur I si :

$$\forall(a,b) \in I^2, \forall\lambda \in [0,1],\ f(\lambda\,a + (1-\lambda)\,b) \leqslant \lambda\,f(a) + (1-\lambda)\,f(b).$$

Déf. 2 f est une application de I dans $\mathbb{R}$. f est **concave** sur I si :

$$\forall(a,b) \in I^2, \forall\lambda \in [0,1],\ \lambda\,f(a) + (1-\lambda)\,f(b) \leqslant f(\lambda\,a + (1-\lambda)\,b).$$

Prop. 1 Soit f est une application de I dans $\mathbb{R}$.
f est concave sur I si $-f$ est convexe.

> Dans la suite si f est une application de I dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}_f$ est la représentation graphique de f dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté au repère $\mathcal{R} = (O,\vec{i},\vec{j})$.

Th. 1 f est une application de I dans $\mathbb{R}$.

f est convexe sur I si et seulement si pour tout couple (a,b) d'éléments de I tel que $a < b$:

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(x-a) + f(a).$$

Cor. Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$.

f est convexe sur I si et seulement si pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{C}_f$, tout point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse comprise entre celles de A et B est en dessous du segment $[A, B]$.

Autrement dit f est convexe si et seulement si sa courbe représentative est en dessous de toutes ses cordes.

Th. 2 f est une application de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable sur I.

f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.

Th. 3 f est une application de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable sur I.

f est convexe sur I si et seulement si $\forall a \in I,\ \forall x \in I,\ f'(a)(x-a) + f(a) \leqslant f(x)$.

Cor. f est une application de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable sur I.

f est convexe sur I si et seulement si $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes.

Th. 4 f est une application de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est deux fois dérivable sur I.

f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I.

Q2 * Supposons que f est convexe. Soit $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que φ_{AB} est convexe.

Soit $(t,t') \in [0,1]^2$ et soit $\lambda \in [0,1]$

$$\varphi_{AB}(\lambda t+(1-\lambda)t') = f\big(B+(\lambda t+(1-\lambda)t')(A-B)\big) = f\big(\underbrace{\lambda B+(1-\lambda)B}_{B} + \lambda t(A-B) + (1-\lambda)t'(A-B)\big)$$

$$\varphi_{AB}(\lambda t+(1-\lambda)t') = f\big(\lambda\underbrace{(B+t(A-B))}_{\in\mathbb{R}} + (1-\lambda)\underbrace{(B+t'(A-B))}_{\in\mathbb{R}}\big) \underset{f \text{ est convexe}}{\leqslant} \lambda f(B+t(A-B)) + (1-\lambda) f(B+t'(A-B))$$

Donc $\varphi_{AB}(\lambda t+(1-\lambda)t') \leqslant \lambda\,\varphi_{AB}(t) + (1-\lambda)\varphi_{AB}(t')$.

φ_{AB} est convexe et ceci pour tout couple (A,B) de points de $\mathbb{R}$.

* Supposons que pour tout couple (A,B) d'éléments de $\mathbb{R}$, φ_{AB} est convexe.

Montrons que f est convexe.

Soit $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ et soit $\lambda \in [0,1]$.

$$f(\lambda A+(1-\lambda)B) = f(B+\lambda(A-B)) = \varphi_{AB}(\lambda) = \varphi_{AB}(\lambda\times 1+(1-\lambda)\times 0) \overset{\varphi_{AB} \text{ est convexe}}{\leqslant} \lambda\underbrace{\varphi_{AB}(1)}_{f(A)} + (1-\lambda)\underbrace{\varphi_{AB}(0)}_{f(B)}.$$

Donc $f(\lambda A+(1-\lambda)B) \leqslant \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B)$.

Ceci achève de montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

f est convexe sur $\mathbb{R}$ $\Longleftrightarrow$ $\forall (A,B) \in \mathbb{R}^2$, φ_{AB} est convexe sur $[0,1]$.

Q3) a) Soient $A=(a_1,\dots,a_n)$ et $B=(b_1,\dots,b_n)$ deux éléments de Ω.

Posons $\forall k\in[\![1,n]\!], \forall t\in[0,1],\ u_k(t)= b_k + t(a_k-b_k)$

- Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, u_k est dérivable et même de classe C^1 sur $[0,1]$.
- f est de classe C^1 sur Ω.
- $\forall t\in[0,1]$, $(u_1(t),u_2(t),\dots,u_n(t))= B+t(A-B)= tA+(1-t)B \in \Omega$ ← Ω est convexe.

