Exercice n est un élément de $[\![2,+\infty[\![$. $F=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\mid x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1\}$.

$$\forall X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in F,\ f(X)=\sum_{i\neq j}x_i\,x_j$$

Q1. Repréciser la fonction f. Soit $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ un élément de F. Exprimer $f(X)$ en fonction de $\sum_{k=1}^{n}x_k$ et $\sum_{k=1}^{n}x_k^2$.

Q2. Montrer que f possède un maximum M et un minimum m.

Q3. Montrer que M et m ne sont pas atteint en un point de $\Omega=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\mid x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<1\}$.

Q4. Montrer que $m=-1$.

Q5. Utiliser Cauchy-Schwarz pour prouver que $M=n-1$.

Q1 Soit $X=(x_1,\dots,x_n)\in F$. $f(X)=\sum_{i\neq j}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j-\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ ou $f(X)=2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$.

$f(X)=2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j=\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2-\sum_{k=1}^{n}x_k^2$.

Q2 F est la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour la norme $\|\cdot\|_2$, ainsi F est un fermé borné. De plus f est polynômiale donc continue.
f est continue sur le fermé borné F donc f possède un maximum et un minimum sur F.

Q3 $\Omega=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\mid x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<1\}$ est un ouvert (c'est la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 pour la norme $\|\cdot\|_2$). f est C^1 sur Ω car f est polynômiale. Si f atteint son maximum ou son minimum en un point A de Ω alors $\mathrm{grad} f(A)=0$.
Soit $A=(a_1,\dots,a_n)\in\Omega$.
$\mathrm{grad} f(A)=0\iff\forall i\in[\![1,n]\!],\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(A)=0\iff\forall i\in[\![1,n]\!],\ 2\sum_{k=1}^{n}a_k-2a_i=0$

$\mathrm{grad} f(A)=0\iff a_1=a_2=\cdots=a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\iff a_1=a_2=\cdots=a_n=0\iff A=0$

Ainsi si f atteint son maximum M (resp. minimum m) en un point de Ω : $M=0$ (resp. $m=0$)

Or $\left(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2},0,\dots,0\right)\in F$ et $f\left(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2},0,\dots,0\right)=\left(\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}\right)^2-\left(\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^2+\left(\frac{-1}{\sqrt2}\right)^2\right)=-1$ et

$\left(\frac{1}{\sqrt n},\frac{1}{\sqrt n},\dots,\frac{1}{\sqrt n}\right)\in F$ et $f\left(\frac{1}{\sqrt n},\frac{1}{\sqrt n},\dots,\frac{1}{\sqrt n}\right)=\left(n\times\frac{1}{\sqrt n}\right)^2-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt n}\right)^2=n-1$. Ainsi on ne peut pas avoir $m=0$ ou $M=0$. f n'atteint pas son maximum ou son minimum en un point de Ω.

(Q4) $\forall (x_1,\dots,x_n)\in F$, $f(x_1,\dots,x_n)=\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2-\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geqslant -\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geqslant -1 = f\left(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2},0,\dots,0\right)$ et

$\left(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2},0,\dots,0\right)\in F$.

Alors $\underline{m=-1}$.

(Q5) Soit $(x_1,\dots,x_n)\in F$.

Cauchy-Schwarz (*)

$f(x_1,\dots,x_n)=\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2-\sum_{k=1}^{n} x_k^2=\left(\sum_{k=1}^{n} 1\times x_k\right)^2-\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} 1^2\times\sum_{k=1}^{n} x_k^2-\sum_{k=1}^{n} x_k^2$.

$f(x_1,\dots,x_n)\leqslant n\sum_{k=1}^{n} x_k^2-\sum_{k=1}^{n} x_k^2=(n-1)\sum_{k=1}^{n} x_k^2\leqslant (n-1)=f\left(\frac{1}{\sqrt n},\dots,\frac{1}{\sqrt n}\right)$ et $\left(\frac{1}{\sqrt n},\dots,\frac{1}{\sqrt n}\right)\in F$

Ainsi $\underline{M=n-1}$.

<u>Remarque</u>.. Soit $(x_1,\dots,x_n)\in F$ tel que : $f(x_1,\dots,x_n)=M$. Alors d'après Q3,

$(x_1,\dots,x_n)\in F\setminus\Omega$ donc $x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2=1$.

D'après ce qui précède l'inégalité (*) est une égalité donc les vecteurs $(1,1,\dots,1)$ et $(x_1,\dots,x_n)$ sont colinéaires. Comme $(1,1,\dots,1)$ n'est pas nul :

$\exists \lambda\in\mathbb{R}$, $(x_1,x_2,\dots,x_n)=\lambda(1,1,\dots,1)$. $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $x_k=\lambda$.

$1=x_1^2+\dots+x_n^2=n\lambda^2$. $\lambda^2=1/n$. $\lambda=\pm 1/\sqrt n$.

$\left(-\frac{1}{\sqrt n},-\frac{1}{\sqrt n},\dots,-\frac{1}{\sqrt n}\right)$ et $\left(\frac{1}{\sqrt n},\frac{1}{\sqrt n},\dots,\frac{1}{\sqrt n}\right)$ sont les deux seuls points de F qui réalisent M.

Soit $(x_1,\dots,x_n)\in F$ tel que : $f(x_1,\dots,x_n)=m$. Alors d'après Q3, $(x_1,\dots,x_n)\in F\setminus\Omega$.

Ainsi $x_1^2+\dots+x_n^2=1$ et $f(x_1,\dots,x_n)=-1$.

$-1=f(x_1,\dots,x_n)=\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2-\sum_{k=1}^{n} x_k^2=\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2-1$; $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2=0$; $\sum_{k=1}^{n} x_k=0$.

Réciproquement il est aisé de voir que si $\sum_{k=1}^{n} x_k=0$ et $\sum_{k=1}^{n} x_k^2=1$ alors $f(x_1,\dots,x_n)=-1$

Les points de F qui réalisent m sont les points d'intersection entre l'hyperplan d'équation $\sum_{k=1}^{n} x_k=0$ et la sphère de centre 0 et de rayon 1.

Exercice HEC 99

Si n est un élément de $\mathbb{N}^*$, f_n est l'application de $[0,1]^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0,1]^n,\ f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\sqrt{1-x_1^2} + \sqrt{1-x_2^2} + \cdots + \sqrt{1-x_n^2}\right)$$

Q1. n est élément de $\mathbb{N}^*$. Montrer que f_n possède un maximum M_n.

Q2. Calculer M_1 et M_2.

Q3. Calculer M_n pour tout élément de $\mathbb{N}^*$.

Q4. n appartient à N^* et $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [-1,1]^n$, $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\Big(\sqrt{1-x_1^2} + \sqrt{1-x_2^2} + \cdots + \sqrt{1-x_n^2}\Big)$. Etudier les extrema de F_n.

Q1 $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ est continue sur $[0,1]$, $(x_1,\dots,x_n) \to x_i$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ pour tout i dans $[\![1,n]\!]$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall (x_1,\dots,x_n) \in [0,1]^n$, $x_i \in [0,1]$!

Ainsi pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(x_1,\dots,x_n) \to \sqrt{1-x_i^2}$ est continue sur $[0,1]^n$.

Alors $(x_1,\dots,x_n) \to \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1-x_i^2}$ est continue sur $[0,1]^n$. Comme $(x_1,\dots,x_n) \to x_1+\dots+x_n$ est continue sur $[0,1]^n$ (fonction polynôme), par produit <u>f est continue sur $[0,1]^n$.</u>

$[0,1]^n = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall k \in [\![1,n]\!],\ |x_k| \leqslant 1\} = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall k \in [\![1,n]\!],\ |x_k - \frac{1}{2}| \leqslant \frac{1}{2}\}$

$[0,1]^n = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k - \frac{1}{2}| \leqslant \frac{1}{2}\}$.

$[0,1]^n$ est donc la boule fermée de centre $B = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ dans $\mathbb{R}^n$.

Alors $[0,1]^n$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$. f étant continue sur $[0,1]^n$, <u>f possède un maximum M_n</u> (et un minimum m_n).

