Exercice 1 $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = e^x + e^y + e^z$.

Etudier les extremums de f sous la contrainte $x+y+z=0$. R. (0,0,0) mini

---

__Etape 1.__ Le décor.. Posons $\forall X=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $g(X) = x+y+z$ et $\mathcal{C} = \{X \in \mathbb{R}^3 / g(X) = 0\}$.

g est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$. Il s'agit d'étudier les extremums de f sous la contrainte $\mathcal{C}$. Posons aussi $\mathcal{H} = \operatorname{Ker} g$. Ici $\mathcal{H} = \mathcal{C}$!

__Etape 2.__ Notons que f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$ ainsi si f admet un extremum local en un point A de $\mathcal{C}$, $\nabla f(A) \in \mathcal{H}^\perp$; A est un point critique dans l'optimisation de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Cherchons ces points critiques.

* Soit A un point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

$\nabla f(A) \in \mathcal{H}^\perp = \operatorname{Vect}(\nabla g(X))$ où X est un point quelconque de $\mathbb{R}^3$.

Posons $A=(a,b,c)$. $\nabla f(A) = (e^a, e^b, e^c) \in \operatorname{Vect} \nabla g(A) = \operatorname{Vect}((1,1,1))$.

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $e^a = \lambda$, $e^b = \lambda$, $e^c = \lambda$. $e^a = e^b = e^c$. $a=b=c$.

Or $A \in \mathcal{C}$ donc $a+b+c=0$. Ainsi $a=b=c=0$. $A=(0,0,0)$.

* Supposons que $A=(0,0,0)$. $\nabla f(A) = (e^0, e^0, e^0) = (1,1,1) \in \operatorname{Vect}((1,1,1)) = \mathcal{H}^\perp$.

Donc A est un point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$ car $A \in \mathcal{C}$.

Ainsi $A=(0,0,0)$ est l'unique point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

__Etape 3.__ Regardons si f admet en $A=(0,0,0)$ un extremum sous la contrainte $\mathcal{C}$. $f(A)=3$.

$\forall z \in \mathbb{R}$, $e^z \geqslant z+1$ (inégalité de convexité classique).

Soit $\overset{=(x,y,z)}{X} \in \mathcal{C}$. $x+y+z=0$. $f(X) = e^x + e^y + e^z \geqslant x+1+y+1+z+1 = x+y+z+3 = 3 = f(A)$.

$\forall X \in \mathcal{C}$, $f(X) \geqslant f(A)$

__f admet en $A=(0,0,0)$ un minimum global sous la contrainte qui vaut 3.__

Exercice 13 Pratiquement 8

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = \dfrac{1}{1+2x^2+y^2+z^2}$.

Etudier les extremums de f sous la contrainte $x - y + z = 5$. R. (1,-2,2) max

---

Etape 1.- Le décor.- Posons $\Omega = \mathbb{R}^3$ et $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = \dfrac{1}{1+2x^2+y^2+z^2}$.

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ (!) et f est de classe C^1 sur Ω.

Notons que $\forall X = (x,y,z) \in \Omega$, $\nabla f(X) = \left(\dfrac{-4x}{(1+2x^2+y^2+z^2)^2}, \dfrac{-2y}{(1+2x^2+y^2+z^2)^2}, \dfrac{-2z}{(1+2x^2+y^2+z^2)^2} \right)$

Posons $\forall X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $g_1(x,y,z) = x - y + z$ et $b_1 = 5$.

Posons encore $\mathcal{C} = \{ X \in \mathbb{R}^3 \mid g_1(X) = b_1 \} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 5 \}$.

g_1 est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ et $\forall X \in \mathbb{R}^3$, $\nabla g(X) = (1,-1,1)$.

Le problème consiste à étudier les extremums de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Etape 2 On cherche les points susceptibles de donner une solution au problème.

Supposons que f admette en un point $A = (a,b,c)$ de $\Omega \cap \mathcal{C}$ un extremum sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Alors $\nabla f(A) \in \mathcal{E}^{\perp} = \operatorname{Ker} g_1^{\perp}$ ou $\nabla f(A) \in \operatorname{Vect}(\nabla g_1(X))$ où $X \in \mathbb{R}^3$.

Ainsi $\left(\dfrac{-4a}{(1+2a^2+b^2+c^2)^2}, \dfrac{-2b}{(1+2a^2+b^2+c^2)^2}, \dfrac{-2c}{(1+2a^2+b^2+c^2)^2} \right) \in \operatorname{Vect}((1,-1,1))$

Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\dfrac{-4a}{(1+2a^2+b^2+c^2)^2} = \dfrac{\boxed{+}2b}{(1+2a^2+b^2+c^2)^2} = \dfrac{-2c}{(1+2a^2+b^2+c^2)^2} = \lambda$; donc $-4a = 2b = -2c$.

Alors $c = 2a$, $b = -2a$. Or $a - b + c = 5$. Ainsi $5 = a + 2a + 2a$; $a = 1$, $b = -2$, $c = 2$.

Si f possède un extremum local sous la contrainte $\mathcal{C}$ en $A \in \mathcal{C} \cap \Omega$ alors $A = (1,-2,2)$.

Etape 3 Etudions si f possède un extremum sous la contrainte $\mathcal{C}$ en $A = (1,-2,2)$.

Soit $X = (x,y,z) \in \mathcal{C} \cap \Omega$. $x - y + z = 5$. Posons $H = X - A = (\alpha, \beta, \gamma)$.

$\alpha - \beta + \gamma = (x-1) - (y-(-2)) + (z-2) = x - y + z - 5 = 0$. $\alpha - \beta + \gamma = 0$.

Notons que $f(A) = \dfrac{1}{1+2+4+4} = \dfrac{1}{11}$.

$f(X) - f(A) = \dfrac{1}{1+2x^2+y^2+z^2} - \dfrac{1}{11} = \dfrac{11-1-2x^2-y^2-z^2}{11(1+2x^2+y^2+z^2)}$. $f(X) - f(A)$ est du signe de $10 - 2x^2 - y^2 - z^2$.

$$10 - 2x^2 - y^2 - z^2 = 10 - 2(1+\alpha)^2 - (-2+\beta)^2 - (2+\gamma)^2$$

$$= 10 - 2 - 2\alpha^2 - 4\alpha - 4 - \beta^2 + 4\beta - 4 - 4\gamma - \gamma^2$$

$$= -2\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 - 4(\alpha - \beta + \gamma)$$

$$= -2\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 \quad \text{car } \alpha - \beta + \gamma = 0.$$

Donc $10 - 2x^2 - y^2 - z^2 \leq 0$. Ainsi $f(X) - f(A) \leq 0$.

$\forall X \in \mathcal{C} \cap \Omega$, $f(X) \leq f(A)$. <u>f possède au point $A = (1, -2, 2)$ un maximum global sous la contrainte $\mathcal{C}$.</u>

Exercice 1 $\forall (x,y,z) \in (\mathbb{R}^{+*})^3$, $f(x,y,z) = x\ln x + y\ln y + z\ln z$.

Etudier les extremums de f sous la contrainte $x+y+z=3a$ ($a \in \mathbb{R}^{+*}$). R. (a,a,a) mini

---

<u>Etape 1.</u>- le décor. Posons $\Omega = (\mathbb{R}^{+*})^3$. Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ comme produit de trois ouverts de $\mathbb{R}$.

Posons $\forall x=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $g(x)=x+y+z$, $\mathcal{H} = \ker g$ et $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g(x) = 3a\}$

(g est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$).

<u>Il convient d'étudier les extremums de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.</u>

<u>Etape 2.</u>-

Notons que f est de classe C^1 sur l'ouvert Ω.

* Supposons que f admette un extremum en $A=(\alpha,\beta,\gamma)$ sous la contrainte $\mathcal{C}$.

A est un point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

$\nabla f(A) \in \mathcal{H}^\perp$.

