FONCTIONS NUMÉRIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES

P mentionne des résultats particulièrement utiles dans la pratique des fonctions numériques de plusieurs variables, souvent oubliés...

★ mentionne des erreurs à ne pas faire où des hypothèses importantes ou des mises en garde.

SD mentionne des résultats qu'il serait bon de savoir démontrer.

! Notions ou résultats qui ne semblent pas toujours très importants mais qui figurent explicitement dans le programme donc qui sont exigibles.

Nous écrirons très souvent O à la place de $0_{\mathbb{R}^n}$

Première approche.

0 AVERTISSEMENTS

1. Le seul but de ce chapitre est de proposer un minimum d'outils mathématiques pour déterminer les extremums de fonctions numériques de plusieurs variables simples.

2. Le plus souvent nous noterons par des lettres majuscules les éléments de $\mathbb{R}^n$.

3. Une convention : si X est un élément de $\mathbb{R}^n$, il est sous-entendu que $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$... sauf mention du contraire.

4. Dans ce résumé la norme utilisée sur $\mathbb{R}^n$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Nous la noterons $\|.\|$.

Notons que le programme des concours 2004 est sensiblement différent du précédent. En particulier la norme utilisée dans $\mathbb{R}^n$ est imposée c'est la norme associée au produit scalaire canonique.

I LES OUTILS DE BASE

▶ 1. Rappels sur la norme de $\mathbb{R}^n$ associée au produit scalaire canonique

Th. 1 • $\forall X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \|X\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$.

• $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$! Ainsi :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \|X\| = 0 \Rightarrow X = 0.$$

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda\, X\| = |\lambda|\, \|X\|.$$

$$\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \|X + Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|.$$

Si $n = 1$, $\|.\|$ coïncide avec la valeur absolue de $\mathbb{R}$.

Th. 2 **PP** Si $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un élément de $\mathbb{R}^n$, $\boxed{\underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Max}} |x_k| \leqslant \|X\| \leqslant \sqrt{n}\ \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Max}} |x_k|}$.

Prop. 1 Si X et Y sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$:

$\boxed{\big|\|X\| - \|Y\|\big| \leqslant \|X + Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|}$ et $\boxed{\big|\|X\| - \|Y\|\big| \leqslant \|X - Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|}$.

Th. 3 et **déf. 1** On considère l'application d, de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$, définie par :

$$\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ d(X,Y) = \|X-Y\| = \|Y-X\|.$$

D1 $\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ d(X,Y) = 0 \iff X = Y.$

D2 $\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ d(Y,X) = d(X,Y).$

D3 $\forall (X,Y,Z) \in (\mathbb{R}^n)^3,\ d(X,Y) \leqslant d(X,Z) + d(Z,Y).$

d est une **distance** sur $\mathbb{R}^n$. C'est **la distance associée** à la norme $\|.\|$. On parlera de **distance euclidienne**.

On a encore : $\forall (X,Y,Z) \in (\mathbb{R}^n)^3,\ |d(X,Z) - d(Z,Y)| \leqslant d(X,Y).$

Prop. 2 Soient $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$. $\boxed{d(X,Y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(y_k - x_k\right)^2}}$.

▶ 2. Quelques éléments de topologie

Déf. 2 A est un élément de $\mathbb{R}^n$ et r un réel strictement positif.

On appelle **boule ouverte de centre A et de rayon r**, l'ensemble des éléments X de $\mathbb{R}^n$ tels que : $d(X,A) = \|X-A\| < r$; nous la noterons $B(A,r)$.

On appelle **boule fermée de centre A et de rayon r**, l'ensemble des éléments X de $\mathbb{R}^n$ tels que : $d(X,A) = \|X-A\| \leqslant r$; nous la noterons $B_f(A,r)$ (★).

$\boxed{B(A,r) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X-A\| < r\}}$ $\boxed{B_f(A,r) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X-A\| \leqslant r\}}$

$\boxed{B(A,r) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid d(X,A) < r\}}$ $\boxed{B_f(A,r) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid d(X,A) \leqslant r\}}$

★ Attention il y a autant de notations pour la boule fermée de centre A et de rayon r que d'auteurs... On rencontre $\overline{B}(A,r)$, $B'(A,r)$, $D(A,r)$ ...

