HEC 1996
Mathématique II
option Scientifique

Un banquier s'est imposé de vendre une action en dix jours ouvrables. Chaque jour, suivant le cours du jour, il décide de vendre ou d'attendre dans l'espoir de vendre mieux plus tard. S'il n'a pas réalisé la vente au neuvième jour, il s'impose de vendre son action au dixième jour. Quelle stratégie va-t-il choisir?
Le problème ci-dessous propose, dans un cadre théorique précis, d'évaluer diverses stratégies pour de tels choix en chaîne.
On considère une suite d'expériences aléatoires identiques et indépendantes, à laquelle on associe une suite $(X_i)_{i\geqslant 1}$ de variables aléatoires, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et toutes de même loi.
On considère un entier naturel non nul n.
Si n est égal à 1, on définit le gain G_1 par : $G_1 = X_1$
Si n est supérieur ou égal à 2, on se donne pour chaque $i \in \{1, \dots, n-1\}$ un seuil σ_i et on définit le gain G_n par :

- si, pour tout i strictement inférieur à n, $X_i < \sigma_i$, alors $G_n = X_n$
- et sinon, $G_n = X_k$ où k est le plus petit rang i tel que $X_i \geqslant \sigma_i$.

Le gain G_n est une variable aléatoire dont l'espérance est notée g_n. (Dans l'exemple introductif du banquier, n est égal à 10, X_i représente le cours de l'action au jour de rang i et G_{10} est égal au prix de la vente).
On étudie en partie I., trois stratégies dans le cas d'expériences aléatoires discrètes et en partie II., trois stratégies dans le cas d'expériences aléatoires continues. On étudie dans le préliminaire une suite numérique que l'on retrouve à la fin de la partie Il. Les parties I et Il sont dans une large mesure indépendantes.

Préliminaire

On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, par $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2}$

.1. a) Ecrire un programme en Pascal qui calcule et affiche les 100 premiers termes de la suite.
b) A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de u_{100} à 10^{-2} près.

.2. a) Etudier la fonction h définie par : $\forall x \in [0;1] \quad h(x) = \dfrac{1+x^2}{2}$
b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
c) Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

.3. On pose pour tout n, entier naturel non nul : $\quad v_n = 1 - u_n$

a) Montrer que : $\forall n \geqslant 1 \quad \dfrac{1}{v_{n+1}} - \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{2 - v_n}$. En déduire : $\forall n \geqslant 1 \quad \dfrac{1}{v_n} \geqslant \dfrac{n+3}{2}$
b) Montrer que : $\forall x \in [0,1] \quad \dfrac{1}{2-x} \leqslant \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2}$. En déduire : $\forall n \geqslant 1 \quad \dfrac{1}{v_{n+1}} - \dfrac{1}{v_n} \leqslant \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n+3}$.
Montrer que : $\forall n \geqslant 2 \quad \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k} \leqslant \ln(n)$ où $\ln(n)$ désigne le logarithme népérien de n.
En déduire : $\forall n \geqslant 2 \quad \dfrac{1}{v_n} \leqslant \dfrac{n+2}{2} + \ln(n+2)$

c) Déterminer un équivalent de v_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie I *Exemples d'expériences aléatoires discrètes.*

Dans cette partie r **est un entier impair**, supérieur ou égal à 3, et on suppose que, pour tout i entier naturel non nul, la variable aléatoire X_i est discrète et équirépartie sur l'ensemble $\left\{0,\ \frac{1}{r},\ \frac{2}{r},\ \dots,\ \frac{r}{r}\right\}$ (chacune des $r+1$ valeurs étant prise avec la même probabilité).

I.1. *Première stratégie.*
On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\sigma_1 = 0$. On a donc, pour tout entier naturel n non nul, $G_n = X_1$.
Calculer l'espérance g_n de la variable aléatoire G_n. (On rappelle que : $\sum\limits_{j=1}^{k} j = \dfrac{k(k+1)}{2}$).

I.2. *Deuxième stratégie.*
On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $\quad \sigma_i = 0,5$.

a) Calculer $P(X_1 < 0,5)$.

b) Exprimer, en fonction des variables $X_1, \dots, X_n$, l'événement $(G_n = \frac{j}{r})$ pour $j \in \left\{0,\ 1,\ \dots,\ \frac{r-1}{2}\right\}$ puis pour $j \in \left\{\frac{r+1}{2},\ \dots,\ r\right\}$.
En déduire que la loi de G_n est donnée par :
$$\forall j \in \left\{0,\ 1,\ \dots,\ \frac{r-1}{2}\right\} \qquad P(G_n = \frac{j}{r}) = \frac{2}{r+1}\frac{1}{2^n}$$
$$\forall j \in \left\{\frac{r+1}{2},\ \dots,\ r\right\} \qquad P(G_n = \frac{j}{r}) = \frac{2}{r+1}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

c) Calculer g_n. Montrer que la suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
Déterminer la limite de g_n quand n tend vers $+\infty$ avec r fixé. Pouvait-on prévoir ce résultat?
Déterminer la limite de g_n quand r tend vers $+\infty$ avec n fixé.