$\forall x=(x,y,z) \in \Omega$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \ln x + 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x) = \ln y + 1$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x) = \ln z + 1$.

donc $\nabla f(A) = (\ln\alpha + 1, \ln\beta + 1, \ln\gamma + 1) \in \mathcal{H}^\perp = \mathrm{Vect}(\nabla g(x))$ où x est un élément quelconque de $\mathbb{R}^3$. $\forall x=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\nabla g(x) = (1,1,1)$.

Alors $(\ln\alpha+1, \ln\beta+1, \ln\gamma+1) \in \mathrm{Vect}((1,1,1))$.

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\ln\alpha + 1 = \lambda$, $\ln\beta + 1 = \lambda$, $\ln\gamma + 1 = \lambda$. $\ln\alpha = \ln\beta = \ln\gamma$; $\alpha = \beta = \gamma$.

Or $A \in \mathcal{C}$ donc $\alpha+\beta+\gamma = 3a$. Ainsi $\alpha=\beta=\gamma=a$. $A=(a,a,a)$.

* Réciproquement posons $A=(a,a,a)$. $A \in \mathcal{C}$ car $a+a+a=3a$, $A \in \Omega$ car $a>0$ et $\nabla f(A) = (\ln a+1, \ln a+1, \ln a+1) \in \mathrm{Vect}((1,1,1)) = \mathcal{H}^\perp$. Donc A est un point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

<u>$A=(a,a,a)$ est l'unique point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.</u>

Etape 3. – Regardons si f admet en $A=(a,a,a)$ un extremum sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = x \ln x$. φ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x) = \ln x$ et $\varphi''(x) = \frac{1}{x}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi''(x) \geq 0$ donc φ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Dans ces conditions : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \Rightarrow \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(x_i)$

Posons $n=3$ et $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$.

Alors $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Alors $\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) \leq \lambda_1 \varphi(x_1) + \lambda_2 \varphi(x_2) + \lambda_3 \varphi(x_3)$.

Ainsi $\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, $\varphi\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z\right) \leq \frac{1}{3}\varphi(x) + \frac{1}{3}\varphi(y) + \frac{1}{3}\varphi(z)$.

ou $\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, $\varphi\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leq \frac{\varphi(x)+\varphi(y)+\varphi(z)}{3}$.

Soit $X = (x, y, z) \in \Omega \cap \mathcal{C}$. $x > 0, y > 0, z > 0$ et $x + y + z = 3a$.

Alors $\varphi(a) = \varphi\left(\frac{3a}{3}\right) = \varphi\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leq \frac{\varphi(x)+\varphi(y)+\varphi(z)}{3} = \frac{x \ln x + y \ln y + z \ln z}{3} = \frac{1}{3} f(X)$.

Donc $3\varphi(a) \leq f(X)$. Or $f(A) = a \ln a + a \ln a + a \ln a = 3a \ln a = 3\varphi(a)$.

Par conséquent : $\forall X \in \Omega \cap \mathcal{C}$, $f(A) \leq f(X)$.

<u>f admet en $A = (a,a,a)$ un minimum global sous la contrainte $\mathcal{C}$.</u>

Exercice 6 **Pratiquement 2**

Extr. $[x^2+y^2+z^2+t^2]$

S.c. $\begin{cases} x+y = 2 \\ z+t = 0 \end{cases}$

Etape 1.. On pose le problème.

Posons $\Omega = \mathbb{R}^4$, $\forall X=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4=\Omega$, $f(X)=x^2+y^2+z^2+t^2$, $g_1(X)=x+y$, $g_2(X)=z+t$, $b_1=2$ et $b_2=0$. Posons encore $\mathcal{C}=\{X\in\mathbb{R}^4 \mid g_1(X)=b_1 \text{ et } g_2(X)=b_2\}$.

Le problème revient à chercher les extremums de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

- Ω est un ouvert.
- b_1 et b_2 sont deux réels.
- f est de classe C^1 sur Ω.
- g_1 et g_2 sont deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^4$.

Etape 2.. On cherche les points susceptibles de donner une solution au problème.

Supposons que f admette un extremum local sous la contrainte $\mathcal{C}$ en un point $A=(a,b,c,d)$ de $\Omega\cap\mathcal{C}$.

Alors $\nabla f(A) \in \text{Vect}(\nabla g_1(X), \nabla g_2(X))$ où X est un point quelconque de $\mathbb{R}^4$. $\nabla f(A)\in \text{Vect}((1,1,0,0),(0,0,1,1))$.

$\exists (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\nabla f(A)=\lambda(1,1,0,0)+\mu(0,0,1,1)$.

Or $\nabla f(A)=(2a,2b,2c,2d)$.

Donc $(2a,2b,2c,2d)=\lambda(1,1,0,0)+\mu(0,0,1,1)$

$\begin{cases} 2a=\lambda \\ 2b=\lambda \\ 2c=\mu \\ 2d=\mu \end{cases}$; $a=b=\lambda$; et $c=d=\mu$. Or $a+b=2$ et $c+d=0$.

Ainsi $a=b=1$ et $c=d=0$.

<u>Si f possède un extremum sous la contrainte $\mathcal{C}$ en un point A de $\mathcal{C}\cap\Omega$</u>

alors $A=(1,1,0,0)$.

<u>Etape 3</u> .. Etudions l'existence d'un extremum local pour f sous la contrainte $\mathcal{C}$ en $A = (1,1,0,0)$.

(V1)

Soit $X = (x,y,z,t) \in \mathcal{C}$. Posons $H = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) := X - A$.

$x+y = 2$ et $z+t = 0$. Alors $\alpha+\beta = (x-1)+(y-1) = 0$ et $\gamma+\delta = (z-0)+(t-0) = 0$.

$$f(X) - f(A) = f(A+H) - f(A) \underset{f(A)=2}{=} (\alpha+1)^2+(\beta+1)^2+(\gamma+0)^2+(\delta+0)^2 - 2.$$

$$f(X) - f(A) = \alpha^2+2\alpha+1+\beta^2+2\beta+1+\gamma^2+\delta^2-2 \underset{\alpha+\beta=0}{=} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 \geq 0.$$

$\forall X \in \mathcal{C} \cap \Omega$, $f(X) \geq f(A)$.

<u>f possède un minimum global sous la contrainte $\mathcal{C}$ en $A = (1,1,0,0)$.</u>

(V2) Soit $X = (x,y,z,t) \in \mathcal{C} \cap \Omega$. $x+y = 2$ et $z+t = 0$

Cauchy-Schwarz donne : $x+y \leq |x+y| \leq \sqrt{1^2+1^2}\,\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}\,\sqrt{x^2+y^2}$.

Alors $2^2 = (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$; $4 \leq 2(x^2+y^2)$; $2 \leq x^2+y^2$

Donc $f(A) = 2 \leq x^2+y^2 \leq x^2+y^2+z^2+t^2 = f(X)$.

$\forall X \in \mathcal{C} \cap \Omega$, $f(A) \leq f(X)$. On retrouve le résultat précédent.

Exercice 1 Étudier le problème suivant. Extr.$[x^2-2xy+yz+y-z]$ $(4/5, 3/5, 1/5)$ max

$$\text{S.c.}\ \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

<u>Etape 1..</u> Position du problème.

Posons $\forall X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $f(X)=x^2-2xy+yz+y-z$, $g_1(X)=2x-y$, $g_2(X)=x+z$,

$b_1=b_2=1$, $\mathcal{K}=\operatorname{Ker} g_1 \cap \operatorname{Ker} g_2$ et $\mathcal{C}=\{X\in\mathbb{R}^3 \mid g_1(X)=b_1 \text{ et } g_2(X)=b_2\}$.

g_1 et g_2 sont deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$.

Il s'agit d'étudier les extremums de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

<u>Etape 2..</u> f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$. Cherchons les points critiques de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

* Soit $A=(a,b,c)$ un tel point. $\nabla f(A) \in \mathcal{K}^{\perp} = \operatorname{Vect}(\nabla g_1(X), \nabla g_2(X))$ où X est un point quelconque de $\mathbb{R}^3$.