Prop. 3 $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est un élément de $\mathbb{R}^n$ et r est un réel strictement positif.

$$\boxed{B(A,r) = \left\{X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(x_k - a_k\right)^2} < r\right\}}.$$

$$\boxed{B_f(A,r) = \left\{X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(x_k - a_k\right)^2} \leqslant r\right\}}.$$

Prop. 4 a, b et c sont trois réels. r est un réel strictement positif.

Dans $\mathbb{R}$, la boule ouverte de centre a et de rayon r est l'intervalle $]a-r, a+r[$.

Si $b < c$, l'intervalle $]b,c[$ est la boule ouverte de centre $\dfrac{b+c}{2}$ et de rayon $\dfrac{c-b}{2}$.

Prop. 5 **P** **SD** Soit A un élément de $\mathbb{R}^n$ et r un réel strictement positif

$$B(A,r) \subset \prod_{k=1}^{n} \left]a_k - r, a_k + r\right[\subset B(A, \sqrt{n}\, r).$$

Déf. 3 On appelle **ouvert** de $\mathbb{R}^n$ toute partie Ω de $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout point A de Ω il existe une boule ouverte de centre A contenue dans Ω
On appelle **fermé** de $\mathbb{R}^n$ toute partie de $\mathbb{R}^n$ dont le complémentaire est ouvert.

Soit Ω une partie de $\mathbb{R}^n$. $\boxed{\Omega \text{ ouvert} \Longleftrightarrow \forall A \in \Omega,\ \exists r \in \mathbb{R}^{+*},\ B(A,r) \subset \Omega}$.

Th. 4
1. Toute boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert.
2. Toute boule fermée de $\mathbb{R}^n$ est un fermé.

Prop. 6
1. $\mathbb{R}^n$ et $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés.
2. Si A est un élément de $\mathbb{R}^n$, $\{A\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n - \{A\}$ en est un ouvert.

Th. 5
1. Toute réunion d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert.
2. Toute intersection **finie** (★) d'ouverts est un ouvert.
3. Toute réunion **finie** (★) de fermés est un fermé.
4. Toute intersection de fermés est un fermé.

Th. 6
1. Soit a et b deux réels. $]a,b[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,b[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

$[a,b]$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,b]$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.

2. Si Ω_1, Ω_2,..., Ω_n sont n ouverts de $\mathbb{R}$, $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
3. Si F_1, F_2,..., F_n sont n fermés de $\mathbb{R}$, $F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.
4. Soit $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$ et r un réel strictement positif. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}]a_k - r, a_k + r[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Th. 7 **PP** Une partie Ω de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert si et seulement si pour tout point $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de Ω il existe un réel strictement positif r tel que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}]a_k - r, a_k + r[\subset \Omega$.

Prop. 7 **SD** Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

▶ 3. Droites affines de $\mathbb{R}^n$

Déf. 4 A et U sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$. On suppose que U n'est pas nul.

La droite affine de $\mathbb{R}^n$ passant par A et de vecteur directeur U est l'ensemble des éléments X de $\mathbb{R}^n$ tel qu'il existe un réel t vérifiant : $X - A = t\,U$ ou $X = A + t\,U$.

Nous la noterons $d_{A,U}$. $\boxed{d_{A,U} = \{A + t\,U ; t \in \mathbb{R}\}}$.

★ Si U est un élément non nul de $\mathbb{R}^n$ la droite affine passant par $0_{\mathbb{R}^n}$ et de vecteur directeur U est la droite vectorielle engendrée par U.

★ Les droites affines de $\mathbb{R}^n$ sont les translatées des droites vectorielles de $\mathbb{R}^n$.

Prop. 8 A et U sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$. U n'est pas nul.
1. $d_{A,U}$ est l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^n$ somme de A et d'un élément de $\mathrm{Vect}(U)$. $d_{A,U} = A + \mathrm{Vect}(U)$.
2. $t \to A + t\,U$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $d_{A,U}$; on parle de **pamétrage** de la droite $d_{A,U}$.
3. $d_{A,U}$ est un fermé.

▶ 4. Sous espaces affines. Hyperplans affines de $\mathbb{R}^n$.

Déf. 5 On appelle **sous-espace affine** de $\mathbb{R}^n$ tout translaté d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Ainsi une partie F de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ s'il existe un point A de $\mathbb{R}^n$ et un sous-espace vectoriel F_0 de $\mathbb{R}^n$ tels que : $F = \{A+U; U \in F_0\}$ (nous écrirons souvent, de manière abusive, $F = A+F_0$).

