CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

École des Hautes Études Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1990

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

Mercredi 9 mai 1990, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques **sans formulaire,** calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long × 15 cm de large, à raison d'une seule calculatrice par candidat.

L'objet du problème est l'étude de l'interpolation d'une fonction par des fonctions trigonométriques.

Dans la première partie, on étudie une fonction numérique utilisée par la suite.

La deuxième partie (indépendante de la précédente) est destinée à établir des propriétés d'une matrice qui permet d'obtenir les fonctions d'interpolation.

Enfin, dans la troisième partie, on teste la convergence du procédé d'interpolation dans le cas particulier de la fonction constante et égale 1.

PARTIE I

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par les relations :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{\cos x}{\sin x} & \text{si } x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.

3. Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Étudier la variation de f et construire la courbe représentative de cette fonction.

PARTIE II

Soit $A_n = (a_{ij})$ la matrice carrée d'ordre n, où $n \geq 2$; dont l'élément à l'intersection de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne est défini par :

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{si} \quad |i-j| = 1 \\ a_{ij} = 0 & \text{si} \quad |i-j| \neq 1 \end{cases}$$

Ainsi :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans cette partie, on se propose d'abord de diagonaliser la matrice A_n, puis d'étudier une matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de A_n.

On identifie les matrices colonnes :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

avec les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique.

En particulier, on identifie les matrices à une ligne et une colonne aux nombres réels. Par exemple, on écrira :

$$^tX\,Y = {}^tY\,X = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

pour $$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

où ^tX et ^tY désignent les matrices transposées de X et de Y.

1. Pour tout élément X de $\mathbb{R}^n$, on pose :

$$q_n(X) = {}^tX\,A_n\,X.$$

Calculer $A_n\,X$ et vérifier que :

$$q_n(X) = 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i\, x_{i+1}.$$

2. *Étude du cas particulier $n = 2$*

a) Montrer que, pour tout élément X de $\mathbb{R}^2$:

$$-{}^tX\,X \leq q_2(X) \leq {}^tX\,X.$$

b) Déterminer les valeurs propres et une base de vecteurs propres de A_2.

c) Trouver les éléments X de $\mathbb{R}^2$ tels que $|q_2(X)| = {}^tX\,X$.

3. *Encadrement des valeurs propres de A_n*

a) Montrer que, pour tout élément X de $\mathbb{R}^n$:

$$-\sum_{i=1}^{n-1}(x_i^2+x_{i+1}^2) \leq q_n(X) \leq \sum_{i=1}^{n-1}(x_i^2+x_{i+1}^2).$$

b) En déduire que, pour tout élément X de $\mathbb{R}^n$:

$$-2\,{}^tX\,X \leq q_n(X) \leq 2\,{}^tX\,X$$

et que l'égalité $\cancel{|q_n(X)|} = 2\,{}^tX\,X$ équivaut à $\cancel{X =}\ 0$.

c) Soient λ une valeur propre de A_n et X un vecteur propre associé à λ. Montrer que :

$$q_n(X) = \lambda\,{}^tX\,X.$$

En conclure que :

$$-2 < \lambda < 2.$$

4. *Diagonalisation de la matrice A_n*

Pour tout élément λ de l'intervalle $]-2,\ 2[$, on note E_λ l'ensemble des suites réelles $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout nombre entier naturel k :

$$u_{k+2} = \lambda\, u_{k+1} - u_k.$$

On pose $\lambda = 2\cos t$, où $t \in]0,\ \pi[$.

a) Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un élément de E_λ. Exprimer u_k en fonction de u_0, u_1, k et t.

b) Soit $F_\lambda(n)$ le sous-espace vectoriel de E_λ constitué des éléments $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de E_λ vérifiant la condition supplémentaire :

$$u_0 = u_{n+1} = 0.$$

montrer que $F_\lambda(n)$ est un sous-espace de E_λ de dimension au plus 1.

Déterminer, en discutant selon les valeurs de t, les éléments de $F_\lambda(n)$.

Plus précisément, montrer que :

Si $(n+1)t \equiv 0\ [\pi]$: $F_\lambda(n) = \mathrm{Vect}\left((\sin kt)_{k\geq 0}\right)$

Si $(n+1)t \not\equiv 0\ [\pi]$: $F_\lambda(n) = \{0_{E_\lambda}\}$.

c) Soit λ un nombre réel. Montrer que λ est une valeur propre de A_n et que le vecteur non nul $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à λ si et seulement si la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par les conditions $u_0 = 0$, $u_k = x_k$ pour $1 \leq k \leq n$, $u_{n+1} = 0$ et $u_{n+k+2} = \lambda\, u_{n+k+1} - u_{n+k}$ pour tout entier k, appartient à $F_\lambda(n)$.

