PARTIE I La loi de Pareto

A Quelques résultats probabilistes

Q1 a) $\forall x \in]-\infty, x_0[$, $f(x)=0$, f est donc continue en tout point de $]-\infty, x_0[$.

$\forall x \in [x_0, +\infty[$, $f(x) = \alpha \dfrac{(x_0+c)^\alpha}{(x+c)^{\alpha+1}}$; f est continue en tout point de $]x_0, +\infty[$ et à droite en x_0. Par conséquent : f est continue en tout point de $\mathbb{R} - \{x_0\}$.

$\forall x \in]-\infty, x_0[$, $f(x) = 0 \geq 0$ et $\forall x \in [x_0, +\infty[$ $f(x) = \alpha \dfrac{(x_0+c)^\alpha}{(x+c)^{\alpha+1}} \geq 0$. f est donc positive sur $\mathbb{R}$.

f étant nulle sur $]-\infty, x_0[$, $\int_{-\infty}^{x_0} f(t)\,dt$ existe et vaut 0.

f est continue sur $[x_0, +\infty[$ et $\forall x \in [x_0, +\infty[$, $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = (x_0+c)^\alpha \int_{x_0}^{x} \alpha (t+c)^{-\alpha-1}\,dt = (x_0+c)^\alpha \left[-(t+c)^{-\alpha}\right]_{x_0}^{x}$

$\forall x \in [x_0, +\infty[$, $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = (x_0+c)^\alpha \left[(x_0+c)^{-\alpha} - (x+c)^{-\alpha}\right] = 1 - \dfrac{(x_0+c)^\alpha}{(x+c)^\alpha}$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x_0+c)^\alpha}{(x+c)^\alpha} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = 1$

Par conséquent : $\int_{x_0}^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et vaut 1.

Finalement : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1.

Ainsi... f est une densité de probabilité.

▼ Remarque... f est continue à droite en x_0 mais pas à gauche ($\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = 0 \neq \dfrac{\alpha}{x_0+c} = f(x_0)$). ▼

b) Notons F_X la fonction de répartition de X.

$\forall x \in]-\infty, x_0[$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$.

$\forall x \in [x_0, +\infty[$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \overset{\text{voir plus haut}}{=} 1 - \dfrac{(x_0+c)^\alpha}{(x+c)^\alpha}$.

En fait : $\forall x \in]-\infty, x_0]$, $F_X(x) = 0$ et $\forall x \in [x_0, +\infty[$, $F_X(x) = 1 - \dfrac{(x_0+c)^\alpha}{(x+c)^\alpha}$.

▼ Remarques... 1... F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R} - \{x_0\}$.

2... Nous nous autoriserons à écrire que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha, x_0, c)$ (resp. $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha, x_0)$), lorsque X suit une loi de Pareto $\mathcal{P}(\alpha, x_0, c)$ (resp. $\mathcal{P}(\alpha, x_0)$). ▼

(Q2) Dans cette question : $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\begin{cases} f(t) = 0 \text{ pour } t \in]-\infty, x_0[\\ f(t) = \alpha\, x_0^{\alpha}/t^{\alpha+1} \text{ pour } t \in [x_0, +\infty[\end{cases}$

a] X possède une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$ existe ; autrement dit si et seulement si $\int_{x_0}^{+\infty} t f(t)\,dt$ existe.

$t \mapsto t f(t)$ est continue et positive sur $[x_0, +\infty[$.

En outre $\forall t \in [x_0, +\infty[$, $t f(t) = \alpha x_0^{\alpha} \dfrac{1}{t^{\alpha}}$. D'après Riemann $\int_{x_0}^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge si et seulement si : $\alpha > 1$.

Finalement : $E(X)$ existe si et seulement si : $\alpha > 1$.

Supposons $\alpha > 1$. $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt = \int_{x_0}^{+\infty} \alpha x_0^{\alpha} \dfrac{1}{t^{\alpha}}\,dt = \alpha x_0^{\alpha} \lim\limits_{A \to +\infty} \left[\dfrac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_{x_0}^{A} = \alpha x_0^{\alpha} \left(-\dfrac{x_0^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right)$

Donc pour $\alpha > 1$: $E(X) = \dfrac{\alpha}{\alpha-1} x_0$

b] $V(X)$ existe si et seulement si $E(X^2)$ existe ; c'est à dire si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ converge.

$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ converge si et seulement si : $\int_{x_0}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ converge.

$\forall t \in [x_0, +\infty[$, $t^2 f(t) = \alpha x_0^{\alpha} \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$. D'après Riemann $\int_{x_0}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ converge si et seulement si : $\alpha - 1 > 1$.

Finalement $V(X)$ existe si et seulement si $\alpha > 2$.

Supposons $\alpha > 2$.

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt = \int_{x_0}^{+\infty} \alpha x_0^{\alpha} t^{-\alpha+1}\,dt = \lim\limits_{A \to +\infty} \left[\alpha x_0^{\alpha} \dfrac{t^{-\alpha+2}}{-\alpha+2} \right]_{x_0}^{A} = -\alpha x_0^{\alpha} \dfrac{x_0^{-\alpha+2}}{-\alpha+2} = \dfrac{\alpha}{\alpha-2} x_0^2$

$V(X) = \dfrac{\alpha}{\alpha-2} x_0^2 - \left(\dfrac{\alpha}{\alpha-1} x_0 \right)^2 = \dfrac{\alpha(\alpha-1)^2 - \alpha^2(\alpha-2)}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} x_0^2 = \dfrac{\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} x_0^2$

Donc pour $\alpha > 2$: $V(X) = \dfrac{\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} x_0^2$.