Alors $t\mapsto f(u_1(t),\dots,u_n(t))$ est dérivable et même de classe C^1 sur $[0,1]$

Donc $\underline{\varphi_{AB} : t\mapsto f(B+t(A-B))}$ est de classe dérivable et même de classe C^1 sur $[0,1]$.

De plus $\forall t\in[0,1]$, $\varphi'_{AB}(t)= \sum_{k=1}^{n} u_k'(t)\ \frac{\partial f}{\partial x_k}(u_1(t),u_2(t),\dots,u_n(t))$

$\forall t\in[0,1]$, $\varphi'_{AB}(t) = \sum_{k=1}^{n} (a_k-b_k)\ \frac{\partial f}{\partial x_k}(B+t(A-B))$.

$\underline{\forall t\in[0,1].\ \varphi'_{AB}(t)= \langle \nabla f(B+t(A-B)), A-B\rangle = \langle \nabla f(tA+(1-t)B), A-B\rangle}$

b) * Supposons i) et montrons ii). Soit $(A,X)\in\Omega^2$.

f est convexe sur Ω donc φ_{AX} est convexe sur $[0,1]$.

Comme φ_{AX} est dérivable sur $[0,1]$:

$\forall (t,t')\in[0,1]^2$, $\varphi_{AX}(t')\geq \varphi'_{AX}(t)(t'-t)+\varphi_{AX}(t)$.

En particulier $\varphi_{AX}(0)\geq \varphi'_{AX}(1)(0-1)+\varphi_{AX}(1)$.

Alors $f(X)\geq \langle\nabla f(X+1(A-X)), A-X\rangle\times(-1)+f(A)$.

Donc $f(X)\geq f(A)-\langle\nabla f(A), A-X\rangle$.

$\underline{f(X)\geq f(A)+\langle \nabla f(A), X-A\rangle}$. et ceci pour tout $(A,X)\in\Omega^2$.

Alors $\underline{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}}$.

* Supposons ii) et montrons iii).

Soit $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$.

ii) donne : $\begin{cases} f(X) \geq f(Y) + \langle \nabla f(Y), X-Y \rangle \\ \text{et} \\ f(Y) \geq f(X) + \langle \nabla f(X), Y-X \rangle \end{cases}$. En ajoutant il vient :

$$f(X)+f(Y) \geq f(Y)+f(X) + \langle \nabla f(Y), X-Y \rangle + \langle \nabla f(X), Y-X \rangle .$$

Donc $0 \geq -\langle \nabla f(Y), Y-X \rangle + \langle \nabla f(X), Y-X \rangle$.

Ainsi $\underline{\langle \nabla f(Y), Y-X \rangle \geq \langle \nabla f(X), Y-X \rangle}$ et ceci pour tout $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$.

Alors $\underline{\text{ii)} \Rightarrow \text{iii)}}$.

* Supposons iii) et montrons i). Soit à montrer que f est convexe.

Soit $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que φ_{AB} est convexe sur $[0,1]$.

Il suffit de montrer que φ'_{AB} est croissante sur $[0,1]$. Soit $(t,t') \in [0,1]^2$ tel que $t \leq t'$. Montrons que $\varphi'_{AB}(t) \leq \varphi'_{AB}(t')$.

Cela revient à montrer que $\langle \nabla f(B+t(A-B)), A-B \rangle \leq \langle \nabla f(B+t'(A-B)), A-B \rangle$.

En appliquant iii) il vient :

$$\langle \nabla f(B+t'(A-B)), \underbrace{A+t'(A-B)-(A+t(A-B))}_{(t'-t)(A-B)} \rangle \geq \langle \nabla f(B+t(A-B)), \underbrace{A+t'(A-B)-(A+t(A-B))}_{(t'-t)(A-B)} \rangle$$

Alors $(t'-t) \langle \nabla f(B+t'(A-B)), A-B \rangle \geq (t'-t) \langle \nabla f(B+t(A-B)), A-B \rangle$.