<u>Remarque</u>. $\forall X = (x_1,\dots,x_n) \in [0,1]^n$, $f(X) \geqslant 0 = f(0)$. Ainsi $m_n = 0$!
0 et $(1,1,\dots,1)$ sont les deux seuls points qui réalisent ce minimum.

Q2 • $\forall x \in [0,1]$, $f_1(x) = x\sqrt{1-x^2}$. f_1 est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $[0,1[$ (au moins... et au plus !). $\forall x \in [0,1[$, $f_1'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

x	0		$1/\sqrt{2}$		1
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
f_1	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Ainsi $M_1 = \frac{1}{2}$. Le maximum est atteint pour $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

• $\forall (x,y)\in[0,1]^2,\ f_2(x,y)=(x+y)(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2})$.

$\Omega=]0,1[^2$ est un ouvert. $\forall (x,y)\in\Omega$, $1-x^2>0$ (!), $(x,y)\mapsto 1-x^2$ est C^1 sur Ω et $t\mapsto\sqrt{t}$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, ainsi $(x,y)\mapsto\sqrt{1-x^2}$ est de classe C^1 sur Ω. Il en est de même pour $(x,y)\mapsto\sqrt{1-y^2}$.

Alors $(x,y)\mapsto\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$ est de classe C^1 sur Ω. Comme $(x,y)\mapsto x+y$ est de classe C^1 sur Ω : f_2 est de classe C^1 sur Ω.

Ainsi si f_2 atteint son maximum M_2 en un point A de l'ouvert Ω : grad $f_2(A)=0$.

Soit $X=(x,y)$ un élément de Ω.

grad $f_2(X)=0 \iff \frac{\partial f_2}{\partial x}(X)=\frac{\partial f_2}{\partial y}(X)=0 \iff \begin{cases}\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}+(x+y)\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)=0\\ \sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}+(x+y)\left(-\frac{2y}{2\sqrt{1-y^2}}\right)=0\end{cases}$

grad $f_2(X)=0 \iff \sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=\frac{x(x+y)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{y(x+y)}{\sqrt{1-y^2}}$.

$$\underset{x+y\neq0}{\iff}\begin{cases}x=y\\ \sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=\frac{x(x+y)}{\sqrt{1-x^2}}\end{cases}\iff\begin{cases}x=y\\0=2\sqrt{1-x^2}-\frac{x(x+x)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2-2x^2-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x=y\\2(1-2x^2)=0\end{cases}\underset{x>0}{\iff} x=y=\frac{1}{\sqrt2}.$$

f_2 admet un point critique et un seul sur Ω : $A=(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2})$.

Si f_2 atteint son maximum en un point de Ω c'est en $A=(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2})$ et $M_2=f_2(A)=2$.

Soit $(x,y)\in[0,1]^2-\Omega$. Alors ($x=0$ et $y\in[0,1]$) ou ($x=1$ et $y\in[0,1]$) ou ($x\in[0,1]$ et $y=0$) ou ($x\in[0,1]$ et $y=1$). Traitons les deux premières situations (x et y jouant le même rôle...)

• $x=0$ et $y\in[0,1]$. $f_2(x,y)=y(1+\sqrt{1-y^2})=y+f_1(x,y)\underset{y\in[0,1]}{\leq}1+M_1=\frac{3}{2}<2$

• $x=1$ et $y\in[0,1]$. $f_2(x,y)=(1+y)\sqrt{1-y^2}=\sqrt{1-y^2}+f_1(x,y)\leq 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}<2$

Finalement $\forall(x,y)\in[0,1]^2-\Omega$, $f_2(x,y)\leq\frac{3}{2}<2=f_2(A)$.

Ainsi f_2 atteint nécessairement son maximum en un point de Ω, donc au point A. Alors $M_2=2$ et $A=(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2})$ est le seul point où le maximum de M_2 est atteint.

(Q3) Donnons trois versions

V1. Soit $x=(x_1,\dots,x_n)\in[0,1]^n$.

$$f_n(x)=\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{j=1}^n \sqrt{1-x_j^2}\right)=\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{1-x_i^2}\right)$$

$$2f_n(x)=f_n(x)+f_n(x)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i\sqrt{1-x_j^2}+\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n x_j\sqrt{1-x_i^2}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left(x_i\sqrt{1-x_j^2}+x_j\sqrt{1-x_i^2}\right)$$

Remarque.. Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^2$ donne pour $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$:

$$|ab+cd|\leq\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+d^2}\text{ avec égalité si }(a,c)\text{ et }(b,d)\text{ sont liés.}$$

Si $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}_+^4$, $ab+cd\leq\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+d^2}$ avec égalité si (a,c) et (b,d) sont liés.

Alors $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $x_i\sqrt{1-x_j^2}+x_j\sqrt{1-x_i^2}=\underset{a}{x_i}\underset{b}{\sqrt{1-x_j^2}}+\underset{c}{\sqrt{1-x_i^2}}\,\underset{d}{x_j}\leq\sqrt{x_i^2+1-x_i^2}\sqrt{x_j^2+1-x_j^2}=1$

avec égalité si $(x_i,\sqrt{1-x_i^2})$ et $(\sqrt{1-x_j^2},x_j)$ sont liés.

Alors $2f_n(x)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left(x_i\sqrt{1-x_j^2}+x_j\sqrt{1-x_i^2}\right)\leq\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n 1=n^2$ avec égalité si et

seulement si : $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $(x_i,\sqrt{1-x_i^2})$ et $(\sqrt{1-x_j^2},x_j)$ sont liés.

→ Supposons cette dernière condition vérifiée.
Soit $i\in[\![1,n]\!]$. $(x_i,\sqrt{1-x_i^2})$, $(\sqrt{1-x_i^2},x_i)$ sont liés et $(x_i,\sqrt{1-x_i^2})\neq(0,0)$.
Alors $\exists\lambda\in\mathbb{R}$, $(\sqrt{1-x_i^2},x_i)=\lambda(x_i,\sqrt{1-x_i^2})$. $\begin{cases}\sqrt{1-x_i^2}=\lambda x_i\\ x_i=\lambda\sqrt{1-x_i^2}\end{cases}$; $\begin{cases}1-x_i^2=\lambda^2x_i^2\\ x_i^2=\lambda^2-\lambda^2x_i^2\end{cases}$

Ainsi $1=(\lambda^2+1)x_i^2=\lambda^2$; $\lambda^2=1$. $1=(1+1)x_i^2$; $x_i^2=\frac12$; $x_i=\frac{1}{\sqrt2}$ $(x_i\in[0,1])$.
Finalement $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $x_i=\frac{1}{\sqrt2}$.

→ Réciproquement supposons $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $x_i=\frac{1}{\sqrt2}$.
Alors $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $(x_i,\sqrt{1-x_i^2})=(x_j,\sqrt{1-x_j^2})$.
$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $(x_i,\sqrt{1-x_i^2})$ et $(x_j,\sqrt{1-x_j^2})$ sont liés.

Posons $A=\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},\dots,\frac{1}{\sqrt2}\right)$. $\forall x\in[0,1]^n$, $f_n(x)\leq\frac{n^2}{2}$ avec égalité si et seulement si $x=A$.

Ainsi le maximum de f_n est $M_n=\frac{n^2}{2}$ et il est atteint en l'unique point $A=\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},\dots,\frac{1}{\sqrt2}\right)$.

V2 Soit $X=(x_1,\dots,x_n)\in[0,1]^n$. $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\exists!\,\theta_i\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $x_i=\cos\theta_i$.

$$2f_n(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i\sqrt{1-x_j^2}+x_j\sqrt{1-x_i^2}\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\cos\theta_i\sin\theta_j+\cos\theta_j\sin\theta_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sin(\theta_i+\theta_j)$$

$$2f_n(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sin(\theta_i+\theta_j)\leq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}1=n^2.$$ Cette dernière inégalité est une égalité si $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\sin(\theta_i+\theta_j)=1$

→ Supposons cette dernière condition vérifiée.
Soit $i\in[\![1,n]\!]$, $\sin(2\theta_i)=1$ et $2\theta_i\in[0,\pi]$ donc $2\theta_i=\frac{\pi}{2}$; $\theta_i=\frac{\pi}{4}$; $x_i=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

→ Réciproquement supposons que $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $x_i=\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Alors $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\theta_i=\frac{\pi}{4}$. $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\sin(\theta_i+\theta_j)=\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{2}=1$.