(Q3) $X \hookrightarrow VP(\alpha, x_0)$. $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. $Y = \lambda X$. F_Y est la fonction de répartition de Y.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_Y(x) = p(Y \leq x) = p(X \leq \frac{x}{\lambda})$.

Rappelons que : $\forall u \in \mathbb{R}$, $p(X \leq u) = \begin{cases} 0 \text{ si } u \in]-\infty, x_0] \\ 1 - \left(\frac{x_0}{u}\right)^\alpha \text{ si } u \in [x_0, +\infty[\end{cases}$

Donc $F_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } \frac{x}{\lambda} \in]-\infty, x_0] \\ 1 - \left(\frac{x_0}{x/\lambda}\right)^\alpha \text{ si } \frac{x}{\lambda} \in [x_0, +\infty[\end{cases}$

Par conséquent, $\forall x \in]-\infty, \lambda x_0]$, $F_Y(x) = 0$ et $\forall x \in [\lambda x_0, +\infty[$, $F_Y(x) = 1 - \left(\frac{\lambda x_0}{x}\right)^\alpha$

Donc, si $X \hookrightarrow VP(\alpha, x_0)$ et si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$: $\lambda X \hookrightarrow VP(\alpha, \lambda x_0)$.

(Q4) a) $X \hookrightarrow VP(\alpha, x_0)$ et $\mu \in \mathbb{R}$. $U = X + \mu$ et F_U est la fonction de répartition de U.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_U(x) = p(U \leq x) = p(X \leq x - \mu) = \begin{cases} 0 \text{ si } x - \mu \in]-\infty, x_0] \\ 1 - \left(\frac{x_0}{x-\mu}\right)^\alpha \text{ si } x - \mu \in [x_0, +\infty[. \end{cases}$

Donc $F_U(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, x_0 + \mu] \\ 1 - \left(\frac{x_0}{x-\mu}\right)^\alpha = 1 - \left(\frac{x_0 + \mu + (-\mu)}{x + (-\mu)}\right)^\alpha \text{ si } x \in [x_0 + \mu, +\infty[\end{cases}$

Remarquons que : $(x_0 + \mu) + (-\mu) = x_0 > 0$.

Par conséquent : $U \hookrightarrow VP(\alpha, x_0 + \mu, -\mu)$

Finalement si $X \hookrightarrow VP(\alpha, x_0)$: $X + \mu \hookrightarrow VP(\alpha, x_0 + \mu, -\mu)$.

b) Réciproque. $Z \hookrightarrow VP(\alpha, x_0, c)$ et $V = Z + c$. F_V est la fonction de répartition

Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_V(x) = p(V \leq x) = p(Z \leq x - c) = \begin{cases} 0 \text{ si } x - c \in]-\infty, x_0] \\ 1 - \left(\frac{x_0 + c}{x - c + c}\right)^\alpha \text{ si } x - c \in [x_0, +\infty[\end{cases}$

Par conséquent : $\forall x \in]-\infty, x_0 + c]$, $F_V(x) = 0$ et $\forall x \in [x_0 + c, +\infty[$, $F_V(x) = 1 - \left(\frac{x_0 + c}{x}\right)^\alpha$

Comme $x_0 + c \in \mathbb{R}_+^*$: $V \hookrightarrow VP(\alpha, x_0 + c)$

Ccl.. Si $Z \hookrightarrow VP(\alpha, x_0, c)$: $Z + c \hookrightarrow VP(\alpha, x_0 + c)$.

c) $Z \hookrightarrow VP(\alpha, x_0, C)$. ← pour prendre honorablement la variance.

Posons $\hat{V} = Z + C$. $\hat{V} \hookrightarrow VP(\alpha, x_0 + C)$ et $Z = \hat{V} - C$.

Z possède une espérance (resp. variance) si et seulement si $\hat{V}$ possède une espérance (resp. variance) ; autrement dit si et seulement si $\alpha > 1$ (resp. $\alpha > 2$) d'après AQ2.

Si $\alpha > 1$, $E(Z)$ et $E(\hat{V})$ existent et : $E(Z) = E(\hat{V}) - C = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}(x_0 + C) - C =$

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} x_0 + \frac{1}{\alpha-1} C.$$

Si $\alpha > 2$, $V(Z)$ et $V(\hat{V})$ existent et : $V(Z) = V(\hat{V} - C) = V(\hat{V}) = \dfrac{\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}(x_0 + C)^2$

CL.. $Z \hookrightarrow VP(\alpha, x_0, C)$. $E(Z)$ existe ssi $\alpha > 1$; dans ce cas : $E(Z) = \dfrac{\alpha}{\alpha-1} x_0 + \dfrac{1}{\alpha-1} C$.

$V(Z)$ existe ssi $\alpha > 2$; dans ce cas : $V(Z) = \dfrac{\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}(x_0 + C)^2$

Q5 $W \hookrightarrow \mathcal{E}(\beta)$ $(\beta \in \mathbb{R}_+^*)$ et $T = x_0 k^W$ avec $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in]1, +\infty[$.

Notons F_W et F_T les fonctions de répartition de W et T.