I.3. *Troisième stratégie.*
On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $\quad \sigma_i = 1$.

a) Exprimer, en fonction des variables $X_1, \dots, X_n$, l'événement $(G_n = \frac{j}{r})$ pour $j \in \{0,\ 1,\ \dots,\ r-1\}$.
En déduire la loi de G_n.

b) Calculer g_n Montrer que la suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
Déterminer la limite de g_n quand n tend vers $+\infty$ avec r fixé. Pouvait-on prévoir ce résultat?
Déterminer la limite de g_n quand r tend vers $+\infty$ avec n fixé.

I.4. Comparer brièvement les trois stratégies de la partie I..

Partie II *Exemples d'expériences aléatoires continues.*

Dans cette partie, on suppose que, pour tout entier naturel non nul i, la variable aléatoire X_i suit une loi de probabilité uniforme sur $[0,1]$; elle admet donc une densité φ définie par:

$$\forall t \in [0,1] \quad \varphi(t) = 1 \qquad \text{et sinon} \quad \varphi(t) = 0$$

On dit que les variables $(X_i)_{i \geqslant 1}$ sont indépendantes si et seulement si, pour tout entier naturel n non nul et pour tout $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ les événements $(X_1 \leqslant t_1), \ldots, (X_n \leqslant t_n)$ sont mutuellement indépendants ; on a alors, pour tout $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \leqslant t_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant t_i)$. (Les variables étant des variables à densité, les égalités ci-dessus sont encore vraies si on remplace $(X_i \leqslant t_i)$ par $(X_i < t_i)$.
On note F_n la fonction de répartition de G_n.

II.1. Déterminer F, la fonction de répartition de X_1

II.2. *Première stratégie.*
On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\sigma_1 = 0$.
Calculer l'espérance g_n de la variable aléatoire G_n.

II.3. *Deuxième stratégie.*
Soit un réel $\alpha \in [0,1[$. On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $\sigma_i = \alpha$.

a) Que vaut $F_n(t)$ pour t n'appartenant pas à $[0,1[$?
Pour $t \in [0, \alpha[$, décrire l'événement $(G_n \leqslant t)$ et en déduire $F_n(t)$.
Pour $t \in [\alpha, 1[$, décrire l'événement $(G_n > t)$ et en déduire $F_n(t)$.
Montrer que G_n admet une densité f_n définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \alpha^{n-1} & \text{si } t \in [0, \alpha[\\ \dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha} & \text{si } t \in [\alpha, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) Calculer g_n en fonction de α. Montrer que la suite $(g_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante.
Déterminer la limite de g_n quand n tend vers $+\infty$. Pouvait-on prévoir ce résultat?

c) Déterminer la valeur de α telle que g_2 soit maximum.

d) Dans cette question, $\alpha = 0,5$.
Donner la valeur de g_n. Quelle remarque peut-on faire en comparant ce résultat avec celui de la deuxième stratégie de la partie I.

II.4. *Troisième stratégie.*
Soit $(a_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de réels telle que, pour tout entier k non nul, $0 \leqslant a_k < 1$.
Pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, on pose $\sigma_i = a_{n-i}$.

a) En utilisant les résultats de II.2., montrer que G_1 admet une densité et une espérance. Donner la valeur de g_1.

b) En utilisant les résultats de II.3., montrer que G_2 admet une densité et une espérance. Donner la valeur de g_2 en fonction de a_1.
Déterminer la valeur de a_1 qui maximise g_2.

c) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On suppose que G_n admet une densité notée f_n.
On suppose de plus que, pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$, G_k admet une espérance g_k vérifiant $g_k \in [0; 1[$ et que, pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $a_k = g_k$.
Et donc la variable aléatoire G_{n+1} est associée aux seuils : $\sigma_1 = a_n$, $\sigma_2 = g_{n-1}, \ldots, \sigma_n = g_1$.
Montrer que : $\forall t \in [0, a_n[\quad F_{n+1}(t) = a_n F_n(t)$
$\forall t \in [a_n, 1[\quad F_{n+1}(t) = t - a_n + a_n F_n(t)$
En déduire que G_{n+1} admet une densité f_{n+1} et donner une relation entre f_{n+1} et f_n.
En déduire que G_{n+1} admet une espérance g_{n+1} vérifiant $g_{n+1} = a_n g_n + \dfrac{1}{2}(1 - a_n^2)$.
Déterminer la valeur de a_n qui maximise g_{n+1}
Montrer que, pour cette valeur de a_n, $g_{n+1} = \dfrac{1 + g_n^2}{2}$ et que $g_{n+1} \in [0; 1[$

d) On construit ainsi, par récurrence, une suite de variables aléatoires $(G_n)_{n \geqslant 1}$ dont les espérances vérifient : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad g_{n+1} = \dfrac{1 + g_n^2}{2}$
Quelle est alors la limite de la suite $(g_n)_{n \geqslant 1}$?

II.5. Comparer les trois stratégies de la partie I..