$\nabla f(A) = (2a-2b, -2a+c+1, b-1)$

$\forall X\in\mathbb{R}^3$, $\nabla g_1(X)=(2,-1,0)$ et $\nabla g_2(X)=(1,0,1)$

Ainsi $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $(2a-2b, -2a+c+1, b-1)=\alpha(2,-1,0)+\beta(1,0,1)$.

Notons également que $A\in\mathcal{C}$.

Alors $\begin{cases} 2a-2b=2\alpha+\beta \\ -2a+c+1=-\alpha \\ b-1=\beta \\ 2a-b=1 \\ a+c=1 \end{cases}$; $\begin{cases} b=\beta+1 \\ 2a=2b+2\alpha+\beta=3\beta+2\alpha+2 \\ c=2a-\alpha-1=3\beta+2\alpha+2-\alpha-1=\alpha+3\beta+1 \\ 0=1-2a+b=1-3\beta-2\alpha-2+\beta+1=-2\beta-2\alpha \\ 2=2a+2c=3\beta+2\alpha+2+\cancel{2\alpha}+6\beta+2 \end{cases}$

$\begin{cases} a=\frac{1}{2}(3\beta+2\alpha+2) \\ b=\beta+1 \\ c=\alpha+3\beta+1 \\ \beta=-\alpha \\ 5\beta+4\alpha=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} a=\frac{1}{2}(3\beta+2\alpha+2) \\ b=\beta+1 \\ c=\alpha+3\beta+1 \\ \alpha=2/5 \\ \beta=-2/5 \end{cases}$; $\begin{cases} \alpha=2/5 \\ \beta=-2/5 \\ a=\frac{1}{2}\left(-\frac{6}{5}+\frac{4}{5}+2\right)=4/5 \\ b=-2/5+1=3/5 \\ c=2/5-3\times 2/5+1=1/5 \end{cases}$

$A=\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

Si A est un point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$ alors $A = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

* Réciproquement il est aisé de montrer que si $A = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$ alors

$A \in \mathcal{C}$ et $\nabla f(A) \in \mathrm{Vect}((2,-1,0),(1,0,1)) = \mathcal{H}^{\perp}$

$\left(\nabla f(A) = \frac{2}{5}(2,-1,0) - \frac{2}{5}(1,0,1)\right)$.

<u>Etape 3..</u> Etudions si f admet en $A = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$ un optimum sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Soit $H = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{H}$. $2\alpha - \beta = 0$ et $\alpha + \gamma = 0$. $\underline{\beta = 2\alpha}$ et $\underline{\gamma = -\alpha}$

$f(A+H) - f(A) = \left(\frac{4}{5}+\alpha\right)^2 - 2\left(\frac{4}{5}+\alpha\right)\left(\frac{3}{5}+\beta\right) + \left(\frac{3}{5}+\beta\right)\left(\frac{1}{5}+\gamma\right) + \frac{3}{5} + \beta - \frac{1}{5} - \gamma - f(A)$.

$f(A) = \frac{1}{5}$.

$f(A+H) - f(A) = \alpha^2 + \frac{8}{5}\alpha - \frac{6}{5}\alpha - \frac{8}{5}\beta - 2\alpha\beta + \frac{3}{5}\gamma + \frac{1}{5}\beta + \beta\gamma + \beta - \gamma$

$f(A+H) - f(A) = \alpha^2 + \frac{2}{5}\alpha - \frac{2}{5}\beta - \frac{2}{5}\gamma - 2\alpha\beta + \beta\gamma$.

$f(A+H) - f(A) = \alpha^2 + \underbrace{\frac{2}{5}\alpha - \frac{2}{5}(2\alpha) - \frac{2}{5}(-\alpha)}_{=0} - 2\alpha(2\alpha) + (2\alpha)(-\alpha)$.

$\begin{cases} \beta = 2\alpha \\ \gamma = -\alpha \end{cases}$

$f(A+H) - f(A) = \alpha^2 - 4\alpha^2 - 2\alpha^2 = -5\alpha^2 \leq 0$.

$\forall H \in \mathcal{H}, \ f(A+H) \leq f(A)$

Donc $\forall X \in \mathcal{C}$, f(

<u>f admet en $A = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$ un maximum global sous la contrainte $\mathcal{C}$.</u>

Exercice 1 Extr. $[x^2 + y^2 + z^2 + t^2]$
S.c. $\begin{cases} x + y + z - t = 3 \\ 2x - y + z + t = -6 \end{cases}$

<u>Etape 1.</u>- Le décor. Posons $\forall X=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$, $f(X)=x^2+y^2+z^2+t^2$, $g_1(X)=x+y+z-t$

$g_2(X)=2x-y+z+t$, $\mathcal{H}=\operatorname{Ker} g_1\cap\operatorname{Ker} g_2$ et $\mathcal{C}=\{X\in\mathbb{R}^4 \mid g_1(X)=3$ et $g_2(X)=-6\}$.

Notons que g_1 et g_2 sont deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^4$.

Il s'agit d'étudier les extremums de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

f, g_1 et g_2 sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^4$.

$\forall X=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$, $\nabla f(X)=(2x,2y,2z,2t)$, $\nabla g_1(X)=(1,1,1,-1)$ et $\nabla g_2(X)=(2,-1,1,1)$.

<u>Etape 2.</u>.- Recherche des points critiques de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

* Supposons que $A=(a,b,c,d)$ soit un point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

$\nabla f(A)\in\mathcal{H}^\perp$. $\mathcal{H}^\perp=\operatorname{Vect}(\nabla g_1(X),\nabla g_2(X))=\operatorname{Vect}((1,1,1,-1),(2,-1,1,1))$.

Alors $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $(2a,2b,2c,2d)=\nabla f(A)=\alpha(1,1,1,-1)+\beta(2,-1,1,1)$.

Donc $\begin{cases}2a=\alpha+2\beta\\2b=\alpha-\beta\\2c=\alpha+\beta\\2d=-\alpha+\beta\end{cases}$. Rappelons que $A\in\mathcal{C}$ donc $\begin{cases}a+b+c-d=3\\2a-b+c+d=-6\end{cases}$

Donc $\begin{cases}6=2a+2b+2c-2d=\alpha+2\beta+\alpha-\beta+\alpha+\beta+\alpha-\beta=4\alpha+\beta\\-12=4a-2b+2c+2d=2\alpha+4\beta-\alpha+\beta+\alpha+\beta-\alpha+\beta=\alpha+7\beta\end{cases}$. $\begin{cases}4\alpha+\beta=6\\\alpha+7\beta=-12\end{cases}$

$\beta=6-4\alpha$ et $-12=\alpha+42-28\alpha$. $\alpha=\frac{54}{27}=2$ et $\beta=6-8=-2$.

Donc $\begin{cases}a=\frac12(2-4)=-1\\b=\frac12(2+2)=2\\c=\frac12(2-2)=0\\d=\frac12(-2-2)=-2\end{cases}$ $\underline{A=(-1,2,0,-2).}$

* Réciproquement pour $A=(-1,2,0,-2)$.

$-1+2+0-(-2)=3$ et $2(-1)-(2)+0+(-2)=-6$; $A\in\mathcal{C}$.

$\nabla f(A) = (2(-1), 2\times(2), 2\times(0), 2(-2)) = (-2,4,0,-4)$.

De plus $2(1,1,1,-1) - 2(2,-1,1,1) = (2,2,2,-2) - (4,-2,2,2) = (-2,4,0,-4) = \nabla f(A)$.

Alors $\nabla f(A) \in \mathrm{Vect}((1,1,1,-1),(2,-1,1,1)) = \mathcal{H}^{\perp}$.

Ceci achève de montrer que A est un point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

<u>$A=(-1,2,0,-2)$ est l'unique point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.</u>

<u>Etape 3.</u> Regardons si f admet en $A=(-1,2,0,-2)$ un extremum sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Soit $H=(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathcal{H}$.