Rappelons que : $\forall x \in]-\infty, 0]$, $F_W(x) = 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[$, $F_W(x) = 1 - e^{-\beta x}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$F_T(x) = P(T \leq x) = P(x_0 k^W \leq x) = P\left(k^W \leq \dfrac{x}{x_0}\right) = P\left(e^{W \ln k} \leq \dfrac{x}{x_0}\right)$

1er cas.. $x \leq 0$. $F_T(x) = P\left(e^{W \ln k} \leq \dfrac{x}{x_0}\right) = 0$

2ème cas.. $x > 0$. $F_T(x) = P\left(W \ln k \leq \ln \dfrac{x}{x_0}\right) \underset{\ln k > 0}{=} P\left(W \leq \dfrac{\ln(x/x_0)}{\ln k}\right) = F_W\left(\dfrac{\ln(x/x_0)}{\ln k}\right)$

a) $x \leq x_0$. Alors $\dfrac{\ln(x/x_0)}{\ln k} \leq 0$; $F_T(x) = 0$

b) $x \geq x_0$. Alors $\dfrac{\ln(x/x_0)}{\ln k} \geq 0$; $F_T(x) = 1 - e^{-\beta \frac{\ln(x/x_0)}{\ln k}} = 1 - \left(\dfrac{x}{x_0}\right)^{-\frac{\beta}{\ln k}}$

Donc : $F_T(x) = 1 - \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{\frac{\beta}{\ln k}}$

Résumons.. $\forall x \in]-\infty, x_0]$, $F_T(x) = 0$ et $\forall x \in [x_0, +\infty[$, $F_T(x) = 1 - \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{\frac{\beta}{\ln k}}$

Comme $\dfrac{\beta}{\ln k} > 0$: $T \hookrightarrow VP\left(\dfrac{\beta}{\ln k}, x_0\right)$.

CL.. Si $W \hookrightarrow \mathcal{E}(\beta)$, $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in]1,+\infty[$ alors : $T = x_0 k^W \hookrightarrow \mathcal{P}(\frac{\beta}{\ln k}, x_0)$.

Q6.. $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha, x_0)$. Posons $R = \sqrt{X}$. Notons F_X et F_R les fonctions de répartitions de X et R.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_R(x) = p(X \geqslant 0 \text{ et } \sqrt{X} \leqslant x)$

1er cas.. $x \in]-\infty, 0[$. $F_R(x) = 0$

2ème cas.. $x \in [0,+\infty[$. $F_R(x) = p(X \geqslant 0 \text{ et } X \leqslant x^2) = p(0 \leqslant X \leqslant x^2) = F_X(x^2) - F_X(0) = F_X(x^2)$

- Si $x^2 \leqslant x_0$: $F_R(x) = 0$
- Si $x^2 \geqslant x_0$: $F_R(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x^2}\right)^\alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{x_0}}{x}\right)^{2\alpha}$

Résumons. $\forall x \in]-\infty, \sqrt{x_0}]$, $F_R(x) = 0$ et $\forall x \in [\sqrt{x_0}, +\infty[$, $F_R(x) = 1 - \left(\frac{\sqrt{x_0}}{x}\right)^{2\alpha}$

Comme $2\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\sqrt{x_0} \in \mathbb{R}_+^*$: $R \hookrightarrow \mathcal{P}(2\alpha, \sqrt{x_0})$.

Conclusion.. Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha, x_0)$: $\sqrt{X} \hookrightarrow \mathcal{P}(2\alpha, \sqrt{x_0})$.

B Propriété caractéristique de la loi de Pareto

Q1.. $\forall t \in [x, +\infty[$, $t f(t) \geqslant x f(t)$ $\quad (f(t) \geqslant 0)$.

Donc : $\int_x^{+\infty} t f(t)\,dt \geqslant x \int_x^{+\infty} f(t)\,dt$ ce qui donne : $r_X(x) \geqslant x$ car $\int_x^{+\infty} f(t)\,dt > 0$

Q2.. $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha, x_0)$. $\alpha \in]1, +\infty[$.

Soit $x \in [x_0, +\infty[$. $\int_x^{+\infty} f(t)\,dt > 0$ car f est strictement positive sur $[x_0, +\infty[$.

$E(X)$ existe car $\alpha > 1$; donc $\int_{x_0}^{+\infty} t f(t)\,dt$ existe ; donc $\int_x^{+\infty} t f(t)\,dt$ aussi.

Nous pouvons déjà dire que $r_X(x)$ existe.

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,dt = x_0^\alpha \lim_{A \to +\infty} \int_x^A \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}\,dt = x_0^\alpha \lim_{A \to +\infty} \left[-t^{-\alpha}\right]_x^A = x_0^\alpha x^{-\alpha} = \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha$$

$$\int_x^{+\infty} t f(t)\,dt = \alpha x_0^\alpha \lim_{A \to +\infty} \int_x^A \frac{dt}{t^\alpha} = \alpha x_0^\alpha \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_x^A = \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{x_0^\alpha}{x^{\alpha-1}}$$

Donc $\quad M_X(x) = \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\,\dfrac{x_0^{\alpha}}{x^{\alpha-1}} \times \left(\dfrac{x}{x_0}\right)^{\alpha} = \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\,x$

$\forall x \in [x_0, +\infty[, \; M_X(x) = \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\,x \quad$ si $\quad X \hookrightarrow VP(\alpha, x_0)$ avec $\alpha > 1$.

Q3) La réciproque.

$\int_{x_0}^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_{x_0}^{+\infty} t f(t)\,dt$ étant convergentes, G et H sont définies sur $[x_0, +\infty[$.

a) $\forall x \in [x_0, +\infty[, \; G(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,dt = -\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{+\infty} f(t)\,dt = -\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + G(x_0)$.

$x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ est dérivable sur $[x_0, +\infty[$ (c'est la primitive sur $[x_0, +\infty[$ de la fonction continue f qui vaut 0 en x_0) ; Donc G est dérivable sur $[x_0, +\infty[$ et

$\forall x \in [x_0, +\infty[, \; G'(x) = -f(x)$.