Comme $t'-t > 0$: $\langle \nabla f(B+t'(A-B)), A-B \rangle \geq \langle \nabla f(A+t(A-B)), A-B \rangle$

Donc $\varphi'_{AB}(t) \leq \varphi'_{AB}(t')$. Ceci achève de montrer la convexité de φ_{AB} pour (A,B) quelconque dans $\mathbb{R}^2$. $\underline{f \text{ est donc convexe}}$. iii) $\Rightarrow$ i).

Ainsi $i \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow i$.

Alors $i \Leftrightarrow ii) \Leftrightarrow iii)$.

c) Soit A un point critique de f. $\nabla f(A) = 0$.

Alors $\forall X \in \Omega$, $f(X) \geq f(A) + \langle \nabla f(A), X-A \rangle = f(A)$.

$\forall X \in \Omega$, $f(X) \geq f(A)$. f admet en A un minimum global.

Exercice **Troisième caractérisation des fonctions convexes.**

Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et f est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. f est de classe C^2 sur Ω.

On pose : $\forall (A,B) \in \Omega^2,\ \forall t \in [0,1],\ \varphi_{AB}(t) = f(B + t(A-B))$.

On rappelle que f est convexe si et seulement si, pour tout couple (A,B) d'éléments de Ω, φ_{AB} est convexe.

Q1. Soit (A,B) deux points de Ω. Montrer que φ_{AB} est deux fois dérivable sur $[0,1]$ et calculer sa dérivée seconde.

Q2. Montrer que f est convexe sur Ω si et seulement si pour tout point A de Ω les valeurs propres de la hessienne $\nabla^2 f(A)$ de f en A sont positives ou nulles.

Q1.- f est de classe C^2 sur Ω et $\forall t \in [0,1]$, $\varphi_{AB}(t) = f(B+t(A-B))$.

Alors φ_{AB} est de classe C^2 sur $[0,1]$ et $\forall t \in [0,1]$, $\varphi''_{AB}(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_i-b_i)(a_j-b_j) \times \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(B+t(A-B))$

Ainsi $\forall t \in [0,1]$, $\underline{\underline{\varphi''_{AB}(t) = q_{B+t(A-B)}(A-B)}}$.

Q2.- Rappel.. Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ associée à S. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) Les valeurs propres de S sont positives ou nulles.

ii) $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $q(X) \geqslant 0$

iii) $\forall \hat{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t\hat{X} S \hat{X} \geqslant 0$

(iv) $\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $S = {}^tM M$).

Supposons que, pour tout A dans Ω, les valeurs propres de $\nabla^2 f(A)$ sont positives ou nulles.

Alors $\forall A \in \Omega$, $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $q_A(X) \geqslant 0$.

Ainsi $\forall (A,B) \in \Omega^2$, $\forall t \in [0,1]$, $\varphi''_{AB}(t) = q_{B+t(A-B)}(A-B) \geqslant 0$.

Donc pour tout $(A,B) \in \Omega^2$, φ_{AB} est convexe. Ainsi f est convexe.

* Réciproquement supposons que f est convexe.

Alors pour tout (A,B) dans Ω^2, φ_{AB} est convexe.

Par conséquent $\forall (A,B) \in \Omega^2$, $\forall t \in [0,1]$, $q_{A+t(A-B)}(A-B) = \varphi''_{AB}(t) \geqslant 0$.

En particulier $\forall (A,B) \in \Omega^2$, $q_A(A-B) = q_{B+1(A-B)}(A-B) \geqslant 0$

Fixons A dans Ω et montrons que $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $q_A(X) \geqslant 0$. Ceci montrera que les valeurs propres de la hessienne de f en A sont positives ou nulles (rappel)

Ω est ouvert donc $\exists r \in \mathbb{R}_+^*$, $B(A,r) \subset \Omega$.

Soit $X \in \mathbb{R}^n$. 1^er^ Cas.. $X=0$. Alors $q_A(X)=0 \geqslant 0$.

2^e^ Cas.. $X \neq 0$. Posons $Y = \dfrac{r}{2\|X\|} X$! Posons $\lambda = \dfrac{r}{2\|X\|}$. Alors $Y = \lambda X$ et $\lambda > 0$.

Posons encore $B = A - Y$. Alors $Y = A - B$.

$\|A-B\| = \|A-(A-Y)\| = \|Y\| = \|\lambda X\| = |\lambda| \|X\| = \lambda \|X\| = \dfrac{r}{2\|X\|} \|X\| = \dfrac{r}{2} < r$!

Ainsi $B \in B(A,r)$ donc $B \in \Omega$.