On montre ainsi que : $\forall X\in[0,1]^n$, $f_n(X)\leq\frac{n^2}{2}$ avec égalité si $X=A=(\frac{1}{\sqrt{2}},\dots,\frac{1}{\sqrt{2}})$.

V3 Nous allons montrer par récurrence sur n que $M_n=\frac{n^2}{2}$ et que f_n atteint son maximum à l'unique point $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\dots,\frac{1}{\sqrt{2}})$ de $[0,1]^n$.

- C'est clair pour $n=1$ (et $n=2$).
- Supposons la propriété vraie pour $n\in\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

→ Comme pour f_2 on montre sans difficulté que f_{n+1} est de classe C^1 sur $\Omega_{n+1}=]0,1[^{n+1}$.
Ainsi si f_{n+1} atteint son maximum en un point X de Ω_{n+1}, $\operatorname{grad} f_{n+1}(X)=0$.
Soit $X=(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})\in\Omega_{n+1}$

$$\operatorname{grad} f_{n+1}X=0\iff\forall k\in[\![1,n+1]\!],\ 1\times\sum_{i=1}^{n+1}\sqrt{1-x_i^2}+\sum_{i=1}^{n+1}x_i\,\frac{-2x_k}{2\sqrt{1-x_k^2}}=0$$

$$\operatorname{grad} f_{n+1}X=0\iff\forall k\in[\![1,n+1]\!],\ \frac{x_k}{\sqrt{1-x_k^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{n+1}\sqrt{1-x_i^2}}{\sum_{i=1}^{n+1}x_i}$$

$$\operatorname{grad} f_{n+1}X=0\iff\forall k\in[\![2,n+1]\!],\ \frac{x_k}{\sqrt{1-x_k^2}}\overset{(*)}{=}\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2}}\text{ et }\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{n+1}\sqrt{1-x_i^2}}{\sum_{i=1}^{n+1}x_i}$$

(*) Soit $k\in[\![2,n+1]\!]$. $$\frac{x_k}{\sqrt{1-x_k^2}}=\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2}}\underset{\substack{x_1>0\\x_k>0}}{\iff}x_k^2(1-x_1^2)=x_1^2(1-x_k^2)\iff x_k^2=x_1^2\underset{x_1>0,\,x_k>0}{\iff}x_k=x_1.$$

Alors $$\operatorname{grad} f_{n+1}X=0\iff\forall k\in[\![2,n+1]\!],\ x_k=x_1\text{ et }\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2}}=\frac{(n+1)\sqrt{1-x_1^2}}{(n+1)x_1}$$

$$\operatorname{grad} f_{n+1}X=0\iff\forall k\in[\![2,n+1]\!],\ x_k=x_1\text{ et }x_1^2=1-x_1^2\iff\forall k\in[\![1,n]\!],\ x_k=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Si f_{n+1} atteint son maximum en un point de $\Omega_{n+1} =]0,1[^{n+1}$ c'est nécessairement en $A_{n+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Notons que $f_{n+1}(A_{n+1}) = (n+1) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times (n+1)\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{(n+1)^2}{2}$.

→ Soit $X = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in [0,1]^{n+1} - \Omega_{n+1}$.

Alors $\exists i_0 \in [\![1, n+1]\!]$, $x_{i_0} = 0$ ou 1. Pour simplifier les écritures supposons que $i_0 = n+1$ (... l'expression de f_{n+1} est symétrique ...)

1er cas : $x_{n+1} = 0$.

$$f_{n+1}(X) = (x_1 + \dots + x_n)\left(\sqrt{1-x_1^2} + \dots + \sqrt{1-x_n^2} + 1\right) = f_n(x_1, \dots, x_n) + (x_1 + \dots + x_n) \underset{\text{H.R. et } x_1+\dots+x_n \le n}{\le} \frac{n^2}{2} + n$$

$$f_{n+1}(X) \le \frac{n^2+2n}{2} < \frac{(n+1)^2}{2} = f_{n+1}(A_{n+1}).$$

2e cas : $x_{n+1} = 1$

$$f_{n+1}(X) = (x_1 + \dots + x_n + 1)\left(\sqrt{1-x_1^2} + \sqrt{1-x_2^2} + \dots + \sqrt{1-x_n^2} + 0\right) = f_n(x_1, \dots, x_n) + \sqrt{1-x_1^2} + \dots + \sqrt{1-x_n^2}.$$

Alors $f_{n+1}(X) \underset{\text{H.R. et } \sqrt{1-x_1^2}+\dots+\sqrt{1-x_n^2} \le n}{\le} \frac{n^2}{2} + n = \frac{n^2+2n}{2} < \frac{n^2+2n+1}{2} = \frac{(n+1)^2}{2}$. $f_{n+1}(X) < \frac{(n+1)^2}{2} = f_{n+1}(A_{n+1})$.

Ainsi $\forall X \in [0,1]^{n+1} - \Omega_{n+1}$, $f_{n+1}(X) < f_{n+1}(A_{n+1})$.

Donc nécessairement f_{n+1} atteint son maximum en un point de Ω_{n+1}. D'après ce qui précède ce maximum est atteint en l'unique point A_{n+1} et il vaut $f(A_{n+1}) = \frac{(n+1)^2}{2}$.

Ainsi s'achève la récurrence.

Q4 Soit $X = (x_1, \dots, x_n) \in [-1,1]^n$. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $-|x_k| \le x_k \le |x_k|$.

$$-\sum_{k=1}^n |x_k| \le \sum_{k=1}^n x_k \le \sum_{k=1}^n |x_k|$$

$$-\left(\sum_{k=1}^n |x_k|\right)\left(\sum_{k=1}^n \sqrt{1-x_k^2}\right) \le F(X) \le \left(\sum_{k=1}^n |x_k|\right)\left(\sum_{k=1}^n \sqrt{1-x_k^2}\right)$$

Ainsi $-f_n(|x_1|, \dots, |x_n|) \le F(X) \le f_n(|x_1|, \dots, |x_n|)$.

Considérons les éléments $A_n = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2}})$ et $B_n = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \dots, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ de $[-1,1]^n$.

$F(A_n) = f_n(A_n) = \frac{n^2}{2}$ et $F(B_n) = -f_n(A_n) = -\frac{n^2}{2}$. Rappelons que $\frac{n^2}{2}$ est le maximum de f_n sur $[0,1]^n$.

Alors : $F(B_n) = -f_n(A_n) \leq -f_n(|x_1|, \dots, |x_n|) \leq F(X) \leq f_n(|x_1|, \dots, |x_n|) \leq f_n(A_n) = F(A_n)$.

<u>Ainsi F possède un maximum (resp. minimum) qui vaut $\frac{n^2}{2}$ (resp. $-\frac{n^2}{2}$) atteint en $A_n = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2}})$ (resp. $B_n = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \dots, -\frac{1}{\sqrt{2}})$).</u>

Montrons que A_n est l'unique point de $[-1,1]^n$ qui réalise ce maximum.

Soit $X = (x_1, \dots, x_n) \in [-1,1]^n$ tel que : $F(X) = \frac{n^2}{2}$.

Alors $\frac{n^2}{2} \leq F(X) \leq f_n(|x_1|, \dots, |x_n|) \leq f_n(A_n) = \frac{n^2}{2}$.

Ainsi $\frac{n^2}{2} = F(X) = f_n(|x_1|, \dots, |x_n|) = f_n(A_n)$. Alors $(|x_1|, \dots, |x_n|) = A_n$.

Par conséquent $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $x_k \in \{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\}$.

Supposons que $\exists k_0 \in [\![1,n]\!]$, $x_{k_0} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Alors $(x_1 + x_2 + \dots + x_n) < |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$. Comme $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 - x_i^2} > 0$:

$$F(X) = (x_1 + \dots + x_n)(\sqrt{1-x_1^2} + \dots + \sqrt{1-x_n^2}) < (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|)(\sqrt{1-x_1^2} + \sqrt{1-x_2^2} + \dots + \sqrt{1-x_n^2})$$

Alors $F(X) < f_n(|x_1|, \dots, |x_n|)$ ce qui contredit ce que nous avons vu plus haut. Ainsi $\forall \ell \in [\![1,n]\!]$, $x_\ell = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $X = A_n$.