Un raisonnement analogue prouve que : H est dérivable sur $[x_0, +\infty[$ et

$\forall x \in [x_0, +\infty[, \; H'(x) = -x f(x)$.

b) Soit $x \in [x_0, +\infty[$. $\quad M_X(x) = kx \quad$ donc $\quad H(x) = kx\,G(x)$.

En dérivant on obtient : $-x f(x) = H'(x) = k\,G(x) + kx\,G'(x)$

Donc $\quad x\,G'(x) = k\,G(x) + kx\,G'(x)$

Finalement : $\forall x \in [x_0, +\infty[, \quad G(x) = \dfrac{1-k}{k}\,x\,G'(x)$.

c) I est dérivable sur $[x_0, +\infty[$.

$\forall x \in [x_0, +\infty[, \; I'(x) = \dfrac{k}{k-1}\,x^{\frac{k}{k-1}-1}\,G(x) + x^{\frac{k}{k-1}}\,G'(x)$

$\forall x \in [x_0, +\infty[, \; I'(x) = \dfrac{k}{k-1}\,x^{\frac{k}{k-1}-1}\left[\,G(x) + \dfrac{k-1}{k}\,x\,G'(x)\right] \underset{\uparrow}{=} 0$

$G(x) = \dfrac{1-k}{k}\,x\,G'(x)$

I est donc constante sur $[x_0, +\infty[$.

Ainsi : $\forall x \in [x_0, +\infty[, \; I(x) = I(x_0) = x_0^{\frac{k}{k-1}} \int_{x_0}^{+\infty} f(t)\,dt = x_0^{\frac{k}{k-1}}$.

Par conséquent : $\forall x \in [x_0, +\infty[, \; G(x) = I(x)\,x^{-\frac{k}{k-1}} = \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{\frac{k}{k-1}}$

$\forall x \in [x_0, +\infty[, \; G(x) = \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{\frac{k}{k-1}}$

d] Donnons la fonction de répartition F_X de X.

$\forall x \in]-\infty, x_0]$, $F_X(x)=0$

$\forall x \in [x_0,+\infty[$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 1 - \int_{x}^{+\infty} f(t)\,dt = 1 - G(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{k}{k-1}}$

Comme : $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\frac{k}{k-1} \in \mathbb{R}_+^*$: $X \hookrightarrow VP\left(\frac{k}{k-1}, x_0\right)$.

Q4 a] Un raisonnement élémentaire prouve que $h : t \mapsto f(t-\lambda)$ est une densité de Y.

f étant continue et strictement positive sur $[x_0,+\infty[$, h est continue et strictement positive sur $[x_0+\lambda,+\infty[$

X admettant une espérance, Y aussi.

Ceci suffit pour dire que $m_Y(y)$ existe pour tout y dans $[x_0+\lambda,+\infty[$.

Soit $y \in [x_0+\lambda,+\infty[$.

$$\int_y^{+\infty} h(t)\,dt = \int_y^{+\infty} f(t-\lambda)\,dt \overset{u=t-\lambda}{=} \int_{y-\lambda}^{+\infty} f(u)\,du$$

les deux intégrales convergent

$$\int_y^{+\infty} t\,h(t)\,dt = \int_y^{+\infty} t\,f(t-\lambda)\,dt \overset{u=t-\lambda}{=} \int_{y-\lambda}^{+\infty} (u+\lambda) f(u)\,du = \int_{y-\lambda}^{+\infty} u f(u)\,du + \lambda \int_{y-\lambda}^{+\infty} f(u)\,du$$

$$m_Y(y) = \frac{\int_{y-\lambda}^{+\infty} u f(u)\,du + \lambda \int_{y-\lambda}^{+\infty} f(u)\,du}{\int_{y-\lambda}^{+\infty} f(u)\,du} = m_X(y-\lambda) + \lambda.$$

$\forall y \in [x_0+\lambda,+\infty[$, $m_Y(y) = m_X(y-\lambda)+\lambda$.

b] $X \hookrightarrow VP(\alpha, x_0, C)$ avec $\alpha > 1$.

- X prend ses valeurs dans $[x_0,+\infty[$
- X possède une densité continue et strictement positive sur $[x_0,+\infty[$.
- X possède une espérance.

Posons $Y = X + C$. • A Q4 b] prouve que $Y \hookrightarrow VP(\alpha, x_0+C)$

• B Q4 a] indique que :

$\forall y \in [x_0+C,+\infty[$, $m_Y(y) = m_X(y-C)+C$

• B Q 2 pour que : $\forall y \in [x_0+c, +\infty[, \ \Pi_Y(y) = \frac{\alpha}{\alpha-1} y$.

Soit $x \in [x_0, +\infty[$. Posons $y = x+c$. $x = y-c$

$y \in [x_0+c, +\infty[$ donc $\frac{\alpha}{\alpha-1} y = \Pi_Y(y) = \Pi_X(y-c)+c = \Pi_X(x)+c$.

Par conséquent : $\Pi_X(x) = \frac{\alpha}{\alpha-1} y - c = \frac{\alpha}{\alpha-1}(x+c) - c = \frac{\alpha}{\alpha-1} x + \frac{1}{\alpha-1} c$.

CL.. Si $X \hookrightarrow VP(\alpha, x_0, c)$ avec $\alpha > 1$ alors $\forall x \in [x_0, +\infty[, \ \Pi_X(x) = \frac{\alpha}{\alpha-1} x + \frac{1}{\alpha-1} c$.