$f(A+H)-f(A) = (-1+\alpha)^2+(2+\beta)^2+(0+\gamma)^2+(-2+\delta)^2-[(-1)^2+2^2+(-2)^2]$

$f(A+H)-f(A) = 1-2\alpha+\alpha^2+4+4\beta+\beta^2+\gamma^2+4-4\delta+\delta^2-9 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2-2\alpha+4\beta-4\delta$.

$H=(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathcal{H}$ donc $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma-\delta=0\\ 2\alpha-\beta+\gamma+\delta=0\end{cases}$

(1)-(2) donne $-\alpha+2\beta-2\delta=0$, ainsi $-2\alpha+4\beta-4\delta=0$.

Alors $f(A+H)-f(A)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2\geqslant 0$.

$\forall H\in\mathcal{H}$, $f(A+H)-f(A)\geqslant 0$. Alors : $\forall X\in\mathcal{C}$, $f(X)-f(A)\geqslant 0$.

$\forall X\in\mathcal{C}$, $f(X)\geqslant f(A)$.

<u>f admet en $A=(-1,2,0,-2)$ un minimum global sous la contrainte $\mathcal{C}$ qui vaut 9.</u>

Exercice **Pratiquement 4**

Etudier le problème $\text{Extr.}[\sum_{k=1}^{n}(x_k)^4]$

$$\text{S.c.} \left| \sum_{k=1}^{n} x_k = n \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1,n]\!],\ x_k > 0 \right.$$

Etape 1.- Le décor. Posons $\Omega = (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $\forall X=(x_1,\dots,x_n)\in\Omega$, $f(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k^4$.

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est de classe C^1 sur Ω car f est polynomiale.

$\forall X=(x_1,\dots,x_n)\in\Omega$, $\nabla f(X)=(4x_1^3,4x_2^3,\dots,4x_n^3)$.

Posons $\forall X=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $g_1(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k$, $b_1=n$ et $C=\{X\in\mathbb{R}^n \mid g_1(X)=b_1\}$.

g_1 est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$. $\forall X\in\mathbb{R}^n$, $\nabla g_1(X)=(1,1,\dots,1)$.

Le problème consiste à étudier les extremums de f sous la contrainte C.

Etape 2.- Chercher les points susceptibles de donner une solution au problème.

Supposons que f admette un extremum local sous la contrainte C en un point $A=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ de $\Omega\cap C$.

Alors $\nabla f(A)\in \mathcal{B}^\perp = (\text{Ker}\, g_1)^\perp$ or $\nabla f(A)\in \text{Vect}(\nabla g_1(X))$ or $X\in\mathbb{R}^n$.

Ainsi $\nabla f(A)\in\text{Vect}((1,\dots,1))$. $\exists\lambda\in\mathbb{R}$, $(4a_1^3,4a_2^3,\dots,4a_n^3)=\lambda(1,\dots,1)$.

Donc $4a_1^3=\dots=4a_n^3=\lambda$; $a_1^3=\dots=a_n^3$; $a_1=a_2=\dots=a_n$. Or $A\in C$ donc $\sum_{k=1}^{n} a_k=n$

Donc $a_1=a_2=\dots=a_n=1$. Si f possède un extremum local sous la contrainte C en un point A de $C\cap\Omega$ alors $A=(1,1,\dots,1)$.

Etape 3.- Etudions si f possède en $A=(1,\dots,1)$ un extremum sous la contrainte C.

$f(A)=\sum_{k=1}^{n} 1^4=n$. Soit $X=(x_1,\dots,x_n)\in\Omega\cap C$.

$n=\sum_{k=1}^{n} x_k = \left|\sum_{k=1}^{n} 1\times x_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \sqrt{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$ d'après Cauchy-Schwarz.

Alors $n^2\leq n\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n\left|\sum_{k=1}^{n} 1\times x_k^2\right| \underset{\text{CS}}{\leq} n\sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^4} = n\sqrt{n}\sqrt{f(X)}$; $n^2\leq n\sqrt{n}\sqrt{f(X)}$.

Ainsi $n^4\leq n^2 n f(X)$ or $n\leq f(X)$ or $f(A)\leq f(X)$. $\forall X\in C\cap\Omega$, $f(A)\leq f(X)$.

f possède en $A=(1,1,\dots,1)$ un minimum global sous la contrainte C qui vaut n.

Exercice 5 **Pratiquement 1**

Traiter le problème Extr. $[\sum_{k=1}^{n} x_k^2]$

S.c. $\left| \sum_{k=1}^{n} x_k = 1 \right.$

$\boxed{E1}$ Posons $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\forall X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $g_1(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ et $b_1 = 1$.

Posons aussi $\mathcal{C} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid g_1(X) = b_1\}$.

Le problème revient à étudier les extremums de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

- Ω est un ouvert. • b_1 est un réel.
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω
- g_1 est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{E2}$ Supposons que f admette un extremum (local) sous la contrainte $\mathcal{C}$ et un point $A = (a_1, \dots, a_n)$ de $\Omega \cap \mathcal{C}$.

Alors $\nabla f(A) \in (\mathrm{Ker}\, g_1)^{\perp}$ ou $\nabla f(A) \in \mathrm{Vect}(\nabla g_1(X))$ où X est un élément quelconque de $\mathbb{R}^n$. $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\nabla g_1(X) = (1, \dots, 1)$.

Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\nabla f(A) = \lambda (1, \dots, 1)$. Donc $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \lambda$

Or $A \in \mathcal{C}$ donc $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. Ainsi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$.

Finalement si f possède un extremum local sous la contrainte $\mathcal{C}$ en un point A de $\Omega \cap \mathcal{C}$ alors $A = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$.

$\boxed{E3}$ Étudions l'existence d'un extremum local pour f sous la contrainte $\mathcal{C}$ en A.

Notons que $A \in \Omega \cap \mathcal{C}$! Notons également que $f(A) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$

V1 Soit $X = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \cap \mathcal{C}$. Utilisons Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$.

$$1 = \sum_{k=1}^{n} x_k \leq \left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{n} \sqrt{f(X)}$$

Alors $1 \leq n \times f(X)$; $\frac{1}{n} \leq f(X)$; $f(A) \leq f(X)$.

Donc $\forall X \in \mathcal{B} \cap \Omega$, $f(A) \leq f(X)$.

f admet un minimum global sous la contrainte $\mathcal{C}$ au point $A = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$

qui vaut $\frac{1}{n}$.

V2 Soit $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{C} \cap \Omega$. Posons $H = X - A = (h_1, h_2, \dots, h_n)$.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \quad \text{donc} \quad \sum_{i=1}^{n} h_i = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{1}{n}\right) = 0.$$

$$f(X) - f(A) = f(A+H) - f(A) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} + h_i\right)^2 - \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n^2} + h_i^2 + 2\frac{h_i}{n}\right) - \frac{1}{n}.$$

$$f(X) - f(A) = \frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{n} h_i^2 + \underbrace{\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i}_{=0} - \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} h_i^2 \geq 0.$$

Finalement $\forall X \in \mathcal{C} \cap \Omega$, $f(X) \geq f(A)$. On retrouve le résultat précédent.

Exercice 1 p est un élément de $\mathbb{N}^*$ et $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p)$ une famille de réels strictement positifs. β est un réel strictement positif.

Etudier le problème Extr. $\left[\sum_{k=1}^{p}\frac{\alpha_k^2}{x_k}\right]$

S.c. $\left|\ \sum_{k=1}^{p} x_k=\beta \quad \text{et} \quad \forall k\in[\![1,p]\!],\ x_k>0\right.$

(on pourra utiliser dans une deuxième phase Cauchy-Schwarz ; $\sum_{k=1}^{p}\sqrt{x_k}\,\frac{\alpha_k}{\sqrt{x_k}}$)

Etape 1.. le décor.. Posons $\Omega=\{X=(x_1,x_2,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p \mid \forall i\in[\![1,p]\!],\ x_i>0\}$

Posons $\mathcal{C}=\{(x_1,x_2,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p \mid \sum_{k=1}^{p}x_k=\beta\}$.