<u>A_n est l'unique point qui réalise le maximum de F.</u>

En remarquant que $\forall X \in [-1,1]^n$, $-X \in [-1,1]^n$ et $F(-X) = -F(X)$ on peut affirmer que <u>B_n</u> (qui vaut $-A_n$!) <u>est l'unique point qui réalise le minimum de F.</u>

Exercice | ESCP 2001 1.23 | Une machine fonctionne avec deux combustibles, dont les quantités respectives (positives ou nulles) sont exprimées en m^3 et notées x et y. La puissance de la machine est :

$$P(x,y) = \frac{kxy}{(1+x)^2(1+y)^2}$$

où k est un réel strictement positif.

Q0. Etudier sur $\mathbb{R}^+$, $\varphi : t \to \dfrac{t}{(1+t)^2}$

Q1. Déterminer (x,y) pour que la puissance de la machine soit maximale.

Q2. Les combustibles valent tous deux a euros le m^3. On se propose de déterminer (x,y) pour que le rapport $\dfrac{\text{puissance}}{\text{prix}}$ soit maximal.

a) On pose : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x)\,\varphi(y)}{x+y} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Montrer que g est continue.

b) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $(\mathbb{R}^{+*})^2$ et trouver l'ensemble des points critiques de g sur cet ouvert.

c) Montrer que si x et y sont deux éléments de $\mathbb{R}^+$ tels que $\text{Max}(x,y) \geqslant 2$ alors $g(x,y) \leqslant g(1,1)$.

d) Résoudre le problème posé.

Q0 φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \varphi'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^4}\left[(1+t)^2 - t \times 2 \times (1+t)\right] = \dfrac{1}{(1+t)^3}(1-t).$

φ est donc strictement croissante sur $[0,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.

Notons que $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \varphi(t) \leq \varphi(1) = \frac{1}{4}$.

Mieux $\forall t \in \mathbb{R}_+ - \{1\},\ \varphi(t) < \varphi(1) = \frac{1}{4}$.

Q1 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ P(x,y) = k\,\varphi(x)\,\varphi(y) \overset{(*)}{\leq} k\,\varphi(1)\,\varphi(1) = P(1,1).$

$k > 0$
$0 \leq \varphi(x) \leq \varphi(1)$
$0 \leq \varphi(y) \leq \varphi(1)$

Notons que $(*)$ est une égalité si et seulement si $x = 1$ et $y = 1$.

<u>Ainsi la puissance de la machine est maximale si et seulement si $(x,y) = (1,1)$.</u>

Q2 a) $(x,y) \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, φ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, $x \in \mathbb{R}_+$!! Par composition $(x,y) \mapsto \varphi(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^2$.
De même $(x,y) \mapsto \varphi(y)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^2$. Par produit $(x,y) \mapsto \varphi(x)\varphi(y)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^2$.

$(x,y) \to \frac{1}{x+y}$ étant continue sur $\mathbb{R}_+^2 - \{(0,0)\}$, par produit g est continue sur $\mathbb{R}_+^2 - \{(0,0)\}$

Soit $X = (x,y) \in \mathbb{R}_+^2 - \{(0,0)\}$

$$|g(X) - g(0)| = |g(X)| = \left|\frac{\varphi(x)\varphi(y)}{x+y}\right| = \frac{xy}{(1+x)^2(1+y)^2(x+y)} \leq \frac{xy}{x+y} = \frac{x}{x+y}\, y \leq y$$

$|g(X) - g(0)| \leq y = |y| \leq \max(|x|,|y|) \leq \|X\|$.

$\forall X \in \mathbb{R}_+^2 - \{(0,0)\}$, $|g(X) - g(0)| \leq \|X\|$.

Donc $\forall X \in \mathbb{R}_+^2$, $|g(X) - g(0)| \leq \|X\|$.

$\lim\limits_{X \to 0} \|X\| = 0$ donc par encadrement $\lim\limits_{X \to 0} g(X) = g(0)$; g est continue en 0.

Finalement $\underline{\underline{g \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^2}}$.

b) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $g(x,y) = \frac{\varphi(x)\varphi(y)}{x+y} = \frac{xy}{(1+x)^2(1+y)^2(x+y)}$.

g coïncide sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$ avec une fonction rationnelle.

Ainsi g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Soit $X = (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(X) = \frac{y}{(1+y)^2}\left[(1+x)^2(x+y) - x\left[2(1+x)(x+y) + (1+x)^2\right]\right] \times \frac{1}{(1+x)^4(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(X) = \frac{y(1+x)}{(1+y)^2(1+x)^4(x+y)^2}\left[\underbrace{(1+x)(x+y) - x(2x+2y+1+x)}_{y - xy - 2x^2}\right]$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(X) = \frac{y(1+x)(y - xy - 2x^2)}{(1+y)^2(1+x)^4(x+y)^2}, \quad \text{De même} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(X) = \frac{x(1+y)(x - yx - 2y^2)}{(1+y)^4(1+x)^2(x+y)^2}$$

$x > 0$ et $y > 0$.

Alors $\frac{\partial g}{\partial x}(X) = \frac{\partial g}{\partial y}(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y - xy - 2x^2 = 0 \\ x - yx - 2y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - xy - 2x^2 = 0 \\ 0 = y - x - 2x^2 + 2y^2 = (y-x)(1 + 2y + 2x) \end{cases}$

$\nabla g(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 0 = x - x^2 - 2x^2 = x(1 - 3x) \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{3}$.

g admet un point critique et un seul sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$, le point $A=(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

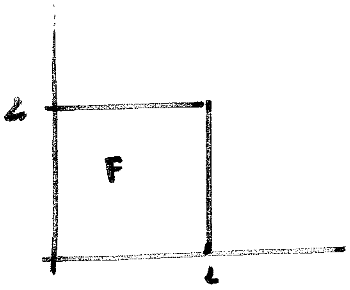
c) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}_+$ tel que $\max(x,y)\geq 2$.

Alors $x+y\geq \max(x,y)\geq 2$. $0\leq\frac{1}{x+y}\leq\frac{1}{2}$. Rappelons que $0\leq\varphi(x)\leq\varphi(1)$ et $0\leq\varphi(y)\leq\varphi(1)$

Alors $g(x,y)=\frac{\varphi(x)\varphi(y)}{x+y}\leq\frac{1}{2}\varphi(1)\varphi(1)=\frac{\varphi(1)\varphi(1)}{1+1}=g(1,1)$.

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}_+^2$, $\max(x,y)\geq 2 \Rightarrow g(x,y)\leq g(1,1)$

d) Pour $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x\leq 2 \text{ et } 0\leq y\leq 2\}$



$F=[0,2]\times[0,2]$.

F est un fermé comme produit de deux fermés de $\mathbb{R}$.

$\forall (x,y)\in F$, $\|X\|\leq\sqrt{x^2+y^2}\leq\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$.

F est borné.

Ainsi g qui est continue sur F possède un maximum M.

Soit B un point de F tel que $g(B)=M$.

Montrons que M est le maximum de g sur $\mathbb{R}_+^2$. Soit $X=(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$

Si 1er cas : $X\in F$. Alors $g(X)\leq g(B)=M$

2ème cas : $X\notin F$. Alors $x>2$ ou $y>2$ donc $\max(x,y)>2$. Alors $\max(x,y)\geq 2$.

Ainsi $g(X)\leq g(1,1)\underset{(1,1)\in F}{\leq} g(B)=M$.

Finalement $\forall X\in\mathbb{R}_+^2$, $g(X)\leq g(B)=M$.

Donc g admet un maximum sur $\mathbb{R}_+^2$ qui vaut $M=\max_{X\in F} g(X)$.

Notons que $g(A)=g(\frac{1}{3},\frac{1}{3})=\left(\frac{1/3}{(1+1/3)^2}\right)^2\frac{1}{1/3+1/3}=\frac{27}{512}=\frac{27}{16}\times\frac{1}{32}$.

$g(1,1)=\frac{1}{2}\varphi(1)\varphi(1)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{32}$. Donc $g(A)>g(1,1)$.

Pour $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x<2 \text{ et } 0<y<2\}=]0,2[\times]0,2[$.

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme produit de deux ouverts de $\mathbb{R}$ et $\Omega\subset F$.