▼ Remarque.. Pour $x = x_0$ on retrouve l'espérance de $X \hookrightarrow VP(\alpha, x_0, c)$ obtenue en A Q4 c) ▼

c) D'après Q4 c)

$\forall y \in [x_0 + \frac{h}{k-1}, +\infty[, \ \Pi_Y(y) = \Pi_X(y - \frac{h}{k-1}) + \frac{h}{k-1} = kx(y - \frac{h}{k-1}) + h + \frac{h}{k-1}$

$\forall y \in [x_0 + \frac{h}{k-1}, +\infty[, \ \Pi_Y(y) = ky + \frac{1}{k-1}[-kh + h(k-1) + h] = ky$.

Appliquons alors B Q 3 à Y en en vérifiant les hypothèses.

- Y est à valeurs dans $[x_0 + \frac{h}{k-1}, +\infty[$ et $x_0 + \frac{h}{k-1} > 0$
- Y possède une densité continue et strictement positive sur $[x_0 + \frac{h}{k-1}, +\infty[$ à savoir :

  $x \mapsto f(x - \frac{h}{k-1})$)
- Y possède une espérance car X en possède une
- $\forall y \in [x_0 + \frac{h}{k-1}, +\infty[, \ \Pi_Y(y) = ky$ avec $k > 1$

Par conséquent d'après B Q 3 : $Y \hookrightarrow VP\left(\frac{k}{k-1}, x_0 + \frac{h}{k-1}\right)$

Rappelons que : $Y = X + \frac{h}{k-1}$; donc $X = Y + \left(\frac{-h}{k-1}\right)$. Comme Y suit $VP\left(\frac{k}{k-1}, x_0 + \frac{h}{k-1}\right)$

d'après $\underbrace{\text{Q4 a)}}_{\text{Si } X \hookrightarrow VP(\alpha, x_0) \text{ alors } X+\beta \hookrightarrow VP(\alpha, x_0+\beta, -\beta)}$ X suit $VP\left(\frac{k}{k-1}, x_0 + \frac{h}{k-1} + \frac{(-h)}{k-1}, -\left(-\frac{h}{k-1}\right)\right) = VP\left(\frac{k}{k-1}, x_0, \frac{h}{k-1}\right)$.

CL.. X suit $VP\left(\frac{k}{k-1}, x_0, \frac{h}{k-1}\right)$ (... lorsque $\Pi_X(x) = kx + h$ pour $x \geq x_0$).

C Un exemple statistique : la répartition des revenus

Remarque. cette partie est intéressante mais il est très difficile de "lire" correctement les graphiques proposés. De plus il faut recadrer la règle !

Q1 a) Il semble que la droite passe par les points de coordonnées (100 ; 19,8,5) et (500, 845). Or $\frac{845-19,8,5}{500-400} = 1,61625$

Notons k ce coefficient directeur de la droite D.

Nous retiendrons : $k \simeq 1,6$

Avec ma règle
800 ≃ 12,5 cm
$x = 500$ donne une ordonnée de 13,2 cm ; $\frac{13,2}{12,5} \times 800 = 844,8$
donc 845, même méthode pour $x = 100$

Remarque.. Le rapporteur donne un angle entre la droite et l'axe des abscisses de 58° 30"
La tangente est sensiblement 1,63 … alors !

b) Le nuage de point présentant une "forme allongée" on peut considérer que Π est (presque) une fonction affine. $k \simeq 1,6 > 1$ et Q4c autorisent à modéliser la distribution des revenus par une loi de Pareto à trois paramètres

c) • $\alpha = \frac{k}{k-1} \simeq 2,66$

• Si h est l'ordonnée à l'origine de la droite. $C = \frac{h}{k-1}$.

Il apparaît que : * $h \simeq 32$. Nous retiendrons $C \simeq 53$

* $\frac{0,5\text{ cm}}{12,5\text{ cm}} \times 800 = 32$

d) $E(X) = \Pi(x_0)$; $\Pi(x_0) = 75$ KF. x_0 est l'abscisse du point de la droite dont l'ordonnée est 75. $x_0 \simeq 27$ ($75 = E(X) = x_0 \frac{\alpha}{\alpha-1} + \frac{c}{\alpha-1}$ fournit $\alpha \simeq 26,88$!)

Remarque.. Si nous retenons $y = 1,61625x + 32$ pour équation de la droite D il vient $x_0 = \frac{75-32}{1,61625} \simeq 26,6$. Avec $y = 1,6x + 32$: $x_0 \simeq 26,875$

Q2 a) La droite Δ semble passer par les points de coordonnées (7, 0), (5 ; 5,2) ce qui fournit une pente de $-2,6$.

b) Δ approxime le nuage de point.

On peut donc considérer que $\ln(1000(1-F(x)))$ est une fonction affine de $\ln(x+c)$.

Par conséquent $\ln(1000(1-F(x))) = a \ln(x+c) + b$

ce qui donne $F(x) = 1 - \frac{e^b}{1000}(x+c)^a = 1 - \frac{\left(\left(\frac{e^b}{1000}\right)^{-\frac{1}{a}} - c + c\right)^{-a}}{(x+c)^{-a}}$. Ceci rappelle la fonction de répartition d'une loi de Pareto $P\left(-a, \left(\frac{e^b}{1000}\right)^{-\frac{1}{a}} c, c\right)$

c) $\alpha = -a \simeq 2,6$. $\underline{\underline{\alpha \simeq 2,6}}$

b vaut pareillement $-7a$. Nous obtiendrons $b = 18,2$

Par conséquent $x_0 = \left(\frac{e^b}{1000}\right)^{-\frac{1}{a}} - C \simeq 76,95 - C$

Avec $C = 53$ nous obtenons $x_0 \simeq 24$ ... pas mal à la prise !