Posons encore $\forall X=(x_1,x_2,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p$, $g_1(X)=\sum_{k=1}^{p}x_k$ et $\forall X=(x_1,x_2,\dots,x_p)\in\Omega$,

$f(X)=\sum_{k=1}^{p}\frac{\alpha_k^2}{x_k}$.

- Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ car $\Omega=(]-\infty,+\infty[)^p$ (produit de p
- f est de classe C^1 sur Ω (fonction rationnelle).
- g_1 est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{C}=\{X\in\mathbb{R}^p \mid g_1(X)=\beta\}$.

Etape 2. La recherche des points susceptibles de donner une solution au problème.

Supposons que f admette en $A\in\Omega\cap\mathcal{C}$ un extremum local sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Posons $A=(a_1,a_2,\dots,a_p)$ et $\mathcal{H}=\operatorname{Ker} g_1$.

$\nabla f(A)\in\mathcal{H}^\perp=\operatorname{Vect}\nabla g_1(X)$ où X est un élément quelconque de $\mathbb{R}^p$.

$\nabla f(A)=\left(-\frac{\alpha_1^2}{a_1^2},-\frac{\alpha_2^2}{a_2^2},\dots,-\frac{\alpha_p^2}{a_p^2}\right)$ et $\mathcal{H}^\perp=\operatorname{Vect}((1,1,\dots,1))$.

Alors $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall \ell\in[\![1,p]\!],\ -\frac{\alpha_\ell^2}{a_\ell^2}=\lambda$. Donc $\frac{\alpha_1^2}{a_1^2}=\frac{\alpha_2^2}{a_2^2}=\dots=\frac{\alpha_p^2}{a_p^2}$.

Alors $\frac{\alpha_1}{a_1}=\frac{\alpha_2}{a_2}=\dots=\frac{\alpha_p}{a_p}$ car tous ces réels sont positifs.

Donc $\forall k\in[\![1,p]\!],\ \frac{\alpha_k}{a_k}=\frac{\alpha_1}{a_1}$; $\forall k\in[\![1,p]\!],\ a_k=\frac{a_1}{\alpha_1}\alpha_k$.

Alors $\beta\underset{A\in\mathcal{C}}{=}\sum_{k=1}^{p}a_k=\frac{a_1}{\alpha_1}\sum_{k=1}^{p}\alpha_k=\frac{a_1}{\alpha_1}S$ en posant $S=\sum_{k=1}^{p}\alpha_k$.

Ainsi $a_1 = \frac{\alpha_1 \beta}{S}$ ou $\frac{a_1}{\alpha_1} = \frac{\beta}{S}$.

$\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\frac{a_k}{\alpha_k} = \frac{a_1}{\alpha_1}$; $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $a_k = \alpha_k \frac{\beta}{S}$.

<u>Nécessairement $A = \frac{\beta}{S}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$.</u>

<u>Etape 3</u>.- Vérifions si f admet en $A = \frac{\beta}{S}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ un optimum sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Soit $X = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \Omega \cap \mathcal{C}$.

$$S = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k = \sum_{k=1}^{p} \sqrt{x_k}\, \frac{\alpha_k}{\sqrt{x_k}} \quad ; \quad S^2 = \left(\sum_{k=1}^{p} \sqrt{x_k}\, \frac{\alpha_k}{\sqrt{x_k}} \right)^2.$$

Cauchy-Schwarz donne alors :

$$S^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{p} (\sqrt{x_k})^2 \right)\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\alpha_k^2}{x_k} \right) = \left(\sum_{k=1}^{p} x_k \right) f(X) = \quad f(X).$$

Donc $f(X) \geq S^2/\beta$.

$$f(A) = f\left(\frac{\beta}{S}\alpha_1, \frac{\beta}{S}\alpha_2, \dots, \frac{\beta}{S}\alpha_p\right) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\alpha_k^2}{\frac{\beta}{S}\alpha_k} = \frac{S}{\beta} \sum_{k=1}^{p} \alpha_k = \frac{S}{\beta^2}.$$

Alors $\forall X \in \mathcal{C} \cap \Omega$, $f(X) \geq \frac{S^2}{\beta} = f(A)$.

<u>f admet un minimum global en $A = \frac{\beta}{S}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ sous la contrainte $\mathcal{C}$.</u>

Exercice 17 Dans toute la suite n est un élément de $[\![2,+\infty[\![$.

Q0. α_1, α_2, ..., α_n sont n réels. On suppose que l'un au moins de ces réels est strictement positif et que l'un au moins est strictement négatif.

Montrer que la fonction numérique de la variable réelle $h : t \to \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, e^{-\alpha_k t}$ admet un zéro et un seul dans $\mathbb{R}$.

Q1. Montrer que $\Omega = \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^n$ est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$.

Q2. On pose $\forall X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega,\ f(X) = -\sum_{k=1}^{n} (x_k \ln x_k)$.

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.

b) Soit $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un point de Ω. Étudier le signe de la forme quadratique q_A associée à la hessienne de f en A.

Q3. u_1, u_2, ..., u_n sont n réels tels que $u_1 < u_2 < \cdots < u_n$. v est un réel.

a) Montrer que f possède un point critique sous la contrainte $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ et $\sum_{i=1}^{n} u_i \, x_i = v$ si et seulement si $v \in]u_1, u_n[$ et qu'en cas d'existence ce point critique est unique.

b) En supposant que $v \in]u_1, u_n[$, montrer que ce point critique correspond à un maximum.

Voir Q0 à la fin de Q2.

Q1 • $\mathbb{R}^{+*} =]0,+\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ donc Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ comme produit de n ouverts de $\mathbb{R}$.

• Notons que Ω est convexe. Soit $\lambda \in [0,1]$ et, soient $A=(a_1,\ldots,a_n)$ et $B=(b_1,\ldots,b_n)$ deux points de Ω.

$\lambda A+(1-\lambda)B = (\lambda a_1+(1-\lambda)b_1, \ldots, \lambda a_n+(1-\lambda)b_n)$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_i>0$, $b_i>0$, $\lambda \geqslant 0$, $1-\lambda \geqslant 0$ et ($\lambda>0$ ou $1-\lambda>0$).

Donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda a_i+(1-\lambda)b_i>0$. Ainsi $\lambda A+(1-\lambda)B \in \Omega$.

$\forall \lambda \in [0,1]$, $\forall (A,B) \in \Omega^2$, $\lambda A+(1-\lambda)B \in \Omega$.

Ainsi $\forall (A,B) \in \Omega^2$, $[A,B] \subset \Omega$. Ω est convexe.

Q2 a) Posons $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\forall x=(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \Omega$, $p_k(x)=x_k$.

Posons aussi $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(t)=t\ln t$.

. Pour tout k dans $[\![1,n]\!]$, p_k est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω (fonction polynôme).

. $\forall X \in \Omega$, $p_k(X)>0$ et ceci pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

. φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par composition, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\varphi \circ p_k$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.

Par combinaison linéaire, $f = -\sum_{k=1}^{n} \varphi \circ p_k$ est de classe C^2 sur Ω.

b) Soit $A = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$. $f(A) = -\sum_{k=1}^{n} a_k \ln a_k$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = -\ln a_i - a_i \times \frac{1}{a_i} = -\ln a_i - 1$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A) = \begin{cases} -\frac{1}{a_i} & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Ainsi $\nabla^2 f(A) = \mathrm{Diag}\left(-\frac{1}{a_1}, -\frac{1}{a_2}, \dots, -\frac{1}{a_n}\right)$.

Les valeurs propres de $\nabla^2 f(A)$ sont strictement négatives.