$F-\Omega = [0,1]\times\{0\} \cup \{0\}\times[0,1] \cup \{1\}\times[0,1] \cup [0,1]\times\{1\}$

Soit $X=(x,y)\in F-\Omega$.

Si $(x,y)\in[0,1]\times\{0\}$, $g(X)=0$; même chose si $(x,y)\in\{0\}\times[0,1]$

Si $(x,y)\in[0,1]\times\{1\}$, $\max(x,y)\geq 1$ donc $g(X)\leq g(1,1) < g(A)\leq M$, même chose si $(x,y)\in\{1\}\times[0,1]$.

Ainsi $\forall X\in F\setminus\Omega$, $g(X)<g(A)\leq M$.

Alors le maximum de g sur F ne peut pas être réalisé par un point de $F\setminus\Omega$.

donc $B\in\Omega$. g étant de classe C^1 sur Ω qui est ouvert, nécessairement $\nabla g(B)=0_{\mathbb{R}^2}$

Or $B\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ donc nécessairement $B=A$.

Finalement
1) g admet un maximum sur $\mathbb{R}_+^2$
2) $A=(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ est le seul point qui réalise ce maximum.
3) $\max\limits_{X\in\mathbb{R}_+^2} g(X) = g(A) = \frac{27}{512}$.

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$. Le rapport puissance sur prix est $\frac{k}{a}\, g(x,y)$.

Ainsi le rapport puissance sur prix est maximal si $x=y=\frac{1}{3}$.

Exercice On considère p points, A_1, A_2, ..., A_p, de l'espace rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}$. Pour tout i dans $[\![1,p]\!]$, on note (a_i,b_i,c_i) les coordonnées de A_i dans $\mathcal{R}$.

Trouver le point M de l'espace qui rend minimum la somme des carrés des distances de ce point à A_1, A_2, ..., A_p (on pourra chercher l'ensemble des points critiques d'une fonction de plusieurs variables ; on pourra aussi utiliser $(x-a_i)^2 = ((x-a)-(a_i-a))^2 \ldots$).

Si M est un point de l'espace de coordonnées (x,y,z) dans $\mathcal{R}$: $\sum_{i=1}^{p} A_iM^2 = \sum_{i=1}^{p}\left[(x-a_i)^2+(y-b_i)^2+(z-c_i)^2\right]$

Posons alors $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)=\sum_{i=1}^{p}\left((x-a_i)^2+(y-b_i)^2+(z-c_i)^2\right)$

f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$. Ainsi si f possède un minimum en un point A de $\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(A)=0_{\mathbb{R}^3}$.

Soit $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(X)=0 \iff \sum_{i=1}^{p} 2(x-a_i)=0 \iff \sum_{i=1}^{p}(x-a_i)=0 \iff px-\sum_{i=1}^{p}a_i=0 \iff x=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}a_i$

De même $\frac{\partial f}{\partial y}(X)=0 \iff y=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}b_i$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(X)=0 \iff z=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}c_i$

Posons $a=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}a_i$, $b=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}b_i$ et $c=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}c_i$. $A=(a,b,c)$ est l'unique point critique de f. Soit $H=(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$.

$f(A+H)-f(A)=\sum_{i=1}^{p}\left((a+\alpha-a_i)^2+(b+\beta-b_i)^2+(c+\gamma-c_i)^2\right)-\sum_{i=1}^{p}\left((a-a_i)^2+(b-b_i)^2+(c-c_i)^2\right)$

$\left[(a+\alpha-a_i)^2=((a-a_i)+\alpha)^2=\ldots\right.$

$f(A+H)-f(A)=\sum_{i=1}^{p}\left[(a-a_i)^2+(b-b_i)^2+(c-c_i)^2\right]+2\sum_{i=1}^{p}\left(\alpha(a-a_i)+\beta(b-b_i)+\gamma(c-c_i)\right)+$

$\sum_{i=1}^{p}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-\sum_{i=1}^{p}\left((a-a_i)^2+(b-b_i)^2+(c-c_i)^2\right)= p(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+2\sum_{i=1}^{p}(\alpha a+\beta b+\gamma c)-$

$2\sum_{i=1}^{p}(\alpha a_i+\beta b_i+\gamma c_i)=p(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+2p(\alpha a+\beta b+\gamma c)-2\alpha\sum_{i=1}^{p}a_i-2\beta\sum_{i=1}^{p}b_i-2\gamma\sum_{i=1}^{p}c_i$

$f(A+H)-f(A)=p(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+2p(\alpha a+\beta b+\gamma c)-2\alpha pa-2\beta pb-2\gamma pc=p(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\geqslant 0.$

Alors $\forall H\in\mathbb{R}^3$, $f(A+H)\geqslant f(A)$. $\forall X\in\mathbb{R}^3$, $f(X)\geqslant f(A)$... Mieux $\forall X\in\mathbb{R}^3-\{A\}$, $f(X)>f(A)$.

Ainsi $\sum_{i=1}^{p} MA_i^2$ est minimum si (et seulement si) M a pour coordonnées (a,b,c)

avec $a=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}a_i$, $b=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}b_i$ et $c=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}c_i$.

Exercice $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère othonormal du plan $\mathcal{P}$. Pour tout i élément de $[\![1, n]\!]$, M_i est le point de coordonnées (x_i, y_i) dans $\mathcal{R}$. On suppose que au moins deux de ces points n'ont pas la même abscisse.
Δ est la droite de $\mathcal{P}$ d'équation $y = ax + b$ dans $\mathcal{R}$ et pour tout i élément de $[\![1, n]\!]$, H_i est le point de Δ d'abscisse x_i.
Trouver a et b pour que $\sum_{k=1}^{n} (H_k M_k)^2$ soit minimum (on pourra considérer $f(a, b) = \sum_{k=1}^{n} (H_k M_k)^2$ et on montrera proprement que le problème admet une solution et une seule).

Avant de commencer posons $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$, $\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}$ et $\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$.

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (H_i M_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a x_i - b)^2$

M_i (resp. H_i) a pour coordonnées (x_i, y_i) (resp. $(x_i, a x_i + b)$).

f est polynômiale donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial a}(a,b) = \sum_{i=1}^{n} 2(-x_i)(y_i - a x_i - b)$ et $\frac{\partial f}{\partial b}(a,b) = \sum_{i=1}^{n} 2(-1)(y_i - a x_i - b)$.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial b}(a,b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -2\left[\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i\right] \\ 0 = -2\left[\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - nb\right] = -2n\left[\bar{y} - a\bar{x} - b\right] \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial b}(a,b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = \bar{y} - a\bar{x} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (\bar{y} - a\bar{x})\, n\bar{x} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial b}(a,b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = \bar{y} - a\bar{x} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} = a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right) = n a \sigma_x^2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial b}(a,b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = \bar{y} - a\bar{x} \\ n a \sigma_x^2 = n\sigma_{xy} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \\ b = \bar{y} - a\bar{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \\ b = \bar{y} - a\bar{x} \end{cases}$$

f admet donc un point critique et un seul : $\underline{(a,b) = \left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}, \bar{y} - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\bar{x}\right)}$.

Montrons alors que f admet un minimum en $(a,b) = \left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}, \bar{y} - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\bar{x}\right)$

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Etudions le signe de $\Delta(\alpha,\beta) = f(a+\alpha, b+\beta) - f(a,b)$.