Remarque Soit F un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$. $F = A+F_0$ ou A est un point de $\mathbb{R}^n$ et F_0 un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Notons que : $\forall B \in F,\ F = B + F_0$ et que $F_0 = \{X - Y; (X,Y) \in F_0^2\}$.

Ainsi dans l'égalité $F = A + F_0$, A n'est pas unique mais F_0 l'est. F_0 est appelé **la direction de F**. On appelle encore **dimension** F celle de F_0. Notons que les droites affines sont les sous-espaces affines de dimension 1.

Déf. 6 On appelle **hyperplan affine** de $\mathbb{R}^n$ tout sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-1$.

Si $n = 2$ on parle de plan affine. Pour $n = 1$ les hyperplans affines sont les droites affines.

Th. 8 Soient a_1, a_2, ..., a_n et c $n+1$ réels. On suppose que a_1, a_2, ..., a_n ne sont pas simultanément nuls.

$\{X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n + c = 0\}$ est un hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$, de direction l'hyperplan vectoriel d'équation $a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n = 0$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Th. 9 Réciproquement si F est un hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$, il existe $n+1$ réels a_1, a_2, ..., a_n, c tels que :

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq 0_{\mathbb{R}^n} \text{ et } F = \{X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n + c = 0\}.$$

$a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n + c = 0$ est une équation de F dans $\mathbb{R}^n$ rapporté au repère constitué par $0_{\mathbb{R}^n}$ et la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

▶ 5. Segments et convexes de $\mathbb{R}^n$

Déf. 7 A et B sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$. **Le segment d'extrémités A et B** est l'ensemble des éléments X de $\mathbb{R}^n$ tel qu'il existe un réel t appartenant à $[0,1]$ et vérifiant : $X - A = t\,(B - A)$ ou $X = (1-t)\,A + t\,B$.

Nous le noterons $[A,B]$. $\boxed{[A,B] = \{(1-t)\,A + t\,B; t \in [0,1]\}}$.

Prop. 9 A et B sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$.

1. $\boxed{[A,B] = \{(1-t)\,A + t\,B; t \in [0,1]\}}$ et $\boxed{[A,B] = \{t\,A + (1-t)\,B; t \in [0,1]\}}$.
2. $t \to (1-t)\,A + t\,B$ et $t \to t\,A + (1-t)\,B$ sont des bijections de $[0,1]$ sur $[A,B]$.
3. $[A,B]$ est un fermé.

Déf. 8 Une partie $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ est **convexe** si pour tout couple (A,B) d'éléments de $\mathcal{C}$ le segment $[A,B]$ est contenu dans $\mathcal{C}$.

Th. 10 Soit $\mathcal{C}$ une partie de $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{C}$ est convexe si et seulement si $\forall \lambda \in [0,1],\ \forall (A,B) \in \mathcal{C}^2,\ \lambda\, A + (1-\lambda)\, B \in \mathcal{C}$.

Th. 11 **P** Les boules (ouverts ou fermées) de $\mathbb{R}^n$ sont des convexes de $\mathbb{R}^n$.

Th. 12 $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$, les segments de $\mathbb{R}^n$, les droites vectorielles et affines de $\mathbb{R}^n$, les sous-espaces vectoriels (et affines) de $\mathbb{R}^n$ sont des convexes de $\mathbb{R}^n$.

Th. 13 Toute intersection de convexes de $\mathbb{R}^n$ est un convexe de $\mathbb{R}^n$.

Th. 14 **SD** a_1, a_2, ..., a_n et c sont $n+1$ réels. Les ensembles suivants sont des convexes de $\mathbb{R}^n$.

$\{X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid a_1\,x_1+a_2\,x_2+\cdots+a_n\,x_n+c=0\}$;

$\{X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid a_1\,x_1+a_2\,x_2+\cdots+a_n\,x_n+c\leqslant 0\}$;

$\{X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid a_1\,x_1+a_2\,x_2+\cdots+a_n\,x_n+c\geqslant 0\}$;

$\{X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid a_1\,x_1+a_2\,x_2+\cdots+a_n\,x_n+c< 0\}$;

$\{X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid a_1\,x_1+a_2\,x_2+\cdots+a_n\,x_n+c> 0\}$.

▶ 6. Parties bornées de $\mathbb{R}^n$

Déf. 9 Une partie D de $\mathbb{R}^n$ est **bornée** s'il existe un réel M tel que $\forall X\in D,\ \|X\|\leqslant M$.