On est prié de faire un peu plus propre que l'énoncé.

d) En conclure que les valeurs propres de A_n sont les nombres réels $\lambda_p = 2\cos\theta_p$, où $\theta_p = \dfrac{p\,\pi}{n+1}$ et p entier tel que $1 \leq p \leq n$. Montrer que les vecteurs :

$$X_p = \begin{pmatrix} \sin\theta_p \\ \sin 2\theta_p \\ \vdots \\ \sin n\theta_p \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

5. *Application*

On applique les résultats précédents à l'étude de la matrice M_n dont les colonnes sont les vecteurs X_p.

a) Soient λ et μ des valeurs propres distinctes de A_n, X et Y des vecteurs propres associés respectivement à λ et à μ. Vérifier que :

$$\lambda\, {}^tX\, Y = \mu\, {}^tX\, Y.$$

En déduire que, pour tout couple $(p,\ q)$ de nombres entiers naturels distincts compris entre 1 et n :

$$\sum_{k=1}^{n}(\sin k\,\theta_p)(\sin k\,\theta_q) = 0.$$

b) On considère le nombre complexe $z = e^{2i\theta_p}$. Vérifier que :

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = 0.$$

En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{n} \cos 2\,k\,\theta_p = -1.$$

Montrer enfin que :

$${}^tX_p\, X_p = \frac{n+1}{2}.$$

c) Soit $M_n = (b_{kl})$ la matrice carrée d'ordre n telle que :

$$b_{kl} = \sin\frac{kl\,\pi}{n+1} = \sin k\,\theta_l = \sin l\,\theta_k.$$

En utilisant les résultats précédents, montrer que $M_n^2 = \alpha_n\, I_n$, où I_n est la matrice unité d'ordre n et α_n un nombre réel que l'on précisera. En déduire que la matrice M_n est inversible et déterminer son inverse.

PARTIE III

1. À tout élément $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$ on associe la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$g(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kt.$$

a) On rappelle que, pour tout couple $(a,\ b)$ de nombres réels :

$$2\sin a\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b).$$

Pour tout couple $(k,\ l)$ de nombres entiers naturels, calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} \sin kt\,\sin lt\ dt.$$

b) En déduire que :

$$\int_0^{\pi} g^2(t)\ dt = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

c) Calculer $M_n\, A$. Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \le k \le n$:

$$a_k = \frac{2}{n+1}\sum_{p=1}^{n} g(\theta_p)\,\sin k\,\theta_p.$$

d) Soit $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un élément $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$ et un seul tel que, pour tout entier p avec $1 \leq p \leq n$:

$$g(\theta_p) = b_p.$$

L'objet des questions suivantes est d'étudier l'unique fonction g_n telle que, pour tout entier p compris entre 1 et n :

$$g_n(\theta_p) = 1.$$

On écrira :

$$g_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(n) \sin kt.$$

2. *Étude des coefficients $a_k(n)$*

a) Montrer $a_k(n) = 0$ si l'entier k est pair, et que :

$$a_k(n) = \frac{2}{n+1} \frac{\cos \dfrac{k\pi}{2(n+1)}}{\sin \dfrac{k\pi}{2(n+1)}}$$

si k est impair. (On pourra s'inspirer de la méthode employée dans la question II 5 b).)

b) Grâce aux résultats de la première partie, en déduire que, pour tout entier impair k tel que $0 \leq k \leq n$:

$$0 \leq \frac{4}{k\pi} - a_k(n) \leq \frac{4}{(n+1)\pi}.$$

c) Soit k un nombre entier naturel (pair ou impair). Déterminer :

$$\beta_k = \lim_{n \to +\infty} a_k(n).$$

3. Pour tout nombre réel t, on pose :

$$h_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \sin kt.$$

a) En utilisant les résultats des questions 1 b) et 2 b), montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^\pi [g_n(t) - h_n(t)]^2 \, dt = 0.$$

b) On admet que :

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Prouver que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^\pi [1 - h_n(t)]^2 \, dt = 0.$$

c) En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de l'intégrale :

$$J_n = \int_0^\pi [1 - g_n(t)]^2 \, dt.$$

PARTIE I

Q1, Q2 et Q3 ! $x\mapsto \frac{1}{x}$ et $x\mapsto -\frac{\cos x}{\sin x}$ sont continues et dérivables sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ donc f est continue et dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}]$.

$\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}]$, $f(x)=\frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x}$.

$\sin x - x\cos x = x-\frac{x^3}{6} - x\left(1-\frac{x^2}{2}\right)+o(x^3) = \frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$; $\sin x - x\cos x = \frac{x^3}{3}+o(x^3)$

donc $f(x)\underset{0}{\sim}\frac{(1/3)x^3}{x\sin x}\sim\frac{(1/3)x^3}{x^2}=\frac{1}{3}x$; par conséquent : $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=0=f(0)$.

mieux : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}\underset{0}{\sim}\frac{1}{3}\frac{x}{x}=\frac{1}{3}$; par conséquent : $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{3}$

Finalement : f est continue et dérivable en 0. $f'(0)=\frac{1}{3}$.

Pour finir : f est continue et dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

$f'(0)=\frac{1}{3}$ et $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}]$, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$.

dérivée de la cotangente !

f' est clairement continue sur $]0,\frac{\pi}{2}]$.

$\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\underset{0}{\sim}\frac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{x^4}\underset{0}{\sim}\frac{x^3/6}{x^4}(x+\sin x)=\frac{1}{6}\left(1+\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\right)$ donc $\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\frac{1}{3}=f'(0)$

$x-\sin x\sim x^3/6$

Finalement $\lim_{x\to0}f'(x)=f'(0)$; f' est continue en 0.

Conclusion.. f est donc de classe C^1 sur $[0,\frac{\pi}{2}]$. $f'(0)=\frac{1}{3}$ et $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}]$, $f'(x)=\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$.