PARTIE II Courbe de concentration et inégalité des revenus

A Courbe de concentration et indice de Gini

(Q1) Ici le texte n'est pas clair. Au début on définit F pour $x \geqslant x_0$, donc on considère F comme une application de $[x_0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, puis au niveau de a) on parle de restriction de F à $[x_0, +\infty[$ ce qui sous-entend que F est la fonction de répartition de X, donc que F est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dans le premier cas F est dérivable en x_0 mais pas dans le second. Nous nous placerons dans le premier cas.

a) F est dérivable sur $[x_0, +\infty[$ (c'est une primitive)

$\forall x \in [x_0, +\infty[, \ F'(x) = f(x) > 0.$

F est donc continue et strictement croissante sur l'intervalle $[x_0, +\infty[$; F définit une bijection de $[x_0, +\infty[$ sur l'intervalle $F([x_0, +\infty[) = [F(x_0), \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)[= [0,1[$

Cl.. F définit une bijection de $[x_0, +\infty[$ sur $[0,1[$. Nous notons F^{-1} la bijection réciproque.

F^{-1} est définie, continue et strictement croissante sur $[0,1[$

$F^{-1}(0) = x_0$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} F^{-1}(x) = +\infty$

Notons aussi que F^{-1} est dérivable sur $[0,1[$ (F est dérivable sur $[x_0, +\infty[$ et F' ne prend pas la valeur 0 sur cet intervalle).

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} F^{-1}(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{E(X)} \displaystyle\int_{x_0}^{x} t f(t)\, dt = \dfrac{1}{E(X)} E(X) = 1$

Par composition il vient : $\lim\limits_{x \to 1^-} C(x) = 1$.

C se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$... que nous notons provisoirement $\hat{C}$.

F^{-1} est strictement croissante sur $[0,1[$ à valeurs dans $[x_0, +\infty[$ et φ est strictement croissante sur $[x_0, +\infty[$ $\left(\forall x \in [x_0, +\infty[, \ \varphi'(x) = \dfrac{1}{E(X)} x f(x) > 0\right)$

Donc $C = \varphi \circ F^{-1}$ est strictement croissante sur $[0,1[$.

$\hat{C}$ est donc strictement croissante sur $[0,1[$ et continue sur $[0,1]$. $\hat{C}$ est alors continue et strictement croissante sur $[0,1]$.

Finalement c se prolonge en une fonction continue et strictement croissante sur $[0,1]$.

Désormais nous confondrons c et $\tilde{c}$!

$c(0)=0$ et $c(1)=1$; c prend donc ses valeurs dans $[0,1]$. C'est même une bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]$.

Q2 a) F^{-1} est dérivable sur $[0,1[$ et à valeurs dans $[x_0,+\infty[$ (voir plus haut)

φ est dérivable sur $[x_0,+\infty[$ ($\forall x\in[x_0,+\infty[,\ \varphi(x)=\frac{1}{E(X)}\int_{x_0}^{x} t f(t)dt$).

Donc $\varphi\circ F^{-1}$ est dérivable sur $[0,1[$.

ie... c est dérivable sur $[0,1[$.

$\forall x\in[x_0,+\infty[,\ \varphi'(x)=\frac{1}{E(X)}x f(x)$

$\forall t\in[0,1[,\ c'(t)=(F^{-1})'(t)\ \varphi'(F^{-1}(t))=(F^{-1})'(t)\ \frac{1}{E(X)}\ F^{-1}(t)\ f(F^{-1}(t))=\frac{F^{-1}(t)}{E(X)}(F^{-1})'(t)f(F^{-1}(t))$

$\forall t\in[0,1[,\ (F^{-1})'(t)=\frac{1}{F'(F^{-1}(t))}=\frac{1}{f(F^{-1}(t))}$ ($\forall x\in[x_0,+\infty[,\ F'(x)=f(x)$)

Donc $\forall t\in[0,1[,\ (F^{-1})'(t)\times f(F^{-1}(t))=1$

Par conséquent : $\forall t\in[0,1[,\ c'(t)=\frac{F^{-1}(t)}{E(X)}$.

▼ Remarque.. c est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $[0,1[$ et $\lim_{t\to1^-}c'(t)=+\infty$ ($\lim_{t\to1^-}F^{-1}(t)=+\infty$)

Donc $\lim_{t\to1^-}\frac{c(t)-c(1)}{t-1}=+\infty$; c n'est pas dérivable en 1. Sa courbe représentative admet au point d'abscisse 1 une demi-tangente "verticale". ▼

b) $\forall t\in[0,1[,\ c'(t)=\frac{1}{E(X)}F^{-1}(t)$. Or F^{-1} est strictement croissante sur $[0,1[$ et $E(X)$ est un réel strictement positif. Cela suffit pour dire que c' est (strictement) croissante sur $[0,1[$.

c est continue sur $[0,1]$, dérivable et de dérivée croissante sur $[0,1[$ donc c est convexe sur $[0,1]$.

Remarque.. ce résultat n'est pas un résultat raisonnable du programme de HEC. Alors le concepteur !