Notons q_A la forme quadratique associée à $\nabla^2 f(A)$. D'après ce qui précède

$\forall H \in \mathbb{R}^n$, $H \neq 0 \Rightarrow q_A(H) < 0$ ... et ceci pour tout A dans Ω (← important pour Q3b)

⚠ $\boxed{Q0}$ h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(-\alpha_k^2 e^{-\alpha_k t}\right) < 0$ (l'un au moins des réels α_k n'est pas nul !)

h est donc continue et strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc h définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $h(\mathbb{R})$.

Posons $K_1 = \{k \in [\![1,n]\!],\ \alpha_k > 0\}$ et $K_2 = \{k \in [\![1,n]\!],\ \alpha_k < 0\}$. K_1 et K_2 ne sont pas vides et $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \sum_{k \in K_1} \alpha_k e^{-\alpha_k t} + \sum_{k \in K_2} \alpha_k e^{-\alpha_k t}$.

$\forall k \in K_1$, $\lim_{t \to +\infty} (\alpha_k e^{-\alpha_k t}) = 0$ et $\lim_{t \to -\infty} (\alpha_k e^{-\alpha_k t}) = +\infty$.

$\forall k \in K_2$, $\lim_{t \to +\infty} (\alpha_k e^{-\alpha_k t}) = -\infty$ et $\lim_{t \to -\infty} (\alpha_k e^{-\alpha_k t}) = 0$

Donc $\lim_{t \to +\infty} h(t) = -\infty$ et $\lim_{t \to -\infty} h(t) = +\infty$

Dans ces conditions h définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $\exists ! \, t_0 \in \mathbb{R}$, $h(t_0)=0$.

<u>h admet un zéro et un seul dans $\mathbb{R}$.</u>

Q3 a) Posons 1) $\forall X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $g_1(X)=\sum_{i=1}^n x_i$ et $g_2(X)=\sum_{i=1}^n u_i x_i$.

2) $\mathcal{C}=\{X\in\mathbb{R}^n \mid g_1(X)=1 \text{ et } g_2(X)=v\}$

3) $\mathcal{K}=\operatorname{Ker} g_1 \cap \operatorname{Ker} g_2$.

Rappelons que $\mathcal{K}^\perp=\operatorname{Vect}(\nabla g_1(X),\nabla g_2(X))$ où X est un élément quelconque de $\mathbb{R}^n$.

Alors $\mathcal{K}^\perp=\operatorname{Vect}((1,1,\dots,1),(u_1,u_2,\dots,u_n))$.

Soit $A=(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathcal{C}$. $\nabla f(A)=(-\ln a_1-1,-\ln a_2-1,\dots,-\ln a_n-1)$.

A est un point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$

$\Leftrightarrow$ $A\in\mathcal{C}$ et $\nabla f(A)\in\mathcal{K}^\perp$

$\Leftrightarrow$ $\sum_{i=1}^n a_i=1$, $\sum_{i=1}^n u_i a_i=v$ et $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $\nabla f(A)=\alpha(1,\dots,1)+\beta(u_1,\dots,u_n)$.

$\Leftrightarrow$ $\sum_{i=1}^n a_i=1$, $\sum_{i=1}^n u_i a_i=v$, $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $-\ln a_i-1=\alpha+\beta u_i$

$\Leftrightarrow$ $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $a_i=e^{-\alpha-1}e^{-\beta u_i}$, $\sum_{i=1}^n e^{-\alpha-1}e^{-\beta u_i}=1$ et $\sum_{i=1}^n u_i e^{-\alpha-1}e^{-\beta u_i}=v$

$\Leftrightarrow$ $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $a_i=e^{-\alpha-1}e^{-\beta u_i}$, $e^{\alpha+1}=\sum_{i=1}^n e^{-\beta u_i}$ et $\sum_{i=1}^n u_i e^{-\beta u_i}=v\,e^{\alpha+1}=v\sum_{i=1}^n e^{-\beta u_i}$

$\Leftrightarrow$ $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $a_i=e^{-\alpha-1}e^{-\beta u_i}$, $\alpha+1=\ln\left(\sum_{i=1}^n e^{-\beta u_i}\right)$ et $\sum_{i=1}^n (v-u_i)e^{-\beta u_i}=0$

$\Leftrightarrow$ $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $a_i=e^{-\alpha-1-\beta u_i}$, $\alpha=-1+\ln\left(\sum_{i=1}^n e^{-\beta u_i}\right)$ et $\sum_{i=1}^n (v-u_i)e^{-\beta u_i}e^{\beta v}=0$

$\Leftrightarrow$ $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $a_i=e^{-\alpha-1-\beta u_i}$, $\alpha=-1+\ln\left(\sum_{i=1}^n e^{-\beta u_i}\right)$ et $\sum_{i=1}^n (v-u_i)e^{\beta(v-u_i)}=0$.

A est un point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

$\Updownarrow$ il existe deux réels α et β tels que :

1) $\sum_{i=1}^{n}(v-u_i)e^{\beta(v-u_i)}=0$ ou $\sum_{i=1}^{n}(u_i-v)e^{-\beta(u_i-v)}=0$ (multiplication par -1 !!)

$\uparrow$ ①

2) $\alpha=-1+\ln\left(\sum_{i=1}^{n}e^{-\beta u_i}\right)$

3) $\forall i\in[\![1,n]\!],\ a_i=e^{-\alpha-1-\beta u_i}$.

Notons que $\forall i\in[\![1,n]\!],\ e^{-\alpha-1-\beta u_i}\in\mathbb{R}_+^*$.

Alors * s'il n'existe pas de réel β vérifiant ① alors il n'y a pas de point critique pour f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

* s'il existe un réel β vérifiant ① alors f possède un point critique dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

* s'il existe un réel β et un seul vérifiant ① alors f possède un point critique et un seul dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

1er cas.. $v\in]-\infty,u_1]$. $\forall i\in[\![1,n]\!],\ u_i-v\geq 0$ et $u_n-v>0$.

Alors $\forall\beta\in\mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{n}(u_i-v)e^{-\beta(u_i-v)}>0$. Il n'existe pas de réel β vérifiant ①

2e cas.. $v\in[u_n,+\infty[$. $\forall i\in[\![1,n]\!],\ u_i-v\leq 0$ et $u_1-v<0$.

Alors $\forall\beta\in\mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{n}(u_i-v)e^{-\beta(u_i-v)}<0$. Il n'existe pas de réel β vérifiant ①

3e cas.. $v\in]u_1,u_n[$. Posons $\forall k\in[\![1,n]\!],\ x_k=u_k-v$.

Alors $x_1<0$ et $x_n>0$

d'après Q0 : $\exists!\,\beta\in\mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{n}x_k e^{-x_k\beta}=0$

Donc il existe un réel β et un seul vérifiant ①

Si $v \notin]u_1, u_n[$, f ne possède pas de point critique dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Si $v \in]u_1, u_n[$, f possède un point critique et un seul dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

b) On suppose que $v \in]u_1, u_n[$. Soit A l'unique point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Soit $X \in \mathcal{C}$. Posons $H = X - A$. $H \in \mathcal{H}$ car X et A sont dans $\mathcal{C}$.

A et X sont dans $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}$ est convexe donc $[A, A+H] = [A, X] \subset \mathcal{U}$.

La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 montre l'existence d'un réel θ appartenant à $[0,1]$ tel que :

forme quadratique associée à $D^2 f(A+\theta H)$.

$f(A+H) = f(A) + \langle \nabla f(A), H \rangle + \frac{1}{2} q_{A+\theta H}(H)$.

Or $\nabla f(A) \in \mathcal{H}^\perp$ et $H \in \mathcal{H}$. Ainsi $f(X) = f(A+H) = f(A) + \frac{1}{2} q_{A+\theta H}(H)$.

$f(X) - f(A) = \frac{1}{2} q_{A+\theta H}(H)$.