Q4 $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}]$, $f'(x)=\frac{1}{x^2\sin^2 x}(x-\sin x)(x+\sin x)>0$ ($\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $x>\sin x$!) et $f'(0)=\frac{1}{3}$

f est donc strictement croissante sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

x	0		$\pi/2$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2/\pi$

Remarque.. $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $0\le f(x)\le\frac{2}{\pi}$; donc $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}]$, $0\le\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\le\frac{2}{\pi}$.

PARTIE II

Q1 $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$. $A_nX=\begin{bmatrix}0&1&&0\\1&\ddots&\ddots&\\&\ddots&\ddots&1\\0&&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\x_1+x_3\\x_2+x_4\\\vdots\\x_{n-2}+x_n\\x_{n-1}\end{bmatrix}$

De manière plus rigoureuse ! Notons y_k la $k^{\text{ème}}$ coordonnée de A_nX.

$y_k=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j$. $a_{kj}=1$ si $|k-j|=1$ et $a_{kj}=0$ si $|k-j|\neq1$.

donc $y_1=x_2$ $(|1-j|=1\iff j=2)$

$y_k=x_{k-1}+x_{k+1}$ pour $k\in[\![2,n-1]\!]$ $(|k-j|=1\iff j=k-1$ ou $j=k+1)$

$y_n=x_{n-1}$ $(|n-j|=1\iff j=n-1)$

$q_n(X) = {}^tX A_n X = {}^tX Y$;

$q_n(X) = {}^tXY = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 x_2 + \sum_{k=2}^{n-1} x_k (x_{k-1} + x_{k+1}) + x_n x_{n-1}$;

$q_n(X) = x_1 x_2 + \sum_{k=2}^{n-1} x_k x_{k-1} + \sum_{k=2}^{n-1} x_k x_{k+1} + x_n x_{n-1}$;

$\underline{\underline{q_n(X)}} = x_1 x_2 + \sum_{k=1}^{n-2} x_{k+1} x_k + \sum_{k=2}^{n-1} x_k x_{k+1} + x_n x_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} x_{k+1} x_k + \sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1} = \underline{\underline{2 \sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1}}}$.

Q2 a) $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. $q_2(X) = 2 x_1 x_2$ et ${}^tX X = x_1^2 + x_2^2$.

$\underline{n=2}$ $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$ donc $x_1^2 + x_2^2 \geq 2 x_1 x_2$ et $(x_1 + x_2)^2 \geq 0$ donc : $2x_1 x_2 \geq -x_1^2 - x_2^2$

Donc : $-(x_1^2 + x_2^2) \leq 2 x_1 x_2 \leq x_1^2 + x_2^2$.

Par conséquent : $\underline{-{}^tXX \leq q_2(X) \leq {}^tXX}$

b) $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $A_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$! $A_2^2 = I$. Spec $(A_2) \subset \{-1, 1\}$!

clairement : $A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $1 \in \mathrm{Spec}(A_2)$; $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in F_1$

$A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$; $-1 \in \mathrm{Spec}(A_2)$; $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in F_{-1}$

Donc $\underline{\mathrm{Spec}(A_2) = \{-1, 1\}}$. Nous sommes en dimension 2 donc A_2 est diagonalisable et $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) = F_1 \oplus F_{-1}$. On a alors $\dim F_1 = \dim F_{-1} = 1$. $\underline{\underline{F_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \text{ et } F_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)}}$

c) Soit $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ avec $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

$|q_2(X)| = {}^tXX \iff |2 x_1 x_2| = x_1^2 + x_2^2 \iff 0 = |x_1|^2 + |x_2|^2 - 2|x_1||x_2| \iff (|x_1| - |x_2|)^2 = 0$

$|q_2(X)| = {}^tXX \iff |x_1| = |x_2| \iff x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2 \iff X \in F_1$ ou $X \in F_{-1}$

$\{X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid |q_2(X)| = {}^tXX\} = F_1 \cup F_{-1}$

ou encore : si $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $\underline{\underline{|q_2(X)| = {}^tXX \text{ ssi } X \text{ est vecteur propre de } A_2}}$

Q3 Soit $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$!

a) D'après ce qui précède : $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$ $-(x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq 2 x_i x_{i+1} \leq x_i^2 + x_{i+1}^2$

Par sommation : $\underline{\underline{-\sum_{i=1}^{n-1}(x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq q_n(X) \leq \sum_{i=1}^{n-1}(x_i^2 + x_{i+1}^2)}}$

b) $\sum_{i=1}^{n-1}(x_i^2 + x_{i+1}^2) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1}^2 = {}^tXX - x_n^2 + ({}^tXX - x_1^2) = 2\,{}^tXX - (x_n^2 + x_1^2) \leq 2\,{}^tXX$

$-\sum_{i=1}^{n-1}(x_i^2 + x_{i+1}^2) = -2\,{}^tXX + (x_n^2 + x_1^2) \geq -2\,{}^tXX$

Finalement : $\underline{\underline{-2\,{}^tXX \leq q_n(X) \leq 2\,{}^tXX}}$

b) suite. Si $X=0$: ${}^tXX = 0 = q_n(X)$ donc $|q_n(X)| = 2\,{}^tXX$

Réciproquement supposons $|q_n(X)| = 2\,{}^tXX$.