Prop. 10 Toute boule de $\mathbb{R}^n$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.

Toute partie d'une partie bornée de $\mathbb{R}^n$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.

▶ 7. Des fonctions usuelles

Déf. 10 NOUS appelerons **fonction mônome de n variables** toute application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, telle qu'il existe un réel a et un n-uplet $(q_1,q_2,\dots,q_n)$ d'éléments de $\mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall X=(x_1,x_2,\dots,x_n),\ \in\mathbb{R}^n,\ f(X)=a\,x_1^{q_1}\,x_2^{q_2}\dots x_n^{q_n}.$$

Remarque Si f est une fonction mônome de n variable qui n'est pas la fonction nulle :

$\exists!\,a\in\mathbb{R}^*,\ \exists!\,(q_1,q_2,\dots,q_n)\in\mathbb{R}^n,\ \forall X=(x_1,x_2,\dots,x_n),\ \in\mathbb{R}^n,\ f(X)=a\,x_1^{q_1}\,x_2^{q_2}\dots x_n^{q_n}.$

$q_1+q_2+\cdots+q_n$ est le degré de f.

Déf. 11 1. NOUS appelerons **fonction polynôme de n variables** toute somme de fonctions mônomes de n variables.

2. NOUS appelerons **fonction rationnelle de n variables** toute quotient de deux fonctions polynomes de n variables.

Remarque f est une fonction polynôme de n variables qui n'est pas la fonction nulle. Très grossièrement NOUS appellerons **degré de f** le maximum des degrés des fonctions mônomes non nulles qui constituent f (après regroupements et simplifications...). Si f est la fonction polynôme nulle, le degré de f est par convention $-\infty$.

Déf. 12 NOUS appelerons **fonction affine de n variables** toute application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, telle qu'il existe un $(n+1)$-uplet $(a_0,a_1,\dots,a_n)$ de réels vérifiant :

$$\forall X=(x_1,x_2,\dots,x_n),\ \in\mathbb{R}^n,\ f(X)=a_0+a_1\,x_1+a_2\,x_2+\cdots+a_n\,x_n.$$

Une fonction affine de n variables est en fait une fonction polynôme de n variables de degré au plus 1.

▶ 8. Graphe, ensembles de niveau d'une fonction numérique de plusieurs variables

Déf. 13 f est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ dont le domaine de définition est D.

Le graphe de f est :

$$\{(x_1,x_2,\dots,x_n,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1,x_2,\dots,x_n)\in D \text{ et } f(x_1,x_2,\dots,x_n)=x_{n+1}\}.$$

Le graphe de f est une partie de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Déf. 14 f est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ dont le domaine de définition est D. λ est un réel.

On appelle **ensemble de niveau** λ **de f** l'ensemble $\{X \in D \mid f(X) = \lambda\}$.

Un tel ensemble de niveau est une partie du domaine de définition D de f.

Si $n = 2$ on parle de ligne de niveau.

Prop. 11 • Les ensembles de niveaux d'une fonction affine non constante de $\mathbb{R}^n$ sont des hyperplans affines de $\mathbb{R}^n$.

▶ 9. Compléments

Déf. 15 La **sphère de centre A et de rayon r** est l'ensemble des éléments X de $\mathbb{R}^n$ tels que $\|X - A\| = r$. Nous la noterons $S(A, r)$.

Prop. 12 Si A est un élément de $\mathbb{R}^n$ et r un réel strictement positif, la **sphère** $S(A, r) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X - A\| = r\}$ est un fermé.

Th. 15 $\boxed{\text{D}}$ **Une caractérisation séquentielle des fermés**.

Soit F une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. F est un fermé de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si toute suite de F qui converge a sa limite dans F.

II LIMITE ET CONTINUITÉ

Pour rester dans l'esprit du programme nous privilégierons la notion de continuité par rapport à la notion de limite.

▸ 1. Définition

Déf. 16 Soit D une partie de $\mathbb{R}^n$. Un point A de $\mathbb{R}^n$ est **adhérent** à D si toute boule ouverte de centre A rencontre D ; autrement dit si, pour tout élément r de $\mathbb{R}^{+*}$, $B(A,r) \cap D$ n'est pas vide.

Remarque D est une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. De manière très intuitive, A est adhérent à D si l'on peut s'approcher aussi près de A que l'on veut avec des points de D. Il est indispensable que A soit adhérent à D si l'on veut parler de limite en A d'une application de D dans $\mathbb{R}$.