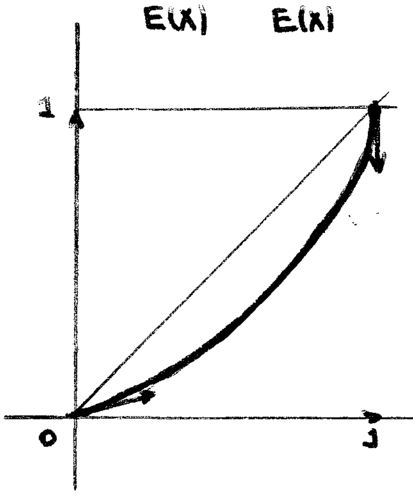
C est convexe donc sa courbe représentative est au dessous de ses cordes"
$C(0)=0$ et $C(1)=1$ donc la corde définie par les points de la courbe d'abscisses 0 et 1 est portée par la première bissectrice.

c] **La courbe représentative de C est située au dessous de la première bissectrice.**

▼ Remarque.. $\forall x \in [0,1]$, $C(x) \leq x$ ▼

c] $C'(0) = \dfrac{F^{-1}(0)}{E(X)} = \dfrac{x_0}{E(X)}$. $\lim\limits_{t \to 1^-} C'(t) = +\infty$ (vu plus haut)

d]



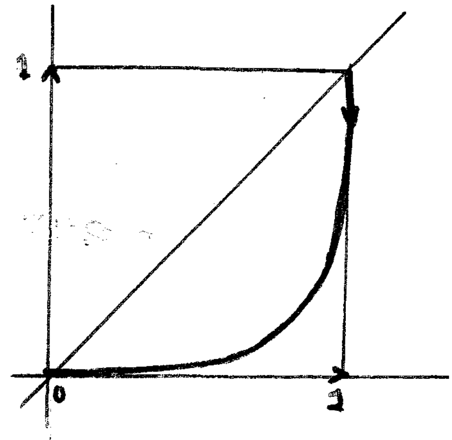
← Faible concentration

$I(X)$ est faible, donc "bonne" répartition des revenus

Forte concentration

$I(X)$ est "proche" de 1

La répartition des revenus n'est pas égalitaire.



B] Application : comparaison de quelques procédures d'imposition des revenus

Ici $X \hookrightarrow VP(\alpha, x_0)$ avec $\alpha > 1$. $E(X) = \frac{\alpha}{\alpha-1} x_0$

Q1 a] Soit $x \in [x_0, +\infty[$. $\varphi(x) = \dfrac{1}{E(X)} \displaystyle\int_{x_0}^{x} t\alpha \frac{x_0^\alpha}{t^{\alpha+1}}\,dt = \frac{\alpha-1}{\alpha x_0} \times \alpha x_0^\alpha \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{x_0}^{x} = (\alpha-1)x_0^{\alpha-1}\,\frac{x^{-\alpha+1} - x_0^{-\alpha+1}}{1-\alpha}$

donc $\varphi(x) = x_0^{\alpha-1}\left[\dfrac{1}{x_0^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}\right] = 1 - \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{\alpha-1}$

$\forall x \in [x_0, +\infty[$, $\varphi(x) = 1 - \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{\alpha-1}$.

b] Soit $t \in [0,1[$. $C(t) = \varphi(F^{-1}(t)) = 1 - \left(\dfrac{x_0}{F^{-1}(t)}\right)^{\alpha-1} = 1 - \left[\left(\dfrac{x_0}{F^{-1}(t)}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$

Or $t = F(F^{-1}(t)) = 1 - \left(\dfrac{x_0}{F^{-1}(t)}\right)^{\alpha}$; donc $\left(\dfrac{x_0}{F^{-1}(t)}\right)^{\alpha} = 1 - t$

Ceci donne $C(t) = 1 - (1-t)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$ pour $t \in [0,1[$. Comme $C(1) = 1$ ceci vaut encore pour $t = 1$.

Cl.. $\forall t \in [0,1]$, $C(t) = 1 - (1-t)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$.

c) Si 30% des individus ayant les plus hauts revenus se partagent 60% de la masse des revenus cela signifie que 70% des individus ayant les moins hauts revenus se partagent 40% de la masse des revenus.

Par conséquent $C(0,7) = 0,4$

Donc $1 - (1-0,7)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} = 0,4$; $0,6 = (0,3)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$; $\frac{\alpha-1}{\alpha} = \frac{\ln(0,6)}{\ln(0,3)}$;

$1 - \frac{1}{\alpha} = \frac{\ln(0,6)}{\ln(0,3)}$; $\frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{\ln(0,6)}{\ln(0,3)} = \frac{\ln(0,3) - \ln(0,6)}{\ln(0,3)} = -\frac{\ln 2}{\ln(0,3)}$.

$$\alpha = -\frac{\ln(0,3)}{\ln 2} \simeq 1,74.$$

d) $I(X) = 2\int_0^1 (t - C(t))dt = 2\int_0^1 [t - 1 + (1-t)^{1-\frac{1}{\alpha}}]dt = 2\left[\frac{t^2}{2} - t - \frac{(1-t)^{2-\frac{1}{\alpha}}}{2-\frac{1}{\alpha}}\right]_0^1$

$I(X) = 2\left[\frac{1}{2} - 1 - 0 - 0 + 0 + \frac{1}{2-\frac{1}{\alpha}}\right] = 2\left[\frac{\alpha}{2\alpha-1} - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2\alpha-1}$.

$I(X) = \frac{1}{2\alpha - 1}$. Notons que : $\lim_{\alpha \to 1} I(X) = 1$ et $\lim_{\alpha \to +\infty} I(X) = 0$.

Q2 a) $X \hookrightarrow VP(\alpha, x_0)$ donc $Y = (1-\lambda)X \hookrightarrow VP(\alpha, (1-\lambda)x_0)$.

Par conséquent : $I(Y) = \frac{1}{2\alpha-1}$.

b) $I(X) = I(Y)$

Par conséquent cette imposition n'a aucun effet sur l'inégalité des revenus.

