Exercice principal S82

1. Question de cours : Condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable.

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n ($n \geqslant 2$) et φ un endomorphisme de E.
On note id_E l'endomorphisme identité de E, 0_E l'endomorphisme nul de E et on pose : $\varphi^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^k = \varphi \circ \varphi^{k-1}$.

On dit que φ est cyclique s'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $\big(x_0, \varphi(x_0), \ldots, \varphi^{n-1}(x_0)\big)$ soit une base de E.

2. On suppose que $\varphi^n = 0_E$ et $\varphi^{n-1} \neq 0_E$.

a) Montrer que φ est cyclique.

b) Déterminer les valeurs propres de φ. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

3. On suppose que φ est cyclique. Soit ψ un endomorphisme de E tel que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.

En utilisant une base du type $\big(x_0, \varphi(x_0), \ldots, \varphi^{n-1}(x_0)\big)$, établir l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\psi = P(\varphi)$.

4. On suppose que φ est cyclique. On note x_0 un vecteur de E vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\big(x_0, \varphi(x_0), \ldots, \varphi^{n-1}(x_0)\big) \text{ est une base de } E \text{ et } \varphi^n(x_0) = x_0\,.$$

a) Montrer que $\varphi^n = \mathrm{id}_E$. En déduire que φ est bijectif.

b) Quelles sont les valeurs propres possibles de φ ?

c) Montrer que φ est diagonalisable.

Exercice sans préparation S82

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose : $Y = \lfloor X \rfloor$ et $Z = X - Y$.

1. Montrer que Y est une variable aléatoire et déterminer sa loi. Que peut-on dire de $Y + 1$?

2. Montrer que Z est une variable aléatoire et déterminer sa loi.

3. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice principal S 81

(Q1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes

i) A est diagonalisable.

ii) A est semblable à une matrice diagonale.

iii) Il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A.

iv) L'endomorphisme canoniquement associé à A est diagonalisable.

v) Il existe un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n tel que la matrice de cet endomorphisme dans une base de cet espace vectoriel soit A.

vi) $\sum_{\lambda \in Sp A} \dim SEP(A,\lambda) = n$.

vii) $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in Sp A} SEP(A,\lambda)$.

(Q2) a) Il existe un élément x_0 de E tel que $\varphi^{n-1}(x_0) \neq 0$ car $\varphi^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$

Montrons que $\mathcal{F} = (x_0, \varphi(x_0), \dots, \varphi^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

Comme $\mathcal{F}$ est une famille de cardinal égal à la dimension n de E il suffit de montrer que cette famille est libre. Supposons le contraire. Il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $(\lambda_0, \lambda_1 \dots, \lambda_{n-1}) \neq 0_{\mathbb{C}^n}$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \varphi^k(x_0) = 0_E$.

$\{i \in [\![0, n-1]\!] \mid \lambda_i \neq 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Elle possède un plus petit élément i_0.

Alors $\lambda_{i_0} \neq 0$ et $\sum_{i=i_0}^{n-1} \lambda_i \varphi^i(x_0) = 0_E$.

Ainsi $0_E = \varphi^{n-1-i_0}(0_E) = \varphi^{n-1-i_0}\left(\sum_{i=i_0}^{n-1} \lambda_i \varphi^i(x_0)\right) = \sum_{i=i_0}^{n-1} \lambda_i \varphi^{n-1-i_0+i}(x_0)$.

Notons que $\varphi^{n-1-i_0+i}(x_0) = \varphi^{n-1}(x_0) \neq 0_E$ si $i = i_0$ et si $i \in [\![i_0+1, n-1]\!]$,

$\varphi^{n-1-i_0+i}(x_0) = \varphi^{i-i_0-1}(\varphi^n(x_0)) = \varphi^{i-i_0-1}(0_E) = 0_E$ car $\varphi^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ sauf si $i = n-1 \dots$

Ainsi $0_E = \lambda_{i_0} \varphi^{n-1}(x_0)$ et $\varphi^{n-1}(x_0) \neq 0_E$. Donc $\lambda_{i_0} = 0$. Ceci est impossible !!!

Ceci a donné de montrer que $\mathcal{F} = (x_0, \varphi(x_0), \dots, \varphi^{n-1}(x_0))$ est une famille libre de E et même une base de E. Ainsi φ est cyclique.