LYON 1999 PREMIER PROBLÈME

Problème qui ne nécessite que peu de connaissances en algèbre bilinéaire.

$n \in [\![3, +\infty[\![$. A_n est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le terme général $a_{i,j}$ est égal à 1 si $|i-j| = 1$ et égal à 0 sinon. Ainsi, par exemple, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q0 a) a et b sont deux réels. On suppose b non nul. Préciser la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{k+2} = a\, u_{k+1} + b\, u_k$ et en donner une base.

b) α et β sont deux réels : $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = ??$

Q1 Montrer que A_3 est diagonalisable.

Déterminer une matrice inversible P de $M_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $A_3 = PDP^{-1}$.

Q2 Soit $\theta \in]0; \pi[$. On désigne par S_θ l'ensemble des suites réelles $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $s_0 = 0$ et pour tout entier naturel k, $s_{k+2} - 2\cos\theta\, s_{k+l} + s_k = 0$.

Montrer que, si la suite $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à S_θ, alors pour tout entier naturel k : $s_k = s_1 \dfrac{\sin k\theta}{\sin\theta}$.

En déduire que S_θ est un espace vectoriel réel de dimension 1.

Q3 Soit λ une valeur propre réelle de A_n et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ.

On note m le plus grand des réels $|x_1|,\ |x_2|, \ldots, |x_n|$.

a) Montrer : $\begin{cases} \bullet\ \lambda x_1 = x_2 \\ \bullet\ \forall k \in [\![2, n-1]\!],\ \lambda x_k = x_{k-1} + x_{k+1} \\ \bullet\ \lambda x_n = x_{n-1} \end{cases}$.

Montrer pour tout entier k de $[\![1, n]\!]$: $|\lambda|\,|x_k| \leqslant 2m$, et en déduire $|\lambda| \leqslant 2$.

b) On suppose $|\lambda| < 2$. Montrer qu'il existe un unique $\theta \in]0, \pi[$ tel que $\lambda = 2\cos\theta$.

Montrer que la suite $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de S_θ déterminée par $s_1 = x_1$ vérifie : $\begin{cases} \bullet \forall k \in [\![1, n]\!],\ s_k = x_k \\ \bullet s_{n+1} = 0 \end{cases}$.

En déduire qu'il existe un entier p de $[\![1, n]\!]$ tel que $\theta = \dfrac{p\pi}{n+1}$.

Pour tout entier p de $[\![1, n]\!]$, on note $\theta_p = \dfrac{p\pi}{n+1}$, $\lambda_p = 2\cos\theta_p$ et $X_p = \begin{pmatrix} \sin\theta_p \\ \sin 2\theta_p \\ \vdots \\ \sin n\theta_p \end{pmatrix}$.

c) Soit $p \in [\![1, n]\!]$. Montrer que λ_p est valeur propre de A_n et que X_p, est un vecteur propre associé à λ_p.

d) Montrer que $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ est l'ensemble de toutes les valeurs propres de A_n et que $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\boxed{\textbf{Q4}}$ Soit U_n, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $u_{p,q} = \sin \dfrac{pq\pi}{n+1}$, $\quad (p,q) \in [\![1,n]\!]^2$.

Montrer que U_n est inversible et déterminer la matrice D_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $D_n = U_n^{-1} A_n U_n$.

$\boxed{\textbf{Q5}}$ a) Montrer pour tout couple (p,q) de $[\![1,n]\!]^2$: $\quad \lambda_p {}^t X_p X_q = \lambda_q {}^t X_p X_q$.

En déduire que pour tout couple (p,q) de $[\![1,n]\!]^2$ tel que $p \neq q$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin k\theta_p \sin k\theta_q = 0$.

b) Montrer, pour tout p de $[\![1,n]\!]$, $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos 2k\theta_p = 0$.

En déduire que, pour tout entier p de $[\![1,n]\!]$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin^2 k\theta_p = \frac{n+1}{2}$.

c) En déduire $\quad U_n^2 = \dfrac{n+1}{2} I_n$, puis $A_n = \dfrac{2}{n+1} U_n\, D_n\, U_n$.

<u>Remarque</u> *Je ne ferai pas, dans ce qui suit, l'identification des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ aux éléments de $\mathbb{R}^n$ proposée par le texte car elle n'apporte rien ici. Le produit scalaire utilisé sera donc le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.*

Je conserverai le parti pris de ne pas parenthèser les expressions du type $\sin k\theta$.