Déf. 17 D est une partie non vide de $\mathbb{R}^n$, f est une application de D dans $\mathbb{R}$ et A est un point adhérent à D.

f admet une **limite finie** en A s'il existe un réel ℓ vérifiant :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall X \in D,\ \|X - A\| < \alpha \Rightarrow |f(X) - \ell| < \varepsilon \quad (1).$$

Th. 16 et **déf. 18** Les hypothèses sont celle de la définition précédentes.

Si f admet une limite finie en A, il existe un unique réel ℓ vérifiant (1). ℓ s'appelle alors **la limite de f en A**. La limite de f en A se note encore $\lim\limits_{X \to A} f(X)$ ou $\lim\limits_{A} f$.

Déf. 19 D est une partie (non vide) de $\mathbb{R}^n$, f est une application de D dans $\mathbb{R}$ et A est un point de D.

f est **continue** en A si elle admet pour limite $f(A)$ en A ; autrement dit si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall X \in \mathcal{D}_f,\ \|X - A\| < \alpha \Rightarrow |f(X) - f(A)| < \varepsilon.$$

Remarques f est une application d'une partie non vide D de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et A un point adhérent à D. ℓ est un réel.

1. **PP** $\boxed{\lim\limits_{X \to A} f(X) = \ell \Longleftrightarrow \lim\limits_{H \to O_{\mathbb{R}^n}} f(A+H) = \ell}$.

2. On suppose que f admet une limite finie ℓ en A.

   • Si f est définie en A alors $\ell = f(A)$.

   • Si f n'est pas définie en A. La fonction g définie par $\forall X \in D \cup \{A\},\ g(X) = \begin{cases} f(X) & \text{si } X \in D \\ \ell & \text{si } X = A \end{cases}$ est continue en A ; c'est le **prolongement par continuité** de f en A.

3. On peut définir les notions de $\lim\limits_{X \to A} f(X) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to A} f(X) = -\infty$.

▸ 2. Quelques propriétés

Beaucoup de propriétés vues au niveau des limites et de la continuité des fonctions numériques d'une variable réelle valent encore pour les fonctions numériques de plusieurs variables. Nous ne les rappellerons pas toutes. Nous citerons les plus importantes ou les plus utiles pour la suite.

Th. 17 • $\|.\|$ est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ continue en tout point de $\mathbb{R}^n$.

• i est un élément de $[\![1, n]\!]$. On pose $\forall X = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ p_i(X) = x_i$.

p_i est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ continue en tout point de $\mathbb{R}^n$.

Th. 18 **Théorème d'encadrement** D est une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ et A un point adhérent à D. f, g et h sont trois applications de D dans $\mathbb{R}$.

On suppose que $\forall X \in D,\ g(X) \leqslant f(X) \leqslant h(X)$ et que g et h ont même limite finie ℓ en A.

Alors f admet pour limite ℓ en A.

Remarque On peut sans changer la conclusion de ce théorème faire des hypothèses moins fortes en supposant, par exemple, que l'encadrement vaut simplement sur l'intersection de D avec une boule de centre A (autrement dit au voisinage de A). On écrira alors : $\exists r \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall X \in D \cap B(A,r),\ g(X) \leqslant f(X) \leqslant h(X)$.

Cor. 1 **PP** D est une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ et A un point adhérent à D. f et g sont deux applications de D dans $\mathbb{R}$ et ℓ est un réel.

On suppose que $\forall X \in D,\ |f(X) - \ell| \leqslant g(X)$ et que $\lim\limits_{X \to A} g(X) = 0$.

Alors f admet pour limite ℓ en A.

Cor. 2 **PP** D est une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ et A un point adhérent à D. f est une application de D dans $\mathbb{R}$ et ℓ est un réel.

On suppose qu'il existe un réel (strictement) positif K tel que : $\forall X \in D,\ |f(X) - \ell| \leqslant K\|X - A\|$.

Alors f admet pour limite ℓ en A.

▸ 3. Les opérations usuelles

Th. 19 D est une partie de $\mathbb{R}^n$ et A un point adhérent à D. f et g deux applications de D dans $\mathbb{R}$ admettant respectivement pour limite finie en A : ℓ et ℓ'.

1. $f+g$, λf $(\lambda \in \mathbb{R})$, fg, $|f|$, $\mathrm{Sup}(f,g)$, $\mathrm{Inf}(f,g)$, f^p $(p \in \mathbb{N})$ admettent une limite finie en A.