Rappelons que $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

$$\Delta(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(y_i-(a+\alpha)x_i-(b+\beta)\right)^2-(y_i-ax_i-b)^2\right]$$

$$\Delta(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\left[(y_i-ax_i-\alpha x_i-b-\beta+y_i-ax_i-b)(y_i-ax_i-\alpha x_i-b-\beta-y_i+ax_i+b)\right]$$

$$\Delta(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\left[(2y_i-2ax_i-2b-\alpha x_i-\beta)(-\alpha x_i-\beta)\right]$$

$$\Delta(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\left[(2y_i-2ax_i-2(\bar y-a\bar x)-\alpha x_i-\beta)(-\alpha x_i-\beta)\right]$$

$$\Delta(\alpha,\beta)=-\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta)\left(2(y_i-\bar y)-2a(x_i-\bar x)-(\alpha x_i+\beta)\right)$$

$$\Delta(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta)^2-2\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta)(y_i-\bar y)+2a\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta)(x_i-\bar x).$$

$$\Delta(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta)^2-2\sum_{i=1}^{n}(\alpha(x_i-\bar x)+\gamma)(y_i-\bar y)+2a\sum_{i=1}^{n}(\alpha(x_i-\bar x)+\gamma)(x_i-\bar x)$$ <u>avec</u>

<u>$\gamma=\beta+\alpha\bar x$</u>.

$$\Delta(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta)^2-2\alpha\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar x)(y_i-\bar y)-2\gamma\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar y)+2a\alpha\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar x)^2+2a\gamma\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar x)$$

Notons que : $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar x)=\sum_{i=1}^{n}x_i-n\bar x=n\bar x-n\bar x=0$; de même $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar y)=0$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar x)(y_i-\bar y)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\bar x\sum_{i=1}^{n}y_i-\bar y\sum_{i=1}^{n}x_i+\bar x\bar y\times n=n\left[\frac1n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\bar x\bar y-\bar y\bar x+\bar x\bar y\right]=n\sigma_{xy}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar x)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\bar x\sum_{i=1}^{n}x_i+n\bar x^2=n\left[\frac1n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\bar x\bar x+\bar x^2\right]=n\sigma_x^2.$$

Finalement $\Delta(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta)^2-2\alpha n\sigma_{xy}-2\gamma\times 0+2a\alpha n\sigma_x^2+2a\gamma\times 0$

$$\Delta(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta)^2-2\alpha n\sigma_x^2\left[\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}-a\right]=\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta)^2\geqslant 0.$$

Récip. Supposons $\Delta(\alpha,\beta)=0$. Alors $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\alpha x_i+\beta=0$.

Si $\alpha\neq 0$: $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $x_i=-\frac{\beta}{\alpha}$ et tous les points ont la même abscisse.

Ainsi $\alpha=0$ et $\beta=0$.

On peut alors dire que $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $(\alpha,\beta)\neq(0,0)\Rightarrow f(a+\alpha,b+\beta)>f(a,b)$.

f admet un minimum absolu strict en $(a,b)=\left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2},\ \bar y-\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\bar x\right)$.

La droite cherchée a pour équation $y=ax+b$ avec $a=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$ et $b=\bar y-a\bar x$.

(Droite de régression ...) Exercice.. Retrouver ce résultat en utilisant la méthode des moindres carrés.

Exercice ESCP1998

Q1. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On considère l'application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ f(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \Big(1 - \sum_{k=1}^{n} x_k\Big)^2$$

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et qu'elle possède un unique point critique $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

b) Soit $H = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$. Simplifier $f(A + H) - f(A)$.

c) Etudier les extremums de f.

Q2. La durée de vie d'une certaine catégorie d'ampoules électriques est supposée suivre une loi $\boxed{\text{exponentielle}}$ de paramètre inconnu α. Pour estimer α on considère un échantillon de N ampoules de cette catégorie, avec $N \geqslant 2$. On met en marche, simultanément, au temps 0 ces N ampoules, et on note, pour $i \in [\![1, N]\!]$, X_i la variable aléatoire égale à la durée de vie de l'ampoule numéro i.

On se donne un entier r compris entre 2 et N, et on observe alors les r premiers arrêts de fonctionnement. On note pour tout i dans $[\![1, r]\!]$, Y_i l'instant aléatoire du $i^{\text{ème}}$ arrêt observé. On a donc $Y_1 \leqslant Y_2 \leqslant \cdots \leqslant Y_r$.

a) Exprimer Y_1 en fonction des X_i et déterminer sa loi.

On pose $Z_1 = Y_1$ et $\forall i \in [\![2, r]\!],\ Z_i = Y_i - Y_{i-1}$.

On admet que Z_1, Z_2, ..., Z_r sont mutuellement indépendantes et que pour tout $i \in [\![2, r]\!]$, Z_i suit une loi exponentielle de paramètre $(N - i + 1)\alpha$.

b) On pose $U = \lambda_1 Y_1 + \cdots + \lambda_r Y_r$. Exprimer U comme combinaison linéaire de Z_1, ..., Z_r.

Montrer qu'il existe un unique élément $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ de $\mathbb{R}^r$ tel que U ait la même espérance que X_1 et une variance minimale.

Q1 a) f est une fonction polynômiale donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $\forall X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X) = 2x_i + 2(-1)(1 - \sum_{k=1}^{n} x_k) = 2(x_i - (1 - \sum_{k=1}^{n} x_k))$

Soit $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\operatorname{grad} f(X) = 0 \iff \forall i \in [\![1,n]\!],\ 2(x_i - (1 - \sum_{k=1}^{n} x_k)) = 0 \iff \forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i = 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k$

$\operatorname{grad} f(X) = 0 \iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k \iff \begin{cases} x_1 = x_2 = \cdots = x_n \\ \text{et} \\ x_1 = 1 - \sum_{k=1}^{n} x_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x_2 = \cdots = x_n \\ \text{et} \\ (n+1)x_1 = 1 \end{cases}$

$\operatorname{grad} f(X) = 0 \iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Ainsi f possède un point critique et un seul : $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n+1}, \ldots, \dfrac{1}{n+1}\right)$.

---

b) Soit $H = (h_1, \ldots, h_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$.

$f(A+H) - f(A) = \sum_{k=1}^{n} (a_k + h_k)^2 + (1 - \sum_{k=1}^{n} (a_k + h_k))^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 - (1 - \sum_{k=1}^{n} a_k)^2$

$f(A+H) - f(A) = 2\sum_{k=1}^{n} a_k h_k + \sum_{k=1}^{n} h_k^2 + (1 - \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} h_k + 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k)(1 - \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} h_k - 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k)$

$f(A+H)-f(A) = 2\sum_{k=1}^{n} a_k h_k + \sum_{k=1}^{n} h_k^2 + \left(2-2\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} h_k\right)\left(-\sum_{k=1}^{n} h_k\right)$

Rappelons que : $\forall k\in [\![1,n]\!]$, $a_k = \frac{1}{n+1}$ et notons que : $2-2\sum_{k=1}^{n} a_k = 2\left(1-\frac{n}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1}$.

Alors $f(A+H)-f(A) = \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n} h_k + \left(\frac{2}{n+1} - \sum_{k=1}^{n} h_k\right)\left(-\sum_{k=1}^{n} h_k\right) + \sum_{k=1}^{n} h_k^2$

$f(A+H)-f(A) = \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n} h_k - \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n} h_k + \left(\sum_{k=1}^{n} h_k\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} h_k^2$.

$\forall H = (h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}^n$, $f(A+H)-f(A) = \left(\sum_{k=1}^{n} h_k\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} h_k^2$

c) Ainsi $\forall H\in\mathbb{R}^n$, $f(A+H)-f(A)\geq 0$; mieux $\forall H\in\mathbb{R}^n-\{0\}$, $f(A+H) > f(A)$.

f possède en A un minimum absolu (ou global) strict. Notons que $f(A) = \frac{1}{n+1}$.

Ceci achève l'étude des extremums de f car f n'a qu'un point critique.

Q2 a) $Y_1 = \min(X_1, X_2,\dots, X_N)$ ... alors $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha N)$ non ? Redémontrons.

Soit $x\in\mathbb{R}$. $P(Y_1\leq x) = 1-P(Y_1>x) = 1-P(\min(X_1,X_2,\dots,X_N)>x)$

$P(Y_1\leq x) = 1-P((X_1>x)\cap\dots\cap(X_N>x)) \underset{\text{indépendance}}{=} 1-P(X_1>x)P(X_2>x)\cdots P(X_N>x) \underset{X_1,\dots,X_N \text{ ont même loi}}{=} 1-(P(X_1>x))^N$

$P(Y_1\leq x) = 1-(1-P(X_1\leq x))^N$.

Si $x<0$, $P(Y_1\leq x) = 1-(1-0)^N = 0$

Si $x\geq 0$ $P(Y_1\leq x) = 1-(1-(1-e^{-\alpha x}))^N = 1-e^{-\alpha N x}$.