Or $A+\theta H \in \mathcal{U}$ donc Q2 b) donne $q_{A+\theta H}(H) \leq 0$ (et même < 0 si $H \neq 0$).

Donc $f(X) - f(A) \leq 0$; $f(X) \leq f(A)$.

$\forall X \in \mathcal{C}$, $f(X) \leq f(A)$. Alors f admet en A un maximum sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Exercice 1 **Pratiquement 9**

$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=x^2-2xy+yz+y-z.$

Etudier les extremums de f sous les contraintes $2x-y=1$ et $x+z=1$. R. $(4/5, 3/5, 1/5)$ max

---

Remarque.. Cet exercice peut se faire en 1' en remplaçant dans f y par $2x-1$ et z par $1-x$. On se ramène alors à l'optimisation d'une fonction d'une variable (la fonction $x\mapsto -5x^2+8x-3$) !

Etape 1.. Le décor.. Posons $\forall X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $g_1(X)=2x-y$ et $g_2(X)=x+z$.

Posons $b_1=1$ et $b_2=1$. Posons encore $\mathcal{C}=\{X\in\mathbb{R}^3 \mid g_1(X)=b_1 \text{ et } g_2(X)=b_2\}$ et

$\mathcal{K}=\operatorname{Ker} g_1\cap \operatorname{Ker} g_2$.

Il s'agit d'étudier les extremums de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Etape 2.. Recherche des points critiques de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$

Supposons que f admette en un point $A=(a,b,c)$ de $\mathcal{C}$ un extremum sous la contrainte $\mathcal{C}$, comme f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ (fonction polynôme) alors $\nabla f(A)\in\mathcal{K}^\perp$. Or $\mathcal{K}^\perp=\operatorname{Vect}(\nabla g_1(X), \nabla g_2(X))$ où X est un élément quelconque de $\mathbb{R}^3$.

$\nabla f(A)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A), \frac{\partial f}{\partial z}(A)\right)=(2a-2b, -2a+c+1, b-1)$

$\mathcal{K}^\perp=\operatorname{Vect}(\nabla g_1(X), \nabla g_2(X))=\operatorname{Vect}((2,-1,0),(1,0,1))$.

$\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\quad (2a-2b, -2a+c+1, b-1)=\alpha(2,-1,0)+\beta(1,0,1)$

$$\begin{cases}2a-2b=2\alpha+\beta\\ -2a+c+1=-\alpha\\ b-1=\beta\end{cases}\text{. Alors }\begin{cases}\alpha=2a-c-1\\ \beta=b-1\\ 2a-2b=2(2a-c-1)+b-1\end{cases};\ \begin{cases}\alpha=2a-c-1\\ \beta=b-1\\ 2a+3b-2c=3\end{cases}$$

Or $2a-b=1$ et $a+c=1$. Donc $b=2a-1$ et $c=1-a$.

Alors $3=2a+3b-2c=2a+6a-3-2+2a$; $10a=3+3+2$; $a=\frac{8}{10}$; $a=\frac{4}{5}$.

Donc $b=2\times\frac{4}{5}-1=\frac{3}{5}$ et $c=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$. $A=\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right)$.

Il est aisé de vérifier que si $A=\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right)$, $A\in\mathcal{C}$ et $\nabla f(A)\in\mathcal{K}^\perp$... mais ce n'est pas nécessaire !!

Etape 3.. Etudier si en $A=\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right)$ f admet un extremum sous la contrainte $\mathcal{C}$.

V1 Soit $X=(x,y,z)\in\mathcal{C}$. $y=2x-1$ et $z=1-x$.

Alors $f(x,y,z)=x^2-2x(2x-1)+(2x-1)(1-x)+2x-1-1+x=-5x^2+8x-3$.

$f(X)=-5\left(x^2-\frac{8}{5}x+\frac{3}{5}\right)=-5\left(\left(x-\frac{4}{5}\right)^2-\frac{16}{25}+\frac{3}{5}\right)=-5\left(x-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{1}{5}\leq\frac{1}{5}$.

Or $f(A)=f\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{4}{5}\right)^2-2\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{3}{5}-\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$.

Donc $\forall X\in\mathcal{C}$, $f(X)\leq f(A)$. f admet en $A=\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right)$ un maximum absolu sous la contrainte $\mathcal{C}$.

V2 Soit $H=(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathcal{H}$. $2\alpha-\beta=\alpha+\gamma=0$. $\beta=2\alpha$ et $\gamma=-\alpha$.

$f(A+H)-f(A)=\left(\frac{4}{5}+\alpha\right)^2-2\left(\frac{4}{5}+\alpha\right)\left(\frac{3}{5}+\beta\right)+\left(\frac{3}{5}+\beta\right)\left(\frac{1}{5}+\gamma\right)+\frac{3}{5}+\beta-\frac{1}{5}-\gamma-\frac{1}{5}$.

$f(A+H)-f(A)=\alpha^2+\frac{8}{5}\alpha+\frac{16}{25}-\frac{24}{25}-2\alpha\beta-\frac{6}{5}\alpha-\frac{8}{5}\beta+\frac{3}{25}+\frac{\beta}{5}+\frac{3}{5}\gamma+\beta\gamma+\frac{3}{5}+\beta-\gamma-\frac{2}{5}$.

$f(A+H)-f(A)=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta\gamma+\frac{2}{5}\alpha-\frac{2}{5}\beta-\frac{2}{5}\gamma$. Or $\beta=2\alpha$ et $\gamma=-\alpha$ donc :

$f(A+H)-f(A)=\alpha^2-2\alpha(2\alpha)+2\alpha(-\alpha)+\frac{2}{5}\alpha-\frac{2}{5}(2\alpha)-\frac{2}{5}(-\alpha)$.

$f(A+H)-f(A)=-5\alpha^2\leq 0$.

$\forall H\in\mathcal{H}$, $f(A+H)-f(A)\leq 0$. $\forall H\in\mathcal{H}$, $f(A+H)\leq f(A)$. $\forall X\in\mathcal{C}$, $f(X)\leq f(A)$.

Nous retrouvons ainsi le résultat.

Exercice 1 **D'après Ecricome 2008**

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[^3$ par :

$$\forall (x_1,x_2,x_3) \in]0,+\infty[^3, \quad f(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{4x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{9x_3}.$$

Q1 Justifier que f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[^3$. Calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

Q2 On note : $\nabla^2 f(A) = \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A)\right]_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ la matrice hessienne de f en $A=(a_1,a_2,a_3)$.

Justifier que, pour tout $A \in]0,+\infty[^3$, pour toute matrice colonne H à trois lignes, non nulle, on a :

$$^tH \nabla^2 f(A) H > 0$$

Q3 f admet-elle des extremums sur $]0,+\infty[^3$?

Q4 On cherche désormais les extremums de f sous la contrainte $x_1+x_2+x_3=110$.

Dans l'énoncé original et dans la correction il n'y a pas ces subdivisions.

a) Mettre en place tous les éléments pour traiter ce problème.

b) Montrer que f admet un unique point critique sous cette contrainte : $A=(30,60,20)$

c) Rappeler le théorème du programme concernant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1.

d) Montrer que f admet en A minimum global sous la contrainte proposée.