Pour fixer les idées supposons $q_n(X) = 2\,{}^tXX$ (même démonstration ou presque ! pour $q_n(X) = -2\,{}^tXX$)

$$q_n(X) \le \sum_{i=1}^{n-1}(x_i^2+x_{i+1}^2) \underset{\text{voir plus haut}}{=} 2\,{}^tXX - (x_n^2+x_1^2) \le 2\,{}^tXX = q_n(X) \ !$$

Donc $q_n(X) = 2\,{}^tXX - (x_n^2+x_1^2) = 2\,{}^tXX$; on a donc $x_n^2+x_1^2=0$; c'est à dire : $x_1=x_n=0$

On a en plus : $2\,{}^tXX = q_n(X) = \sum_{i=1}^{n-1}(x_i^2+x_{i+1}^2)$; $2\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = \sum_{i=1}^{n-1}(x_i^2+x_{i+1}^2)$;

$0 = \sum_{i=1}^{n-1}(x_i-x_{i+1})^2$; $\forall i\in[\![1,n-1]\!]$, $x_i=x_{i+1}$. Par conséquent : $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$! $X=0$

Finalement : $\underline{|q_n(X)| = 2\,{}^tXX \iff X=0}$

c) $X\neq 0$ et $A_nX=\lambda X$. Par conséquent : $-2\,{}^tXX < q_n(X) < 2\,{}^tXX$

$q_n(X) = {}^tXA_nX = {}^tX\lambda X = \lambda\,{}^tXX$; donc $-2\,{}^tXX < \lambda\,{}^tXX < 2\,{}^tXX$ (1)

X n'étant pas nul : ${}^tXX$ n'est pas nul (${}^tXX = "\sum_{i=1}^{n} x_i^2"$) ; mieux ${}^tXX>0$

Finalement en divisant par ${}^tXX$ (1) on obtient : $\underline{-2<\lambda<2}$

ce qui signifie : $\mathrm{Spec}(A_n)\subset\,]-2,2[$.

Q4 Diagonalisation de la matrice A_n.

a) L'équation $z\in\mathbb{C}$ et $z^2=\lambda z-1$ a même ensemble de solutions que l'équation $z\in\mathbb{C}$ et $z^2-2\cos t\, z+1=0$. Les solutions de cette équation sont e^{it} et e^{-it}

Par conséquent : E_λ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 qui admet $((\cos kt)_{k\geq 0}, (\sin kt)_{k\geq 0})$ pour base.

Soit $(u_k)_{k\geq 0}$ un élément de E_λ. $\exists (a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\forall k\in\mathbb{N}$, $u_k=a\cos kt+b\sin kt$.

$u_0 = a + b\times 0 = a$ et $u_1 = a\cos t + b\sin t$; $b = \frac{u_1 - a\cos t}{\sin t} = \frac{u_1-u_0\cos t}{\sin t}$ ($t\in\,]0,\pi[$)

Donc $\underline{\forall k\in\mathbb{N},\ u_k = u_0\cos kt + \frac{u_1-u_0\cos t}{\sin t}\times\sin kt}$.

b) Soit $(u_k)_{k\geq 0}$ un élément de E_λ. $\forall k\in\mathbb{N}$, $u_k = u_0\cos kt + \frac{u_1-u_0\cos t}{\sin t}\sin kt$.

$$(u_k)_{k\geq 0}\in F_\lambda(n) \iff \begin{cases} u_0=0 \\ \text{et} \\ 0 = u_{n+1} = u_0\cos(n+1)t + \frac{u_1-u_0\cos t}{\sin t}\sin(n+1)t = u_1\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}\end{cases}.$$

$(u_k)_{k\geq 0}\in F_\lambda(n) \iff u_0=0$ et $u_1\times \dfrac{\sin(n+1)t}{\sin t}=0 \iff u_0=0$ et $u_1\times \sin(n+1)t=0$

1er cas.. $\sin(n+1)t\neq 0$. $(u_k)_{k\geq 0}\in F_\lambda(n) \iff u_0=u_1=0 \underset{(u_k)_{k\geq 0}\in E_\lambda}{\iff} (u_k)_{k\geq 0}=0_{E_\lambda}$

Donc $F_\lambda(n)=\{0_{E_\lambda}\}$

2ème cas.. $\sin(n+1)t=0$. $(u_k)_{k\geq 0}\in F_\lambda(n) \iff u_0=0$

Montrons alors que $(u_k)_{k\geq 0}\in \mathrm{Vect}((\sin kt)_{k\geq 0})$.

Soit $(u_k)_{k\geq 0}\in F_\lambda(n)$; $\forall k\in\mathbb{N}$, $u_k \underset{u_0=0}{=} \dfrac{u_1}{\sin t}\times \sin kt$ donc $(u_k)_{k\geq 0}\in \mathrm{Vect}((\sin kt)_{k\geq 0})$.

Soit $(u_k)_{k\geq 0}\in \mathrm{Vect}((\sin kt)_{k\geq 0})$. $\exists a\in\mathbb{R}$, $\forall k\in\mathbb{N}$, $u_k=a\sin kt$; donc $u_0=0$; $(u_k)_{k\geq 0}\in F_\lambda(n)$.