Ainsi $\forall x\in\mathbb{R}$, $P(Y_1\leq x) = \begin{cases} 0 \\ 1-e^{-\alpha N x}\end{cases}$; $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha N)$.

b) $U = \lambda_1 Y_1 + \dots + \lambda_r Y_r$.

Soit $k\in[\![2,r]\!]$, $Y_k - Y_1 = \sum_{i=2}^{k}(Y_i - Y_{i-1}) = \sum_{i=2}^{k} Z_i$; $Y_k = \sum_{i=2}^{k} Z_i + Y_1 \overset{Z_1=Y_1}{=} \sum_{i=1}^{k} Z_i$

$\forall k\in[\![2,r]\!]$, $Y_k = \sum_{i=1}^{k} Z_i$. Ceci vaut encore pour $k=1$ car $Y_1 = Z_1$.

Ainsi $\forall k\in[\![1,r]\!]$, $Y_k = \sum_{i=1}^{k} Z_i$.

$$U = \sum_{\ell=1}^{r} \lambda_\ell Y_\ell = \sum_{\ell=1}^{r} \Big(\lambda_\ell \sum_{i=1}^{\ell} Z_i\Big) = \sum_{i=1}^{r} \Big(\sum_{\ell=i}^{r} \lambda_\ell\Big) Z_i$$

En échangeant les rôles de i et ℓ on peut encore écrire :

$$U = \sum_{\ell=1}^{r} \Big(\sum_{i=\ell}^{r} \lambda_i\Big) Z_\ell$$

. Rappelons que $\forall i \in [\![2,r]\!]$, $Z_i \hookrightarrow \mathcal{E}((N-i+1)\alpha)$; ce qui vaut aussi pour $i=1$.

$$E(U) = \sum_{\ell=1}^{r} \Big(\sum_{i=\ell}^{r} \lambda_i\Big) E(Z_\ell) = \sum_{\ell=1}^{r} \Big(\sum_{i=\ell}^{r} \lambda_i\Big) \frac{1}{(N-\ell+1)\alpha} = \frac{1}{\alpha} \sum_{\ell=1}^{r} \left[\frac{\sum_{i=\ell}^{r} \lambda_i}{N-\ell+1}\right]$$

$$V(U) \underset{\uparrow}{=} \sum_{\ell=1}^{r} V\Big(\sum_{i=\ell}^{r} \lambda_i Z_\ell\Big) = \sum_{\ell=1}^{r} \Big(\sum_{i=\ell}^{r} \lambda_i\Big)^2 V(Z_\ell) = \sum_{\ell=1}^{r} \Big(\sum_{i=\ell}^{r} \lambda_i\Big)^2 \frac{1}{[(N-\ell+1)\alpha]^2}$$

$(Z_1, Z_2, \dots, Z_r$ sont indépendants$)$

Ainsi
$$V(U) = \sum_{\ell=1}^{r} \left[\frac{\sum_{i=\ell}^{r} \lambda_i}{(N-\ell+1)\alpha}\right]^2 = \frac{1}{\alpha^2} \sum_{\ell=1}^{r} \left[\frac{\sum_{i=\ell}^{r} \lambda_i}{N-\ell+1}\right]^2$$

Notons que
$$E(U) = E(X_1) \iff \frac{1}{\alpha} \sum_{\ell=1}^{r} \left(\frac{\sum_{i=\ell}^{r} \lambda_i}{N-\ell+1}\right) = \frac{1}{\alpha} \iff \sum_{\ell=1}^{r} \left(\frac{\sum_{i=\ell}^{r} \lambda_i}{N-\ell+1}\right) = 1.$$

Il s'agit de traiter le problème
$$\begin{cases} \min & V(U) \\ sc & E(U) = \frac{1}{\alpha} \end{cases}.$$

Le problème est équivalent à
$$\begin{cases} \min & \dfrac{1}{\alpha^2} \displaystyle\sum_{\ell=1}^{r} \left[\frac{\sum_{i=\ell}^{r} \lambda_i}{N-\ell+1}\right]^2 \\ sc & \displaystyle\sum_{\ell=1}^{r} \left(\frac{\sum_{i=\ell}^{r} \lambda_i}{N-\ell+1}\right) = 1 \end{cases}$$

En posant, pour tout $\ell \in [\![1,r]\!]$, $x_\ell = \dfrac{\sum_{i=\ell}^{r} \lambda_i}{N-\ell+1}$ le problème précédent

est alors équivalent à
$$\begin{cases} \min & \dfrac{1}{\alpha^2} \displaystyle\sum_{\ell=1}^{r} x_\ell^2 \\ sc & \displaystyle\sum_{\ell=1}^{r} x_\ell = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \min & \displaystyle\sum_{\ell=1}^{r} x_\ell^2 \\ sc & \displaystyle\sum_{\ell=1}^{r} x_\ell = 1 \end{cases}$$

Ce qui revient encore à trouver le minimum de $f : (x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) \longrightarrow \displaystyle\sum_{\ell=1}^{r-1} x_\ell^2 + \Big(1 - \sum_{\ell=1}^{r-1} x_\ell\Big)^2$ na !

C'est précisément le problème traité dans la première question.

Rappelons que f admet pour minimum $\frac{1}{r}$ et que ce minimum est atteint en le seul point $(\frac{1}{r}, \dots, \frac{1}{r})$ de $\mathbb{R}^{r-1}$.

Ainsi $(x_1, \dots, x_r) \to \sum_{k=1}^{r} x_k^2$ admet un minimum sous la contrainte $\sum_{k=1}^{r} x_k = 1$ atteint en le seul point $(\frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \dots, \frac{1}{r})$ et qui vaut $\frac{1}{r}$.

Alors $V(U)$ est minimum, lorsque $E(U) = E(X_1)$, si et seulement si

$$\forall k \in [\![1, r]\!], \quad \frac{\sum_{i=k}^{r} \lambda_i}{N-k+1} = \frac{1}{r}$$; notons que ce minimum est alors : $\frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{r} = \frac{1}{r\alpha^2}$.

$$\forall k \in [\![1, r]\!], \quad \sum_{i=k}^{r} \lambda_i = \frac{N-k+1}{r} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \dots + \lambda_r = \frac{N}{r} \\ \lambda_2 + \dots + \lambda_r = \frac{N-2+1}{r} = \frac{N-1}{r} \\ \dots \\ \lambda_{r-1} + \lambda_r = \frac{N-(r-1)+1}{r} = \frac{N-r+2}{r} \\ \lambda_r = \frac{N-r+1}{r} \end{cases}$$

Effectuons alors $L_k \leftarrow L_k - L_{k+1}$ pour $k \in [\![1, r-1]\!]$ on a alors :

$$\forall k \in [\![1, r]\!], \quad \sum_{i=k}^{r} \lambda_i = \frac{N-k+1}{r} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in [\![1, r-1]\!], \ \lambda_k = \frac{N-k+1}{r} - \frac{N-(k+1)+1}{r} = \frac{1}{r}. \\ \lambda_r = \frac{N-r+1}{r} \end{cases}$$

Concluons .. il existe un unique élément $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ de $\mathbb{R}^r$ tel que U ait la même espérance que X_1 et une variance minimum :

$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) = (\frac{1}{r}, \dots, \frac{1}{r}, \frac{N-r+1}{r})$; la variance de U est alors $\frac{1}{r\alpha^2}$.

L'un des beaux exercices de la cuvée ESCP 98

Exercice Dans la suite $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique et de sa structure euclidienne canonique.

On pose $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (1+4xy+2yz+2xz+3z^2)\ e^{-(x^2+y^2+z^2)}$

Q1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$ {}^tPP = I_3 \text{ et } {}^tPAP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Q2. Soit (x,y,z) un élément de $\mathbb{R}^3$. Trouver une base orthonrmale de $\mathbb{R}^3$ telle que si (x',y',z') sont les coordonnées de (x,y,z) dans cette base, alors :

$$f(x,y,z) = (1-2x'^2+y'^2+4z'^2)\ e^{-(x'^2+y'^2+z'^2)}$$

Montrer que si $r = \|(x,y,z)\|$ alors : $(1-2r^2)e^{-r^2} \leqslant f(x,y,z) \leqslant (1+4r^2)e^{-r^2}$. Préciser dans quelles cas l'une des inégalités est une égalité.