Alors $q_A(A-B) \geqslant 0$. Donc $q_A(Y) \geqslant 0$.

Ainsi $0 \leq q_A(Y) = q_A(\lambda X) \underset{\text{ok ?}}{=} \lambda^2 q_A(X)$. Comme $\lambda^2 > 0$: $q_A(X) \geqslant 0$.

Finalement $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $q_A(X) \geqslant 0$.

Ainsi les valeurs propres de la hessienne de f à A sont positives ou nulles.

Retenons encore que :

f est convexe sur Ω si et seulement si $\forall A \in \Omega$, $\forall H \in \mathbb{R}^n$, $q_A(H) \geqslant 0$.

f est concave sur Ω si et seulement si $\forall A \in \Omega$, $\forall H \in \mathbb{R}^n$, $q_A(H) \leqslant 0$.

Exercice 1 **Dans cet exercice on identifie les éléments de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.**

A est une matrice symétrique dont les valeurs propres sont strictements positives. B est un élément de $\mathbb{R}^n$ et X_0 est l'unique élement de $\mathbb{R}^n$ tel que $AX_0 = B$. Pour tout élément X de $\mathbb{R}^n$ on pose :

$$f(X) = \frac{1}{2}\, {}^tXAX - {}^tBX = \frac{1}{2} < AX, X > - < B, X >$$

et on se propose d'étudier les extremums de f.

Q1. Montrer que si H est un élément non nul de $\mathbb{R}^n$: ${}^tHAH > 0$ (on pourra utiliser une bon de vecteurs propres).

Q2. a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.

b) $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et X est un élément de $\mathbb{R}^n$. Calculer successivement $f(X)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(X)$.

Vérifier que $\nabla f(X) = AX - B$. Que dire de $\nabla^2 f(X)$?

En déduire que f possède un unique point critique X^*.

Q2. Soit H un élément de $\mathbb{R}^n$. Développer $f(X^* + H) - f(X^*)$.

En déduire que f possède un minimum globale en X^*. Normal ? ?

Q1 Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $\exists (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$, $X = \sum_{i=1}^n \gamma_i X_i$

$AX = \sum_{i=1}^n \gamma_i A X_i = \sum_{i=1}^n \gamma_i \alpha_i X_i$

${}^tXAX = <X, AX> = \sum_{i=1}^n (\gamma_i(\gamma_i \alpha_i)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \gamma_i^2$

car $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base orthonormée.

Par hypothèse $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i > 0$. Alors ${}^tXAX = \sum_{i=1}^n \alpha_i \gamma_i^2 \geq 0$

Supposons $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ $\alpha_i \gamma_i^2 \geq 0$

Alors $\exists i_0 \in [\![1,n]\!]$, $\gamma_{i_0} \neq 0$. ${}^tXAX = \sum_{i=1}^n \alpha_i \gamma_i^2 \geq \alpha_{i_0} \gamma_{i_0}^2 > 0$

donc $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$, ${}^tXAX > 0$.

En identifiant : $\forall H \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, ${}^tHAH > 0$.

Q2 a) Soit $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Soit $Y=(y_1,y_2,\dots,y_n)=AX$.

$$f(X)=\frac{1}{2}{}^tXAX+{}^tBX=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-{}^tBX.\ \text{Posons } B=(b_1,b_2,\dots,b_n).$$

$$f(X)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}b_ix_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\Big)-\sum_{i=1}^{n}b_ix_i$$

$$f(X)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j-\sum_{i=1}^{n}b_ix_i.$$

f est donc une fonction polynôme ainsi f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.

b) $\forall X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $f(X)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j-\sum_{i=1}^{n}b_ix_i$.

Posons $\forall X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $g(X)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}a_{k\ell}x_kx_\ell$ et $h(X)=\sum_{k=1}^{n}b_kx_k$.

$\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\forall X\in\mathbb{R}^n$, $\frac{\partial h}{\partial x_i}(X)=b_i$.