Conclusion.. Si $(n+1)t\equiv 0\ (\pi)$: $F_\lambda(n)=\mathrm{Vect}((\sin kt)_{k\geq 0})$

Si $(n+1)t\not\equiv 0\ (\pi)$: $F_\lambda(n)=\{0_{E_\lambda}\}$

c) "Clarifions" cette question calamiteuse. Considérons $X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Associons à X la suite $(u_k)_{k\geq 0}$ définie par :

$u_0=0$, $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $u_k=x_k$, $u_{n+1}=0$ et $\forall k\in\mathbb{N}$, $u_{n+k+2}=\lambda u_{n+k+1}-u_{n+k}$.

Montrons, simplement que : $A_nX=\lambda X \iff (u_k)_{k\geq 0}\in F_\lambda(n)$.

$$A_nX=\lambda X \iff \begin{cases} x_2=\lambda x_1\\ x_{k-1}+x_{k+1}=\lambda x_k \text{ pour } k\in[\![2,n-1]\!]\\ x_{n-1}=\lambda x_n\end{cases} \iff \begin{cases} x_2=\lambda x_1\\ x_{k+1}=\lambda x_k-x_{k-1} \text{ pour } k\in[\![2,n-1]\!]\\ x_{n-1}=\lambda x_n\end{cases}$$

→ Supposons $A_nX=\lambda X$. Montrons que $(u_k)_{k\geq 0}\in F_\lambda(n)$. Il suffit de montrer que : $(u_k)_{k\geq 0}\in E_\lambda$ car : $u_0=u_{n+1}=0$!

Montrons donc que : $\forall k\in\mathbb{N}$, $u_{k+2}=\lambda u_{k+1}-u_k$; c'est déjà clair si $k\geq n$ (voir définition de $(u_k)_{k\geq 0}$). Reste à vérifier que : $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $u_{k+2}=\lambda u_{k+1}-u_k$

$\forall k\in[\![2,n-1]\!]$, $x_{k+1}=\lambda x_k-x_{k-1}$, donc,

$\forall k\in[\![1,n-2]\!]$, $x_{k+2}=\lambda x_{k+1}-x_k$; par conséquent $\forall k\in[\![1,n-2]\!]$, $u_{k+2}=\lambda u_{k+1}-u_k$.

Reste les cas $k=0$ et $n-1$

$u_2=x_2=\lambda x_1=\lambda u_1=\lambda u_1-u_0$ (car $u_0=0$). $u_{n+1}=0\overset{!}{=}\lambda x_n-x_{n-1}=\lambda u_n-u_{n-1}$

Ceci achève de prouver que $(u_k)_{k\geq 0}\in E_\lambda$ et donc que $(u_k)_{k\geq 0}\in F_\lambda(n)$ car $u_0=u_{n+1}=0$

→ Réciproquement supposons que $(u_k)_{k\geq 0}\in F_\lambda(n)$ et vérifions que $A_nX=\lambda X$.

$\forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+2} = \lambda u_{k+1} - u_k$

Donc $x_2 = u_2 = \lambda u_1 - u_0 = \lambda u_1 - 0 = \lambda x_1$

Si $k \in [\![2, n-1]\!]$, $x_{k+1} \underset{\substack{\uparrow \\ 3 \leq k+1 \leq n}}{=} u_{k+1} = \lambda u_k - u_{k-1} \underset{\substack{\uparrow \\ 2 \leq k \leq n-1 \\ 1 \leq k-1 \leq n-2}}{=} \lambda x_k - x_{k-1}$

Enfin : $x_{n-1} = u_{n-1} \underset{\substack{\uparrow \\ u_{n+1} = \lambda u_n - u_{n-1}}}{=} \lambda u_n - u_{n+1} = \lambda x_n - 0 = \lambda x_n$.

Finalement $x_2 = \lambda x_1$, $\forall k \in [\![2, n-1]\!]$, $x_{k+1} = \lambda x_k - x_{k-1}$ et $x_{n-1} = \lambda x_n$; donc $AX = \lambda X$

d) <u>Analyse</u>.. Soit $\lambda \in \operatorname{Spec}(A_n)$. $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ et $(u_k)_{k \geq 0}$ est la suite associée à X. $(u_k)_{k \geq 0} \in F_\lambda(u)$ et $(u_k)_{k \geq 0}$ n'est

pas la suite nulle donc $F_\lambda(u) \neq \{0_{E_\lambda}\}$ donc $(n+1)t \equiv 0\ (\pi)$.

<u>Synthèse</u>.. Supposons $(n+1)t \equiv 0$. $F_\lambda(u) \neq \{0_{E_\lambda}\}$. Soit $(u_k)_{k \geq 0}$ un élément

non nul de $F_\lambda(u)$. Posons $x_i = u_i$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.

$(u_k)_{k \geq 0}$ est la suite associée à $X = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ et $(u_k)_{k \geq 0} \in F_\lambda(u)$; par conséquent $AX = \lambda X$.

x_1 n'est pas nul ($u_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 0 \Rightarrow u_1 = u_0 = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, u_k = 0$!) donc $X \neq 0$.

Par conséquent $\lambda \in \operatorname{Spec}(A_n)$.

<u>Conclusion</u>. $\operatorname{Spec}(A_n) \subset]-2, 2[$. Soit $\lambda \in]-2,2[$. $\exists t \in]0, \pi[$, $\lambda = 2\cos t$.