$\boxed{\lim\limits_{X \to A} (f+g)(X) = \ell + \ell'}$ $\boxed{\lim\limits_{X \to A} (\lambda f)(X) = \lambda \ell}$ $\boxed{\lim\limits_{X \to A} (fg)(X) = \ell \ell'}$ $\boxed{\lim\limits_{X \to A} |f|(X) = |\ell|}$

$\boxed{\lim\limits_{X \to A} \mathrm{Sup}(f,g)(X) = \mathrm{Sup}(\ell,\ell')}$ $\boxed{\lim\limits_{X \to A} \mathrm{Inf}(f,g)(X) = \mathrm{Inf}(\ell,\ell')}$ $\boxed{\lim\limits_{X \to A} f^p(X) = \ell^p}$.

2. Si $\ell' \neq 0$, $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ admettent pour limite finie en A respectivement $1/\ell'$ et ℓ/ℓ'.

Th. 20 D est une partie non vide de $\mathbb{R}^n$, A un point de D et f et g deux applications de D dans $\mathbb{R}$ continues en A.

1. $f+g$, λf $(\lambda \in \mathbb{R})$, fg, $|f|$, $\mathrm{Sup}(f,g)$, $\mathrm{Inf}(f,g)$, f^n $(n \in \mathbb{N})$ sont continues en A.

2. Si $g(A) \neq 0$, $\dfrac{1}{g}$, $\dfrac{f}{g}$, g^n $(n \in \mathbb{Z})$ sont continues en A.

Cor. D est une partie non vide de $\mathbb{R}^n$, A un point de D et f et g deux applications de D dans $\mathbb{R}$ continues en tout point de D.

1. $f+g$, λf $(\lambda \in \mathbb{R})$, fg, $|f|$, $\mathrm{Sup}(f,g)$, $\mathrm{Inf}(f,g)$, f^n $(n \in \mathbb{N})$ sont continues en tout point de D.

2. Si g ne s'annule pas sur D, $\dfrac{1}{g}$, $\dfrac{f}{g}$, g^n $(n \in \mathbb{Z})$ sont continues en tout point de D.

Th. 21 **1.** $(q_1, q_2, \ldots, q_n) \in \mathbb{N}^n$. $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to x_1^{q_1} x_2^{q_2} \cdots x_n^{q_n}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^n$.

2. Toute fonction polynôme de n variables est continue en tout point de $\mathbb{R}^n$.

3. Toute fonction rationnelle de n variables est continue en tout point de son domaine.

▶ 4. De la composition

Th. 22 **Une première composition.** $\boxed{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$

I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et φ une application de I dans $\mathbb{R}$.

D est une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ et f une application de D dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que $f(D) \subset I$.

1. A est un élément de D. Si f est continue en A et φ est continue en $f(A)$ alors $\varphi \circ f$ est continue en A.

2. Si f est continue sur D et φ continue sur I, alors $\varphi \circ f$ est continue sur D.

3. On suppose que A est un élément de $\mathbb{R}^n$ adhérent à D et que ℓ est un réel adhérent à I.

Si f admet pour limite ℓ en A et si φ admet pour limite ℓ' en ℓ alors $\varphi \circ f$ admet pour limite ℓ' en A.

$$\boxed{\lim_{X \to A} f(X) = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{t \to \ell} \varphi(t) = \ell' \quad \text{donnent} \quad \lim_{X \to A} (\varphi \circ f)(X) = \ell'}$$

Cor. D est une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ et f une application continue de D dans $\mathbb{R}$.

1. $|f|$ est continue sur D.

2. Si f est positive sur D, $\sqrt{f}$ est continue sur D.

3. Si f est strictement positive sur D, f^α est continue sur D pour tout réel α.

Th. 23 **Une seconde composition.** $\boxed{\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}}$

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et u_1, u_2,..., u_n sont n applications de I dans $\mathbb{R}$.

D est une partie de $\mathbb{R}^n$ et f une application de D dans $\mathbb{R}$.

On suppose de plus, que pour tout élément t de I, $(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)) \in D$.

1. b est un élément de I et $A = (u_1(b), u_2(b), \dots, u_n(b))$.

Si pour tout élément k de $[\![1, n]\!]$, u_k est continue en b et si f est continue en A

alors $t \to f\big(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)\big)$ est continue en b.