Soit $(k,\ell)\in[\![1,n]\!]^2$. Posons $\forall X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $g_{k,\ell}(X)=a_{k\ell}x_kx_\ell$.

$$\forall X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\quad \frac{\partial g_{k,\ell}}{\partial x_i}(X)=\begin{cases}2a_{ii}x_i & \text{si } (k,\ell)=(i,i)\\ a_{i\ell}x_\ell & \text{si } k=i \text{ et } \ell\neq i\\ a_{ki}x_k & \text{si } k\neq i \text{ et } \ell=i\\ 0 & \text{si } k\neq i \text{ et } \ell\neq i\end{cases}$$

Alors $\forall X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\frac{\partial g}{\partial x_i}(X)=2a_{ii}x_i+\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i}}^{n}a_{i\ell}x_\ell+\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n}a_{ki}x_k$

$\forall X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\frac{\partial g}{\partial x_i}(X)=\sum_{\ell=1}^{n}a_{i\ell}x_\ell+\sum_{k=1}^{n}a_{ki}x_k$. Or A est symétrique donc $\forall X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\frac{\partial g}{\partial x_i}(X)=\sum_{\ell=1}^{n}a_{i\ell}x_\ell+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k=2\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$

Rappelons que $\forall X \in \mathbb{R}^n, f(X) = \frac{1}{2} g(X) - h(X)$.

Alors $\forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i$.

Notons que $\forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ AX - B = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j - b_1, \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j - b_2, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j - b_n\right)$

Alors $\forall X \in \mathbb{R}^n, \ \nabla f(X) = AX - B$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$,

$\forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - b_k$

$\forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X) = a_{ij}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$

$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, n]\!], \forall X \in \mathbb{R}^n, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X) = a_{ij}$.

Ainsi $\nabla^2 f(X) = A$.

Les valeurs propres de A sont strictement positives donc 0 n'est pas valeur propre de A. A est inversible.

$\forall X \in \mathbb{R}^n, \ \nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow AX - B = 0 \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.

Ainsi f admet un point critique et un seul : $X^* = A^{-1}B$.

Q2) Soit $H \in \mathbb{R}^n$. $f(X^*+H) - f(X^*) = \frac{1}{2} {}^t(X^*+H)A(X^*+H) - {}^tB(X^*+H) - \frac{1}{2} {}^tX^*AX^* + {}^tBX^*$.

$f(X^*+H) - f(X^*) = \frac{1}{2} {}^tX^*AX^* + \frac{1}{2} {}^tX^*AH + \frac{1}{2} {}^tHAX^* + \frac{1}{2} {}^tHAH - {}^tBX^* - {}^tBH - \frac{1}{2} {}^tX^*AX^* + {}^tBX^*$

$f(X^*+H) - f(X^*) = \frac{1}{2} {}^tHAH + \frac{1}{2}\langle X^*, AH\rangle + \frac{1}{2}\langle H, AX^*\rangle - \langle B, H\rangle$

Or $\langle X^*, AH\rangle = \langle AH, X^*\rangle = {}^t(AH)X^* = {}^tH\,{}^tAX^* = {}^tHAX^* = \langle H, AX^*\rangle \overset{AX^* = B}{=} \langle H, B\rangle$

Donc $f(X^*+H) - f(X^*) = \frac{1}{2} {}^tHAH + \frac{1}{2}\langle H, B\rangle + \frac{1}{2}\langle H, B\rangle - \langle B, H\rangle = \frac{1}{2} {}^tHAH \geq 0$ (Q1)

$\forall H \in \mathbb{R}^n, f(X^*+H) - f(X^*)$. f admet en X^* un minimum global.

Remarque. - $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla^2 f(x) = A$ et les valeurs propres de A sont (strictement) positives. Ainsi f est convexe sur $\mathbb{R}^n$.

Il est alors de notoriété publique qu'en un point critique de f, f possède un minimum global.

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall X \in \Omega,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^{+*},\ \lambda X \in \Omega.$$

Q1. α est un réel et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$ α-homogène, c'est à dire telle que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall X \in \Omega,\ f(\lambda X) = \lambda^\alpha f(X).$$

Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, ces dérivées premières sont $(\alpha - 1)$-homogènes sur Ω.

Q2. a) $f : (x, y) \to \dfrac{x}{x^2 + y^2}$. Montrer que f est homogène sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ que l'on précisera (f est homogène s'il existe un réel α tel que f soit α-homogène).

b) c, a et b sont des réels strictement positifs. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ f(x, y) = c\, x^a y^b$. Montrer que f est homogène sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$.