$\lambda \in \operatorname{Spec}(A_n) \Leftrightarrow (n+1)t \equiv 0\ (\pi) \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z},\ t = \frac{p\pi}{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ t \in]0,\pi[}}{\Leftrightarrow} \exists p \in [\![1, n]\!],\ t = \frac{p\pi}{n+1}$.

Finalement : $\operatorname{Spec}(A_n) = \left\{ 2\cos \frac{p\pi}{n+1} ;\ p \in [\![1, n]\!] \right\}$.

Soit $\lambda = 2\cos\theta_p$ avec $\theta_p = \frac{p\pi}{n+1}$ et $p \in [\![1, n]\!]$. $\lambda \in \operatorname{Spec}(A_n)$.

Soit $X = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $(u_k)_{k \geq 0}$ la suite associée.

$AX = \lambda X \Leftrightarrow (u_k)_{k \geq 0} \in F_\lambda(u) \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N},\ u_k = a \sin k\theta_p \Rightarrow X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} \sin\theta_p \\ \sin 2\theta_p \\ \vdots \\ \sin n\theta_p \end{bmatrix} \right)$.

$F_\lambda \subset \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} \sin\theta_p \\ \sin 2\theta_p \\ \vdots \\ \sin n\theta_p \end{bmatrix} \right)$. Comme $\dim F_\lambda \geq 1$: $F_\lambda = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} \sin\theta_p \\ \sin 2\theta_p \\ \vdots \\ \sin n\theta_p \end{bmatrix} \right)$.

Ceci répond très largement à la question !!

e) $\forall p \in [\![1, n]\!]$, $F_{2\cos\theta_p} = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} \sin\theta_p \\ \sin 2\theta_p \\ \vdots \\ \sin n\theta_p \end{bmatrix} \right) = \operatorname{Vect}(X_p)$.

Q5 a) $A_nX=\lambda X$ et $A_nY=\mu Y$. Multiplions la 1ère par ${}^tY$ et la seconde par ${}^tX$.

${}^tYA_nX=\lambda\,{}^tYX$ et ${}^tXA_nY=\mu\,{}^tXY$

Transposons ${}^tYA_nX=\lambda\,{}^tYX$; on obtient : ${}^tX\,{}^tA_nY=\lambda\,{}^tXY$ $\quad ({}^t({}^tY)=Y)$.

Or A_n est symétrique donc ${}^tA_n=A_n$.

Finalement ${}^tXA_nY=\lambda\,{}^tXY$ et ${}^tXA_nY=\mu\,{}^tXY$. $\lambda\,{}^tXY=\mu\,{}^tXY$. ${}^tXY=0$ car $\lambda\neq\mu$.

Morale.. 2 vecteurs propres associés à 2 valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Soit $(p,q)\in[\![1,n]\!]^2$ tel que $p\neq q$

$X=\begin{bmatrix}\sin\theta_p\\ \sin 2\theta_p\\ \vdots\\ \sin n\theta_p\end{bmatrix}$ est un vecteur propre associé à $\lambda=2\cos\theta_p$ et $Y=\begin{bmatrix}\sin\theta_q\\ \sin 2\theta_q\\ \vdots\\ \sin n\theta_q\end{bmatrix}$ est associé à la valeur propre $\mu=2\cos\theta_q$.

Donc ${}^tXY=0$ car $\lambda\neq\mu$. Finalement $\underline{\underline{\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta_p\sin k\theta_q=0}}$.

b) Soit $p\in[\![1,n]\!]$, $z=e^{2i\theta_p}=e^{i\frac{2p\pi}{n+1}}\neq 1$.

$$\sum_{k=0}^{n}z^k=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}=\frac{1-e^{i2p\pi}}{1-z}=\frac{1-1}{1-z}=0\ ;\quad \sum_{k=0}^{n}z^k=0.$$

En particulier : $0=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}z^k\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{i\frac{2kp\pi}{n+1}}\right)=\sum_{k=0}^{n}\cos\left(2k\frac{p\pi}{n+1}\right)$

$\sum_{k=0}^{n}\cos(2k\theta_p)=0$, soit encore $1+\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\theta_p)=0$

Finalement : $\underline{\underline{\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\theta_p)=-1}}$.

$${}^tX_pX_p=\sum_{k=1}^{n}\sin^2k\theta_p=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\cos(2k\theta_p)}{2}=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\theta_p)=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}(-1)=\frac{n+1}{2}.$$

$\underline{\underline{{}^tX_pX_p=\frac{n+1}{2}}}$.

c) $M=(b_{k,\ell})$ avec $b_{k,\ell}=\sin(k\theta_\ell)=\sin\left(k\frac{\ell\pi}{n+1}\right)=\sin(\ell\theta_k)=b_{\ell,k}$; ceci prouve que M est symétrique. Considérons $M^2=(c_{p,q})$. Soit $(p,q)\in[\![1,n]\!]^2$.

$$c_{p,q}=\sum_{k=1}^{n}b_{p,k}b_{k,q}=\sum_{k=1}^{n}\sin(k\theta_p)\times\sin(k\theta_q)=\begin{cases}0 & \text{si } p\neq q\\ {}^tX_pX_p=\frac{n+1}{2} & \text{si } p=q.\end{cases}$$

Finalement $M^2=\frac{n+1}{2}I_n$

Donc $M\left(\frac{2}{n+1}M\right)=I_n$.