Q3. Déduire de ce qui précède que f possède un maximum et un minimum et préciser les points où ils sont atteints.

Q1 A est une matrice symétrique et réelle donc A est diagonalisable.

Cherchons les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$AX=\lambda X \Leftrightarrow (A-\lambda I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda x + 2y + z = 0 \\ 2x - \lambda y + z = 0 \\ x+y+(3-\lambda)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda x + 2y + z = 0 \\ (\lambda+2)(x-y) = 0 \\ x+y+(3-\lambda)z = 0 \end{cases}$

1er Cas $\lambda = -2$. $AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y+z=0 \\ x+y+5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x-2y \\ 0 = x+y-10x-10y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=0 \end{cases}$

$-2\in Sp(A)$ et $SEP(A,-2) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = Vect\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Posons $U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; (U_1) est une base orthonormale de $SEP(A,-2)$

2e Cas $\lambda \neq -2$ $AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ (2-\lambda)x + z = 0 \\ 2x+(3-\lambda)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = (\lambda-2)x \\ 0 = 2x+(3-\lambda)(\lambda-2)x = x\left[-\lambda^2+5\lambda-4\right] \end{cases}$

$AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ z=(\lambda-2)x \\ 0 = -x(\lambda-1)(\lambda-4) \end{cases}$

• **$\lambda = 1$** $AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = -x \end{cases}$. $1\in Sp(A)$. $SEP(A,1) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

Posons $U_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. (U_2) est une base orthonormale de $SEP(A,1)$

• $\lambda = 4$ $\quad AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = 2x \end{cases}$. $\quad 4 \in Sp(A)$ et $SEP(A,4) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)$.

Posons $U_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$. (U_3) est une base orthonormale de $SEP(A,4)$

• $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq 4$. $AX=\lambda X \Leftrightarrow x=y=z=0$; $\lambda \notin Sp(A)$.

Finalement $Sp(A) = \{-2, 1, 4\}$, $SEP(A,-2) = Vect(U_1)$, $SEP(A,1) = Vect(U_2)$, $SEP(A,4) = Vect(U_3)$ avec $U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $U_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $U_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

(U_1) est une base orthonormale de $SEP(A,-2)$, (U_2) est une base orthonormale de $SEP(A,1)$, (U_3) est une base orthonormale de $SEP(A,4)$, $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = SEP(A,-2) \oplus SEP(A,1) \oplus SEP(A,4)$ et $SEP(A,-2)$, $SEP(A,1)$, $SEP(A,4)$ sont deux à deux orthogonaux.
Alors $\hat{\mathcal{B}} = (U_1, U_2, U_3)$ est une base orthonormale de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $-2, 1, 4$.
Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à $\hat{\mathcal{B}}$.

1°/ $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ $\qquad$ 2°/ ${}^tPP = I_3 = P\,{}^tP$ $\qquad$ 3°/ ${}^tPAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(Q2) Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Posons $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

• (u_1, u_2, u_3) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

• La matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (u_1, u_2, u_3) est P.

• Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ de coordonnées (x', y', z') dans (u_1, u_2, u_3) : $P\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

$$4xy + 2yz + 2xz + 3z^2 = (x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (x',y',z')\,{}^tPAP\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = (x',y',z')\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}.$$

Ainsi $4xy+2yz+2xz+3z^2 = -2x'^2+y'^2+4z'^2$.

$x^2+y^2+z^2 = (x,y,z)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (x',y',z')\,{}^tPP\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = (x',y',z')\,I_3\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = x'^2+y'^2+z'^2$.

Alors $\underline{f(x,y,z) = (1-2x'^2+y'^2+4z'^2)\,e^{-(x'^2+y'^2+z'^2)}}$.

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Posons $r=\|(x,y,z)\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Soit (x',y',z') les coordonnées de (x,y,z) dans (u_1,u_2,u_3). $\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r$.

$1-2x'^2-2y'^2-2z'^2 \le 1-2x'^2+y'^2+4z'^2 \le 1+4x'^2+4y'^2+4z'^2$

$1-2r^2 \le 1-2x'^2+y'^2+4z'^2 \le 1+4r^2$

$(1-2r^2)e^{-r^2} \le (1-2x'^2+y'^2+4z'^2)e^{-r^2} = (1-2x'^2+y'^2+4z'^2)e^{-(x'^2+y'^2+z'^2)} \le (1+4r^2)e^{-r^2}$

Alors $\underline{(1-2r^2)e^{-r^2} \overset{(1)}{\le} f(x,y,z) \overset{(2)}{\le} (1+4r^2)e^{-r^2} \text{ avec } r=\|(x,y,z)\|}$

$(1-2r^2)e^{-r^2} = f(x,y,z) \iff (1-2x'^2-2y'^2-2z'^2)e^{-(x'^2+y'^2+z'^2)} = (1-2x'^2+y'^2+4z'^2)e^{-(x'^2+y'^2+z'^2)}$

$\iff 1-2x'^2-2y'^2-2z'^2 = 1-2x'^2+y'^2+4z'^2$

$\iff 3y'^2+6z'^2=0$

$\iff y'=z'=0$

$\iff (x,y,z)\in \mathrm{Vect}(u_1)$.

Ainsi (1) est une égalité si et seulement si $(x,y,z)\in\mathrm{Vect}(u_1)$.

On montre de même que (2) est une égalité si et seulement si $(x,y,z)\in\mathrm{Vect}(u_3)$.

Q3 Pour $\forall r\in\mathbb{R}_+$, $\varphi(r)=(1+4r^2)e^{-r^2}$ et $\psi(r)=(1-2r^2)e^{-r^2}$.

φ et ψ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$. $\forall r\in\mathbb{R}_+$, $\varphi'(r)=(8r-2r(1+4r^2))e^{-r^2}$ et

$\psi'(r)=(-4r+(1-2r^2)(-2r))e^{-r^2}$.

$\forall r\in\mathbb{R}_+$, $\varphi'(r)=8r\left(\frac{3}{4}-r^2\right)$

	0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		
		+	0	-	
	1	↗		↘	0

$\max_{r\in\mathbb{R}^+}\varphi(r) = \varphi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4e^{-\frac{3}{4}}$

et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est le seul point qui réalise ce maximum.

$\forall r \in \mathbb{R}_+$, $\psi'(r) = -2r(3-2r^2)e^{-r^2} = -4r\left(\frac{3}{2} - r^2\right)e^{-r^2}$

r	0		$\sqrt{3/2}$	
$\psi'(r)$		$-$		$+$
ψ		$\searrow$	$-2e^{-3/2}$	$\nearrow$

$\min\limits_{r \in \mathbb{R}_+} \psi(r) = \psi(\sqrt{3/2}) = -2e^{-3/2}$.

$\sqrt{3/2}$ est le seul point qui réalise ce minimum.

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Posons $r = \|(x,y,z)\|$. $\quad -2e^{-3/2} \leq f(x,y,z) \leq 4e^{-3/4}$

$f(x,y,z) = 4e^{-3/4} \Leftrightarrow f(x,y,z) = (1+4r^2)e^{-r^2} = 4e^{-3/4} \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y,z) \in \mathrm{Vect}(u_3) \\ \|(x,y,z)\| = \sqrt{3}/2 \end{cases}$

$f(x,y,z) = -2e^{-3/2} \Leftrightarrow f(x,y,z) = (1-2r^2)e^{-r^2} = -2e^{-3/2} \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y,z) \in \mathrm{Vect}(u_1) \\ \|(x,y,z)\| = \sqrt{3/2} \end{cases}$

Ainsi $f(x,y,z) = 4e^{-3/4} \Leftrightarrow (x,y,z) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} u_3 \quad (\|u_3\| = 1)$

et $f(x,y,z) = -2e^{-3/2} \Leftrightarrow (x,y,z) = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\, u_1$

Pour finir • $\max\limits_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3} f(x,y,z) = 4e^{-3/4}$ et ce maximum est atteint aux points $\frac{\sqrt{3}}{2} u_3$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2} u_3$ où $u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

• $\min\limits_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3} f(x,y,z) = -2e^{-3/2}$ et ce minimum est atteint aux points $\sqrt{\frac{3}{2}}\, u_1$ et $-\sqrt{\frac{3}{2}}\, u_1$ où $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.