Q3. α est un réel et f est de nouveau une application de Ω dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
a) Montrer que si f est α-homogène sur Ω :

$$\forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega,\ \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(X) = \alpha f(X)$$

(on pourra considérer, pour X fixé, la fonction $\lambda \to f(\lambda X)$).
b) On se propose de montrer la réciproque. Soit X un élément de Ω.
Pour tout élément λ de $\mathbb{R}^{+*}$ on pose $\psi(\lambda) = f(\lambda X) - \lambda^\alpha f(X)$ et $u(\lambda) = \psi(\lambda)\lambda^{-\alpha}$.
Montrer que pour tout réel λ strictement positif $\psi'(\lambda) = \frac{\alpha}{\lambda}\psi(\lambda)$. En déduire que u' est nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis qu'il en est de même pour u. Conclure.

Q1 Fixons λ dans $\mathbb{R}_+^*$ et posons $\forall X \in \Omega,\ g(X) = f(\lambda X)$.

Posons encore : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \forall X \in \Omega,\ u_k(X) = \lambda x_k$ (lorsque $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$).

Alors $\forall X \in \Omega,\ g(X) = f(u_1(X), u_2(X), \dots, u_n(X))$

- $u_1, u_2, \dots, u_n$ sont $\mathcal{C}^1$ sur Ω
- f est $\mathcal{C}^1$ sur Ω
- $\forall X \in \Omega,\ (u_1(X), u_2(X), \dots, u_n(X)) \in \Omega$

Ainsi g est $\mathcal{C}^1$ sur Ω et $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall X \in \Omega,\ \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(X) \frac{\partial f}{\partial x_k}(u_1(X), \dots, u_n(X))$.

Or $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ \forall X \in \Omega,\ \dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ \lambda & \text{si } k = i \end{cases}$

donc $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall X \in \Omega,\ \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(X) = \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda X)$.

Mais $\forall X \in \Omega,\ g(X) = f(\lambda X) = \lambda^\alpha f(X)$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall X \in \Omega,\ \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(X) = \lambda^\alpha \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X)$

Ainsi $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall X \in \Omega,\ \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda X) = \lambda^\alpha \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X)$. et comme λ n'est pas nul :

$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall X \in \Omega,\ \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda X) = \lambda^{\alpha - 1} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X)$.

Mieux : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall X \in \Omega,\ \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda X) = \lambda^{\alpha - 1} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X)$.

b] On suppose donc ici que : $\forall X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\Omega,\ \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(X)=\alpha f(X)$.

On se propose de montrer que f est α-homogène. On fixe alors $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ dans Ω et on pose : $\forall \lambda\in\mathbb{R}_+^*,\ \varphi(\lambda)=f(\lambda X)-\lambda^\alpha f(X)$.

$\lambda\mapsto f(\lambda X)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et de dérivée $\lambda\mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\lambda X)$ (voir le début du a))

$\lambda\mapsto \lambda^\alpha f(X)$ ——————————— $\lambda\mapsto \alpha\lambda^{\alpha-1}f(X)$.

Ainsi φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall \lambda\in\mathbb{R}_+^*,\ \varphi'(\lambda)=\sum_{k=1}^{n} x_k\frac{\partial f}{\partial x_k}(\lambda X)-\alpha\lambda^{\alpha-1}f(X)=\frac{1}{\lambda}\Big[\sum_{k=1}^{n}(\lambda x_k)\frac{\partial f}{\partial x_k}(\lambda X)-\alpha\lambda^\alpha f(X)\Big]$$

En appliquant la condition initiale à λX on obtient :

$\forall \lambda\in\mathbb{R}_+^*,\ \varphi'(\lambda)=\frac{1}{\lambda}[\alpha f(\lambda X)-\alpha\lambda^\alpha f(X)]=\frac{\alpha}{\lambda}\varphi(\lambda)$. $\forall \lambda\in\mathbb{R}_+^*,\ \varphi'(\lambda)=\frac{\alpha}{\lambda}\varphi(\lambda)$.

$\forall \lambda\in\mathbb{R}_+^*,\ u(\lambda)=\varphi(\lambda)\lambda^{-\alpha}$. u est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. $\forall \lambda\in\mathbb{R}_+^*,\ u'(\lambda)=\varphi'(\lambda)\lambda^{-\alpha}-\varphi(\lambda)\alpha\lambda^{-\alpha-1}=\lambda^{-\alpha}\left(\varphi'(\lambda)-\frac{\alpha}{\lambda}\varphi(\lambda)\right)=0$

$\forall \lambda\in\mathbb{R}_+^*,\ u'(\lambda)=0$. Donc u a une dérivée nulle sur l'intervalle $]0,+\infty[$; u est donc constante sur cet intervalle.