M est inversible et $\underline{\underline{M^{-1}=\frac{2}{n+1}M}}$.

Normal pour une matrice de passage!

Q1 a) $(k,\ell)\in\mathbb{N}^2$. $\int_0^\pi \sin kt \sin \ell t\,dt = \frac{1}{2}\left[\int_0^\pi (\cos((k-\ell)t)-\cos((k+\ell)t))\,dt\right]$

$\int_0^\pi \cos((k+\ell)t)\,dt = \begin{cases} \pi \text{ si } k=\ell=0 \\ \left[\frac{\sin(k+\ell)t}{k+\ell}\right]_0^\pi = 0 \text{ si } k\neq \ell \end{cases}$ $\int_0^\pi \cos((k-\ell)t)\,dt = \begin{cases} \pi \text{ si } k=\ell \\ \text{et} \\ \left[\frac{\sin(k-\ell)t}{k-\ell}\right]_0^\pi = 0 \text{ si } k\neq\ell \end{cases}$

Finalement : Si $k\neq\ell$: $\int_0^\pi \sin(kt)\sin \ell t\,dt = 0$

Si $k=\ell\neq 0$ $\int_0^\pi \sin(\ell t)\sin\ell t\,dt = \pi/2$

Si $k=\ell=0$ $\int_0^\pi \sin(\ell t)\sin \ell t\,dt = 0$

b) $\int_0^\pi g^2(t)\,dt = \int_0^\pi \left(\sum_{k=1}^n a_k \sin kt\right)\left(\sum_{\ell=1}^n a_\ell \sin(\ell t)\right)dt = \sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n \int_0^\pi a_k a_\ell \sin kt \sin \ell t\,dt$

$\int_0^\pi g^2(t)\,dt = \sum_{k=1}^n a_k^2 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^n a_k^2$. $\underline{\int_0^\pi g^2(t)\,dt = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^n a_k^2}$

c) Posons $M_n A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix}$ $\forall p\in [\![1,n]\!]$, $x_p = \sum_{k=1}^n b_{pk}\, a_k = \sum_{k=1}^n a_k \sin(k\theta_p) = g(\theta_p)$

$A = M_n^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p\end{bmatrix} = \frac{2}{n+1} M \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p\end{bmatrix}$ donc $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $a_k = \frac{2}{n+1}\sum_{p=1}^n b_{kp}\, x_p$

$\underline{\forall k\in[\![1,n]\!],\ a_k = \frac{1}{n+1}\sum_{p=1}^n g(\theta_p)\sin(k\theta_p)}$.

d) $\forall p\in[\![1,n]\!]$, $g(\theta_p) = b_p \Leftrightarrow \begin{bmatrix} g(\theta_1) \\ g(\theta_2) \\ \vdots \\ g(\theta_n)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n\end{bmatrix} \Leftrightarrow M_n A = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n\end{bmatrix} \Leftrightarrow A = M_n^{-1}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n\end{bmatrix}$

ceci prouve donc l'existence et l'unicité de A.

En clair : $\begin{bmatrix} a_1(n) \\ a_2(n) \\ \vdots \\ a_n(n)\end{bmatrix} = M_n^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1\end{bmatrix} = \frac{1}{n+1}M_n\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1\end{bmatrix}$; on a donc $\underline{\forall k\in[\![1,n]\!],\ a_k(n) = \frac{2}{n+1}\sum_{p=1}^n \sin(k\theta_p)}$

Q2 Etude des coefficients $a_k(n)$.

Soit $k\in[\![1,n]\!]$. $a_k(n) = \frac{2}{n+1}\sum_{p=1}^n \sin(k\theta_p) = \frac{2}{n+1}\sum_{p=1}^n \sin(p\theta_k)$

$\sum_{p=1}^n \sin(p\theta_k) = \mathcal{I}\left(\sum_{p=1}^n \cos(p\theta_k) + i\sin(p\theta_k)\right) = \mathcal{I}\left(\sum_{p=1}^n (e^{i\theta_k})^p\right) = \mathcal{I}\left(e^{i\theta_k}\frac{1-(e^{i\theta_k})^n}{1-e^{i\theta_k}}\right)$

$\theta_k = \frac{k\pi}{n+1} \not\equiv 0\,[2\pi]$

$\sum_{p=1}^n \sin(p\theta_k) = \mathcal{I}\left(e^{i\theta_k/2}e^{i\theta_k n/2}\frac{e^{-i\theta_k n/2}-e^{i\theta_k n/2}}{e^{-i\theta_k/2}-e^{i\theta_k/2}}\right)$

$\sum_{p=1}^n \sin(p\theta_k) = \mathcal{I}\left(e^{i\frac{n+1}{2}\theta_k}\frac{-2i\sin(n\theta_k/2)}{-2i\sin(\theta_k/2)}\right) = \sin\left(\frac{n+1}{2}\theta_k\right)\times\frac{\sin(n\theta_k/2)}{\sin(\theta_k/2)} = \sin\left(\frac{n+1}{2}\times\frac{k\pi}{n+1}\right)\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\times\frac{k\pi}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)}$

Donc $a_k(n) = \frac{2}{n+1} \sin\frac{k\pi}{2} \times \frac{\sin\left[\frac{n+1}{2}\times\frac{k\pi}{n+1} - \frac{k\pi}{2(n+1)}\right]}{\sin\left[\frac{k\pi}{2(n+1)}\right]} = \frac{\frac{2}{n+1}\sin\frac{k\pi}{2}}{\sin\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)} \left[\sin\frac{k\pi}{2}\cos\frac{k\pi}{2(n+1)} - \cos\frac{k\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{2(n+1)}\right]$

Clairement si k est pair : $\sin\frac{k\pi}{2} = 0$ et : $a_k(n) = 0$.