---

1. f est une fonction rationnelle (ou la restriction à $(]0,+\infty[)^3$ d'une fonction rationnelle...) donc :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } (]0,+\infty[)^3.}$$

Sans difficulté on obtient :

$$\boxed{\forall (x_1,x_2,x_3) \in (]0,+\infty[)^3,\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3) = -\frac{1}{4x_1^2},\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3) = -\frac{1}{x_2^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3) = -\frac{1}{9x_3^2}.}$$

$$\boxed{\forall (x_1,x_2,x_3) \in (]0,+\infty[)^3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2x_1^3},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2,x_3) = \frac{2}{x_2^3} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x_1,x_2,x_3) = \frac{2}{9x_3^3}.}$$

$$\boxed{\forall (x_1,x_2,x_3) \in (]0,+\infty[)^3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1,x_2,x_3) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(x_1,x_2,x_3) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(x_1,x_2,x_3) = 0.}$$

$$\boxed{\forall (x_1,x_2,x_3) \in (]0,+\infty[)^3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2,x_3) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(x_1,x_2,x_3) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(x_1,x_2,x_3) = 0.}$$

2. Ce qui précède donne :

$$\boxed{\forall A=(a_1,a_2,a_3) \in (]0,+\infty[)^3,\ \nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2x_1^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{x_2^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9x_3^3} \end{pmatrix}.}$$

Soit $A=(a_1,a_2,a_3)$ un élément de $(]0,+\infty[)^3$ et soit $H=\begin{pmatrix} h_1\\ h_2\\ h_3\end{pmatrix}$ un élément non nul de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Un calcul simple donne : ${}^tH\nabla^2 f(A)H=\dfrac{h_1^2}{2a_1^3}+\dfrac{h_2^2}{a_2^3}+\dfrac{2\,h_3^2}{9a_3^3}$. Alors ${}^tH\nabla^2 f(A)H\geqslant 0$ car $\dfrac{h_1^2}{2a_1^3}$, $\dfrac{h_2^2}{a_2^3}$ et $\dfrac{2\,h_3^2}{9a_3^3}$ sont positifs.

Mieux, comme H n'est pas nulle, l'un de ces trois réels est strictement positif et ainsi ${}^tH\nabla^2 f(A)H>0$.

$$\boxed{\forall A\in(]0,+\infty[)^3,\ \forall H\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})-\{0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\},\ {}^tH\nabla^2 f(A)H>0.}$$

Remarque : on pouvait aussi remarquer que les valeurs propres de $\nabla^2 f(A)$ sont strictement positives...

De toute évidence on a aussi :

$$\boxed{\forall X\in(]0,+\infty[)^3,\ \forall H\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ {}^tH\nabla^2 f(X)H\geqslant 0,\text{ non ?}}$$

3. $(]0,+\infty[)^3$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ comme produit de trois ouverts de $\mathbb{R}$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(]0,+\infty[)^3$.

Ainsi si f admet en un point $A=(a_1,a_2,a_3)$ de $(]0,+\infty[)^3$ un extremum, alors le gradient de f en A s'annule donc $\left(-\dfrac{1}{4a_1^2},-\dfrac{1}{a_2^2},-\dfrac{1}{9a_3^2}\right)=0_{\mathbb{R}^3}$. C'est hautement improbable !

$$\boxed{f\text{ n'a pas d'extremum sur }(]0,+\infty[)^3.}$$

4. Posons $\mathcal{C}=\{X=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\mid x_1+x_2+x_3=110\}$ et $\forall X=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,\ h(X)=x_1+x_2+x_3$.

Notons que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et que : $\forall X\in\mathbb{R}^3,\ \nabla h(X)=(1,1,1)$.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $(]0,+\infty[)^3$ et h est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.

Le cours indique alors que si f admet en un point A un extremum sous la contrainte $\mathcal{C}$ alors $\nabla f(A)$ appartient à l'orthogonal de $\operatorname{Ker} h$.

Rappelons que $(\operatorname{Ker} h)^\perp$ est encore $\operatorname{Vect}(\nabla h(X))$ où X est un élément quelconque de $\mathbb{R}^3$.

Donc $(\operatorname{Ker} h)^\perp=\operatorname{Vect}\big((1,1,1)\big)$.

Cherchons alors les points A de $\mathcal{C}\cap(]0,+\infty[)^3$ tels que $\nabla f(A)$ appartienne à $\operatorname{Vect}\big((1,1,1)\big)$, c'est à dire les points critiques de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

• Soit $A=(a_1,a_2,a_3)$ un point critique de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

$A\in(]0,+\infty[)^3$, $a_1+a_2+a_3=110$ et $\nabla f(A)\in\operatorname{Vect}((1,1,1))$.

$\nabla f(A)=\left(-\dfrac{1}{4a_1^2},-\dfrac{1}{a_2^2},-\dfrac{1}{9a_3^2}\right)\in\operatorname{Vect}((1,1,1))$. Donc $-\dfrac{1}{4a_1^2}=-\dfrac{1}{a_2^2}=-\dfrac{1}{9a_3^2}$.

Ceci donne $4a_1^2=a_2^2=9a_3^2$ puis $2a_1=a_2=3a_3$ car a_1, a_2 et a_3 sont positifs.

Alors $110=a_1+a_2+a_3=a_1+2a_1+\dfrac{2}{3}a_1=\dfrac{11}{3}\,a_1$. Ainsi $a_1=30$, $a_2=60$ et $a_3=20$. Finalement $A=(30,60,20)$.

• Réciproquement posons $A=(30,60,20)$. A appartient à $(]0,+\infty[)^3$. $30+60+20=110$ donc A appartient à $\mathcal{C}$.

De plus $\nabla f(A)=\left(-\dfrac{1}{4\times 30^2},-\dfrac{1}{60^2},-\dfrac{1}{9\times 20^2}\right)=\left(-\dfrac{1}{3600},-\dfrac{1}{3600},-\dfrac{1}{3600}\right)\in\operatorname{Vect}((1,1,1))=(\operatorname{Ker} h)^\perp$.

Donc $A=(30,60,20)$ est un point critique de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

$$\boxed{A=(30,60,20)\text{ est l'unique point critique de }f\text{ sous la contrainte }\mathcal{C}.}$$

Soit X un élément de $(]0,+\infty[)^3 \cap \mathcal{C}$. Montrons que $f(X) \geqslant f(A)$. Posons $H = X - A$. $X = H + A$.

Attention ici H est un élément de $\mathbb{R}^3$.

Commençons par montrer que $[A, A+H] = [A, X]$ est dans $(]0,+\infty[)^3$.

Soit Y un élément de $[A, X]$. Il existe un réel λ appartenant à $[0,1]$ tel que $Y = \lambda\, A + (1-\lambda)\, X$.

Les composantes de A et X sont strictement positives et les réels λ et $1-\lambda$ sont positifs ou nuls sans être simultanément nuls. Alors les composantes de Y sont strictement positives. Y est donc un élément de $(]0,+\infty[)^3$.

$[A, A+H]$ est contenu dans $(]0,+\infty[)^3$ et f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(]0,+\infty[)^3$.

Notons q_A la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ associée à la matrice symétrique $\nabla^2 f(A)$.

La formule de Taylor appliquée à f à l'ordre 1 montre qu'il existe un élément θ de $]0,1[$ tel que :

$f(A+H) = f(A) + < \nabla f(A), H > + \dfrac{1}{2}\, q_{A+\theta\, H}(H)$.

A et X sont dans $\mathcal{C}$ donc $h(H) = h(X) - h(A) = 110 - 110 = 0$. Alors H appartient à $\operatorname{Ker} h$. Or $\nabla f(A) \in (\operatorname{Ker} h)^{\perp}$.

Alors $< \nabla f(A), H >= 0$ et ainsi $f(X) = f(A+H) = f(A) + \dfrac{1}{2}\, q_{A+\theta\, H}(H)$.

En posant $H = (h_1, h_2, h_3)$ on a $f(X) - f(A) = \dfrac{1}{2}\, q_{A+\theta\, H}(H) = \dfrac{1}{2}\,(h_1\, h_2\, h_3)\nabla^2 f(A+\theta\, H) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$.

En utilisant 2. on obtient alors $f(X) - f(A) = \dfrac{1}{2}\,(h_1\, h_2\, h_3)\nabla^2 f(A+\theta\, H) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \geqslant 0$.

Ainsi $\forall X \in (]0,+\infty[)^3 \cap \mathcal{C},\ f(X) \geqslant f(A)$.

$$\boxed{f \text{ admet en } A = (30, 60, 20) \text{ un minimum global sous la contrainte } \mathcal{C} \text{ qui vaut } \dfrac{11}{360}.}$$