1. A_3 est une matrice symétrique et réelle donc $\boxed{A_3 \text{ est diagonalisable}}$ ... A_n aussi.

Cherchons les valeurs propres de A_3. Soit λ un réel. Déterminons une réduite de Gauss de $A_3 - \lambda I_3$.

$A_3 - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$. Les opérations $L_1 \leftrightarrow L_2$ et $L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1$ donnent successivement : $\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$. Les opérations $L_2 \leftrightarrow L_3$ et $L_3 \leftarrow L_3 + (\lambda^2 - 1)L_2$ donnent successivement : $\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda^2-1)+\lambda \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda^2-2) \end{pmatrix}$ est alors une réduite de Gauss de $A_3 - \lambda I_3$.

Ainsi $A_3 - \lambda I_3$ est non inversible si et seulement si $-\lambda(\lambda^2 - 2) = 0$; c'est à dire si et seulement si λ vaut 0, $\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$.

$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A_3 \text{ sont donc : } \sqrt{2},\ 0 \text{ et } -\sqrt{2}}$.

Cherchons les sous-espaces propres de A_3. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$A_3X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 \text{ et } z = -x.$$

$$\boxed{\text{Le sous-espace propre de } A_3 \text{ associé à la valeur propre 0 est la droite vectorielle de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ engendrée par } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.}$$

Soit ε un élément de $\{-1, 1\}$. Notons que : $\varepsilon^2 = 1$.

$$A_3X = \varepsilon\sqrt{2}\ X \Leftrightarrow \begin{cases} y = \varepsilon\sqrt{2}\ x \\ x + z = \varepsilon\sqrt{2}\ y \\ y = \varepsilon\sqrt{2}\ z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \varepsilon\sqrt{2}\ x \\ z = x \\ 2x = \varepsilon\sqrt{2}\ y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \varepsilon\sqrt{2}\ x \\ z = x \\ y = \dfrac{2}{\varepsilon\sqrt{2}}\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon^2}\ \varepsilon x = \varepsilon\sqrt{2}\ x \end{cases}.$$

$A_3X = \varepsilon\sqrt{2}\ X \Leftrightarrow z = x$ et $y = \varepsilon\sqrt{2}\ x$.

$$\boxed{\text{Le sous-espace propre de } A_3 \text{ associé à la valeur propre } \sqrt{2} \text{ (resp. } -\sqrt{2}) \text{ est la droite vectorielle de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ engendrée par } \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (resp. } \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}).}$$

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de trois vecteurs propres de A_3 associés à trois valeurs propres distinctes $\sqrt{2}$, 0 et $-\sqrt{2}$; $\mathcal{B}$ est donc une famille libre de trois vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3.

$$\boxed{\text{Ainsi } \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à $\mathcal{B}$ et posons $D = P^{-1}A_3P$. D'après ce qui précède :

$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ est inversible}}$ comme matrice de passage, $\boxed{D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ est diagonale}}$ et $\boxed{A_3 = PDP^{-1}}$.

<u>Exercice</u> *Déterminer P^{-1}. Trouver une matrice orthogonale Q telle que : $A_3 = QD{}^tQ$.*

2. Le cours nous indique que l'ensemble S'_θ des suites réelles $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout entier naturel k, $s_{k+2} - 2\cos\theta\ s_{k+1} + s_k = 0$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2.
L'équation caractéristique attachée aux éléments de S'_θ est $x^2 - 2\cos\theta\ x + 1 = 0$. Cette équation admet deux solutions complexes et conjuguées : $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. Ainsi $\Big((\cos k\theta)_{k\in\mathbb{N}}, (\sin k\theta)_{k\in\mathbb{N}}\Big)$ est une base de S'_θ.

Soit $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un élément de S_θ. $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est encore un élément de S'_θ. Par conséquent il existe deux réels α et β tel que, pour tout élément k de $\mathbb{N}$: $s_k = \alpha\cos k\theta + \beta\sin k\theta$. On a alors $0 = s_0 = \alpha$ et $s_1 = \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta$; donc $\alpha = 0$ et $\beta = s_1\ \dfrac{1}{\sin\theta}$.

Ainsi si $(s_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de S_θ : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ s_k = s_1 \dfrac{\sin k\theta}{\sin\theta}}$.

En particulier $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à la droite vectorielle de S'_θ engendrée par la suite $(\sin k\theta)_{k\in\mathbb{N}}$.

Réciproquement soit $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un élément de cette droite. Il existe un réel β tel que $\forall k \in \mathbb{N},\ s_k = \beta\ \sin k\theta$.