Supposons k impair. $\sin^2\frac{k\pi}{2} = 1$ et $\cos\frac{k\pi}{2} = 0$; donc $a_k(n) = \frac{2}{n+1} \frac{\cos\frac{k\pi}{2(n+1)}}{\sin\frac{k\pi}{2(n+1)}}$ ... cqfd.

b) Soit $k \in [\![1,n]\!]$ et k impair ($k \in [\![1,n]\!]$).

le tableau de variation de f dans I Q4 donne : $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{\pi}$

Donc $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} \leq \frac{2}{\pi}$; en particulier : $\frac{1}{\frac{k\pi}{2(n+1)}} - \frac{\cos k\pi/2(n+1)}{\sin(k\pi/2(n+1))} \leq \frac{2}{\pi}$

en multipliant par $\frac{2}{n+1}$ on obtient :

$$0 \leq \frac{4}{k\pi} - a_k(n) \leq \frac{4}{(n+1)\pi}.$$

c) Si k est pair : $\beta_k = 0$ (si $n \geq k$: $a_k(n) = 0$)

Si k est impair : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq k \Rightarrow 0 \leq \frac{4}{k\pi} - a_k(n) \leq \frac{4}{(n+1)\pi}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{(n+1)\pi} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_k(n) = \frac{4}{k\pi}$; $\beta_k = \frac{4}{k\pi}$.

Q3 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $\forall t \in [0,\pi]$, $g_n(t) - h_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (a_n(k) - \beta_k) \sin kt$

Donc $\int_0^\pi (g_n(t) - h_n(t))^2 dt = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n} (a_n(k) - \beta_k)^2$ (Voir Q1 b) ... avec "$a_k = a_n(k) - \beta_k$" !)

si $k \in [\![1,n]\!]$ et si k est pair : $[a_n(k) - \beta_k]^2 = 0$

si $k \in [\![1,n]\!]$ et si k est impair : $[a_n(k) - \beta_k]^2 \leq \left[\frac{4}{(n+1)\pi}\right]^2 = \frac{16}{\pi^2(n+1)^2}$. (Q2 b et c)

Dans les deux cas : $[a_n(k) - \beta_k]^2 \leq \frac{16}{\pi^2(n+1)^2}$.

Donc $0 \leq \int_0^\pi (g_n(t) - h_n(t))^2 dt \quad \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}[a_n(k) - \beta_k]^2 \leq \frac{\pi}{2} \times n \times \frac{16}{\pi^2(n+1)^2} = \frac{8n}{\pi(n+1)^2} \leq \frac{8}{\pi(n+1)}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{8}{\pi(n+1)} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^\pi (g_n(t) - h_n(t))^2 dt = 0$.

b) On admet donc que : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\int_0^\pi (1 - h_n(t))^2 dt = \int_0^\pi dt + \int_0^\pi h_n^2(t) dt - 2\int_0^\pi h_n(t) dt = \pi + \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \beta_k \int_0^\pi \sin kt \, dt$

$= \pi + \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \beta_k \frac{1}{k}[1 - \cos k\pi]$; $1 - \cos k\pi = \begin{cases} 0 \text{ si } k \text{ est pair} \\ 2 \text{ si } k \text{ est impair.} \end{cases}$

$= \pi + \frac{\pi}{2} \sum_{1 \leq 2k+1 \leq n} \frac{16}{[(2k+1)\pi]^2} - 2 \sum_{1 \leq 2k+1 \leq n} \frac{4}{(2k+1)\pi} \times \frac{1}{2k+1} \times 2$

$$\int_0^1 (1-h_n(t))^2 dt = \pi + \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{E(\frac{n-1}{2})} \frac{1}{(2k+1)^2} - \frac{16}{\pi} \sum_{k=0}^{E(\frac{n-1}{2})} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$\lim_{n\to+\infty} E(\frac{n-1}{2}) = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{E(\frac{n-1}{2})} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Finalement : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (1-h_n(t))^2 dt = \pi + \frac{8}{\pi} \times \frac{\pi^2}{8} - \frac{16}{\pi} \times \frac{\pi^2}{8} = \pi + \pi - 2\pi = 0$!

c) Rappel .. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a-b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ (ie à $(a+b)^2 \geq 0$!)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$0 \leq J_n = \int_0^1 (1-g_n(t))^2 dt = \int_0^1 \left[(1-h_n(t)) - (g_n(t) - h_n(t)) \right]^2 dt \leq 2\int_0^1 (1-h_n(t))^2 dt + 2\int_0^1 (g_n(t)-h_n(t))^2 dt$$

donc $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$ d'après Q 3 a et b)

Pour les initiés (g_n) converge vers 1 "pour la norme $\| \ \|_2$"