$\exists C\in\mathbb{R},\ \forall\lambda\in\mathbb{R}_+^*,\ u(\lambda)=C$. Donc $\forall\lambda\in\mathbb{R}_+^*,\ C=\varphi(\lambda)\lambda^{-\alpha}$. $\forall\lambda\in\mathbb{R}_+^*,\ \varphi(\lambda)=C\lambda^\alpha$

ce qui permet encore d'écrire que : $\forall\lambda\in\mathbb{R}_+^*,\ f(\lambda X)-\lambda^\alpha f(X)=C\lambda^\alpha$.

Cette égalité vaut pour $\lambda=1$, donc $f(X)-f(X)=C$; $C=0$ et : $f(\lambda X)-\lambda^\alpha f(X)=0$ pour tout réel λ strictement positif.

$\forall\lambda\in\mathbb{R}_+^*,\ f(\lambda X)=\lambda^\alpha f(X)$. Notons que l'on a pris au départ X quelconque dans Ω.

Ainsi $\forall X\in\Omega,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}_+^*,\ f(\lambda X)=\lambda^\alpha f(X)$ et : f est α-homogène sur Ω.

Finalement f est α-homogène sur Ω si et seulement si :

$$\forall X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\Omega,\ \sum_{k=1}^{n} x_k\frac{\partial f}{\partial x_k}(X)=\alpha f(X).$$

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est $(\alpha-1)$-homogène sur Ω.

(Q2) a) Posons $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ $(0=(0,0))$

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (c'est le complémentaire du fermé $\{0\}$) et on a de toute évidence : $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \forall X \in \Omega, \lambda X \in \Omega$ ($\lambda > 0$ et $X \neq 0$ donc $\lambda X \neq 0$).

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $X=(x,y) \in \Omega$.

$f(\lambda X) = \frac{\lambda x}{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} = \lambda^{-1} f(X)$. $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \forall X \in \Omega, f(\lambda X) = \lambda^{-1} f(X)$.

Donc f est (-1)-homogène sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

b) Notons que $\Omega = (\mathbb{R}_+^*)^2 =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \forall X \in \Omega, \lambda X \in \Omega$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \forall X=(x,y) \in \Omega, f(\lambda X) = f(\lambda x, \lambda y) = c(\lambda x)^a (\lambda y)^b = \lambda^{a+b} f(X)$.

Donc f est $(a+b)$-homogène sur $\Omega = (\mathbb{R}_+^*)^2$. Fin de l'intermède.

(Q3) a) Fixons X dans Ω et posons $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $h(\lambda) = f(\lambda X)$.

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Posons $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $v_k(\lambda) = \lambda x_k$ pour tout k dans $[\![1,n]\!]$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $h(\lambda) = f(v_1(\lambda), v_2(\lambda), \dots, v_n(\lambda))$

- $v_1, v_2, \dots, v_n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $(v_1(\lambda), v_2(\lambda), \dots, v_n(\lambda)) \in \Omega$

Alors h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(\lambda) = \sum_{k=1}^n v_k'(\lambda) \frac{\partial f}{\partial x_k}(v_1(\lambda), \dots, v_n(\lambda))$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(\lambda) = \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\lambda X) = \sum_{k=1}^n x_k \lambda^{\alpha-1} \frac{\partial f}{\partial x_k}(X)$

pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ est $(\alpha-1)$-homogène. (*)

Rappelons que : $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $h(\lambda) = f(\lambda X) = \lambda^\alpha f(X)$.

On a donc encore : $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(\lambda) = \alpha \lambda^{\alpha-1} f(X)$.

Donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum_{k=1}^n x_k \lambda^{\alpha-1} \frac{\partial f}{\partial x_k}(X) = \alpha \lambda^{\alpha-1} f(X)$; ainsi $\sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(X) = \alpha f(X)$

Finalement si f est α-homogène : $\forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, $\sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(X) = \alpha f(X)$.

(*) **Remarque**.- On peut se dispenser de cela. Il suffit d'écrire $\sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\lambda X) = h'(\lambda) = \alpha \lambda^{\alpha-1} f(X)$ et de faire $\lambda = 1$.