Q3 a) $X \hookrightarrow VP(\alpha, x_0)$ donc $\sqrt{X} \hookrightarrow VP(2\alpha, \sqrt{x_0})$;

$h\sqrt{X} \hookrightarrow VP(2\alpha, h\sqrt{x_0})$

Finalement $T = h\sqrt{X} \hookrightarrow VP(2\alpha, h\sqrt{x_0})$.

On a donc : $I(T) = \dfrac{1}{4\alpha - 1}$.

$I(T) < I(X)$

Par conséquent corrige en partie l'inégalité des revenus.

(Q4) a) $X \hookrightarrow VP(\alpha, x_0)$ donc d'après AQ4a] $Z = X - a \hookrightarrow VP(\alpha, x_0 - a, a)$

$Z = X - a$ suit une loi de Pareto $VP(\alpha, x_0 - a, a)$.

Posons $\forall x \in [x_0 - a, +\infty[$, $F_Z(x) = \displaystyle\int_{x_0-a}^{x} f_Z(t)\,dt$ où $f_Z : t \mapsto f(t+a)$ (f_Z est une densité de $Z = X - a$).

$$\forall x \in [x_0 - a, +\infty[, \quad F_Z(x) = \int_{x_0-a}^{x} f_Z(t)\,dt = \int_{x_0-a}^{x} f(t+a)\,dt \underset{u = t+a}{=} \int_{x_0}^{x+a} f(u)\,du = F(x+a).$$

donc $\forall t \in [0,1[$, $t = F_Z(F_Z^{-1}(t)) = F(F_Z^{-1}(t) + a)$; par conséquent :

$$\forall t \in [0,1[, \quad F^{-1}(t) = F^{-1}\left[F(F_Z^{-1}(t) + a)\right] = F_Z^{-1}(t) + a.$$

$$\forall t \in [0,1[, \quad F_Z^{-1}(t) = F^{-1}(t) - a.$$

Posons $\forall x \in [x_0 - a, +\infty[$, $Q_Z(x) = \dfrac{1}{E(Z)} \displaystyle\int_{x_0-a}^{x} t f_Z(t)\,dt = \dfrac{1}{E(Z)} \int_{x_0-a}^{x} t f(t+a)\,dt = \dfrac{1}{E(Z)} \int_{x_0}^{x+a} (t-a) f(t)\,dt$

$$\forall x \in [x_0 - a, +\infty[, \quad Q_Z(x) = \frac{1}{E(Z)} \int_{x_0}^{x+a} t f(t)\,dt - \frac{a}{E(Z)} \int_{x_0}^{x+a} f(t)\,dt = \frac{E(X)}{E(Z)} Q(x+a) - \frac{a}{E(Z)} F(x+a)$$

$$\forall t \in [0,1[, \quad C_Z(t) = Q_Z(F_Z^{-1}(t)) = \frac{E(X)}{E(Z)} Q(F_Z^{-1}(t) + a) - \frac{a}{E(Z)} F(F_Z^{-1}(t) + a)$$

$$\forall t \in [0,1[, \quad C_Z(t) = \frac{E(X)}{E(Z)} Q(F^{-1}(t)) - \frac{a}{E(Z)} F(F^{-1}(t))$$

$\forall t \in [0,1[$, $C_Z(t) = \dfrac{E(X)}{E(Z)} C(t) - \dfrac{a}{E(Z)} t$. Ceci vaut encore pour $t = 1$ (en effet :

$\dfrac{E(X)}{E(Z)} \times 1 - \dfrac{a}{E(Z)} 1 = \dfrac{E(X) - a}{E(Z)} = \dfrac{E(X) - a}{E(X-a)} = 1$!)

$\forall t \in [0,1], \quad C_Z(t) = \frac{E(X)}{E(Z)} C(t) - \frac{a}{E(Z)} t$

Donc : $\forall t \in [0,1], \quad t - C_Z(t) = t - \frac{E(X)}{E(Z)} C(t) + \frac{a}{E(Z)} t = \frac{E(Z)+a}{E(Z)} t - \frac{E(X)}{E(Z)} C(t)$

Or $E(Z) = E(X-a) = E(X) - a$. Il vient alors :

$\forall t \in [0,1], \quad t - C_Z(t) = \frac{E(X)}{E(Z)}(t - C(t)) = \frac{E(X)}{E(X)-a}(t - C(t))$

Finalement : $\forall t \in [0,1], \quad t - C_Z(t) = \frac{E(X)}{E(X)-a}(t - C(t))$.

Remarque.. Il était plus rapide de calculer $C_Z(t)$ en utilisant le fait que $Z = X-a$ suit une loi de Pareto $\mathcal{P}(\alpha, x_0 - a, a)$.

L'intérêt de la démarche précédente est dans sa généralité ; nous n'avons utilisé pour obtenir C_Z que C et la relation $Z = X-a$.

c) $I(Z) = 2\int_0^1 (t - C_Z(t))\,dt = 2\,\frac{E(X)}{E(X)-a}\int_0^1 (t - C(t))\,dt = \frac{E(X)}{E(X)-a} I(X)$.

$I(Z) = \frac{E(X)}{E(X)-a} I(X)$.

Rappelons que : $I(X) = \frac{1}{2\alpha-1}$ et $E(X) = \frac{\alpha}{\alpha-1} x_0$.

Il vient alors : $I(Z) = \frac{\alpha x_0}{\alpha x_0 - (\alpha-1)a} \cdot \frac{1}{2\alpha-1}$.

d) Notons ici que : $\frac{\alpha x_0}{\alpha x_0 - (\alpha-1)a} > 1$, donc $I(Z) > I(X)$

Cette imposition accentue l'inégalité des revenus ce qui était évident dès le départ dans la mesure où on retire la même chose à tout le monde !