2. Si u_1, u_2, ..., u_n sont continues sur I et f est continue sur D, $t \to f\big(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)\big)$ est continue sur I.

3. b est un réel adhérent à I et $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ est adhérent à D.

Si pour tout élément k de $[\![1, n]\!]$, u_k admet pour limite a_k en b et si f admet pour limite ℓ en A alors $t \to f\big(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)\big)$ admet pour limite ℓ en b.

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!],\ \lim_{t \to b} u_k(t) = a_k \quad \text{et} \quad \lim_{X \to A} f(X) = \ell \quad \text{donnent} \quad \lim_{t \to b} f\big(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)\big) = \ell}$$

Remarques 1. Le tout est à savoir en l'état et à bien comprendre.

2. $\boxed{\text{P}}$ Ce résultat peut être utile pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point.

3. Cet énoncé est assez lourd car le programme ne nous permet pas de parler sérieusement des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$. Notons cependant que n fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ permettent de définir une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ (voir plus haut !) et que réciproquement une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ peut se définir à l'aide de n fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ses composantes dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$...).

▶ 5. Un générateur d'ouverts et de fermés

Th. 24 $\boxed{\textbf{PP}}$ $\boxed{\textbf{SD}}$ **Image réciproque d'un ouvert (resp. fermé) par une application continue.**

Soit f une application $\boxed{\text{continue}}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ ou d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

L'image réciproque par f d'un ouvert de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

L'image réciproque par f d'un fermé de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Cor. 1 Soit f une application $\boxed{\text{continue}}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ ou d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. c est un reél.

$\{X \in \Omega \mid f(X) > c\}$ et $\{X \in \Omega \mid f(X) < c\}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$.

$\{X \in \Omega \mid f(X) \geqslant c\}$, $\{X \in \Omega \mid f(X) \leqslant c\}$ et $\{X \in \Omega \mid f(X) = c\}$ sont des fermés de $\mathbb{R}^n$.

Cor. 2 a_1, a_2, ..., a_n et c sont $n+1$ réels.

a) $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n < c\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

b) $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n > c\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

c) $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n \leqslant c\}$, est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

d) $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n \geqslant c\}$, est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

e) $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n = c\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

▶ 6. Continuité SUR

Déf. 20 Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}^n$, f une application de D dans $\mathbb{R}$ et D' une partie de D.

f est **continue SUR** D' si la restriction de f à D' est continue en tout point de D'.

★★ f peut être continue sur D' sans être continue en tout point de D'. Notons cependant que :

Th. 25 Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}^n$, f une application de D dans $\mathbb{R}$ et Ω un $\boxed{\text{ouvert}}$ de D.

f est continue sur Ω si et seulement si f est continue en tout point de Ω.

▶ 7. Compléments

Th. 26 **La version forte de la seconde composition** $\boxed{\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}}$

Δ est une partie de $\mathbb{R}^p$ et u_1, u_2,..., u_n sont n applications de Δ dans $\mathbb{R}$.

D est une partie de $\mathbb{R}^n$ et f une application de D dans $\mathbb{R}$.

On suppose de plus, que pour tout élément T de Δ, $(u_1(T), u_2(T), \dots, u_n(T)) \in D$.

1. B est un élément de Δ et $A = (u_1(B), u_2(B), \dots, u_n(B))$.

Si pour tout élément k de $[\![1, n]\!]$, u_k est continue en B et si f est continue en A alors $T \to f\big(u_1(T), u_2(T), \dots, u_n(T)\big)$ est continue en B.

2. Si u_1, u_2, ..., u_n sont continues sur Δ et f est continue sur D, $T \to f\big(u_1(T), u_2(T), \dots, u_n(T)\big)$ est continue sur Δ.

3. B est un élément de $\mathbb{R}^p$ adhérent à Δ et $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ est un élément de $\mathbb{R}^n$ adhérent à D.

Si pour tout élément k de $[\![1, n]\!]$, u_k admet pour limite a_k en B et si f admet pour limite ℓ en A alors $T \to f\big(u_1(T), u_2(T), \dots, u_n(T)\big)$ admet pour limite ℓ en B.

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!],\ \lim_{T \to B} u_k(T) = a_k \quad \text{et} \quad \lim_{X \to A} f(X) = \ell \quad \text{donnent} \quad \lim_{T \to B} f\big(u_1(T), u_2(T), \dots, u_n(T)\big) = \ell}$$