Par conséquent $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à S'_θ et $s_0 = \beta\ \sin(0\theta) = 0$; donc $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un élément de S_θ.

Finalement S_θ est la droite vectorielle de S'_θ engendrée par la suite $(\sin k\theta)_{k\in\mathbb{N}}$. $S_\theta = \operatorname{Vect}\Big((\sin k\theta)_{k\in\mathbb{N}}\Big)$.

Ainsi $\boxed{S_\theta \text{ est un espace vectoriel réel de dimension } 1}$.

3. a. λ est une valeur propre de A_n et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A_n associé à λ.

$A_nX = \lambda X$ donc $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; soit encore $\left\{\begin{array}{c} x_2 = \lambda x_1 \\ x_1 + x_3 = \lambda x_2 \\ \ldots\ldots \\ x_{k-1} + x_{k+1} = \lambda x_k \\ \ldots\ldots \\ x_{n-1} = \lambda x_n \end{array}\right.$.

Ceci donne enfin : $\boxed{\begin{cases} \bullet \quad \lambda x_1 = x_2 \\ \bullet \quad \forall k \in \{2, \ldots, n-1\},\ \lambda x_k = x_{k-1} + x_{k+1} \\ \bullet \quad \lambda x_n = x_{n-1} \end{cases}}$.

Observons que ce système est exactement équivalent à : $A_nX = \lambda X$.

Notons que $m = \displaystyle\operatorname*{Max}_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$ est strictement positif car X n'est pas nul.

$|\lambda||x_1| = |\lambda x_1| = |x_2| \leqslant m \leqslant 2m$ et $|\lambda||x_n| = |\lambda x_n| = |x_{n-1}| \leqslant m \leqslant 2m$.

De plus si k appartient à $\{2, \ldots, n-1\}$: $|\lambda||x_k| = |\lambda x_k| = |x_{k-1} + x_{k+1}| \leqslant |x_{k-1}| + |x_{k+1}| \leqslant m + m = 2m$.

Finalement $\boxed{\text{pour tout entier } k \text{ de } \{1, \ldots, n\},\ |\lambda||x_k| \leqslant 2m}$.

Ainsi $\displaystyle\operatorname*{Max}_{1\leqslant k\leqslant n} (|\lambda||x_k|) \leqslant 2m$ donc $|\lambda| \displaystyle\operatorname*{Max}_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k| \leqslant 2m$. Ceci donne encore $|\lambda| m \leqslant 2m$ donc $|\lambda| \leqslant 2$ car m est strictement positif.

Par conséquent $\boxed{\text{si } \lambda \text{ est une valeur propre de } A : |\lambda| \leqslant 2}$

<u>*Exercice*</u> *Soit $A = (a_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

Pour tout élément i de $[\![1, n]\!]$ on pose $D_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leqslant \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} |a_{ij}|\}$. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de A est contenu dans $D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n$ (disques de Gershgorin). Retrouver le résultat précédent.

b. Posons pour tout élément t de $]0, \pi[$, $u(t) = 2\cos t$. u est continue et dérivable sur $]0, \pi[$.

$\forall t \in]0, \pi[,\ u'(t) = -2\sin t < 0$. Ainsi u est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0, \pi[$.

u définit alors une bijection de $]0, \pi[$ sur $]\lim\limits_{t\to\pi}(2\cos t), \lim\limits_{t\to 0}(2\cos t)[=]-2, 2[$.

Comme λ est élément de $]-2, 2[$, $\boxed{\text{il existe un unique élément } \theta \text{ de }]0, \pi[\text{ tel que } \lambda = u(\theta) = 2\cos\theta.}$

D'après la question 2, la suite $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de S_θ déterminée par $s_1 = x_1$ est définie par : $\forall k \in \mathbb{N},\ s_k = x_1 \dfrac{\sin k\theta}{\sin\theta}$.
Montrons alors à l'aide d'une récurrence faible que : $\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ s_k = x_k$.

La propriété est vraie pour $k = 1$ car $s_1 = x_1$. Supposons la vraie jusqu'à k, k élément de $\{1, \ldots, n-1\}$ et montrons la pour $k+1$. $s_{k+1} = 2\cos\theta\ s_k - s_{k-1}$.
Si $k = 1$: $s_{k+1} = s_2 = 2\cos\theta\ s_1 - s_0 = \lambda s_1 = \lambda x_1 = x_2 = x_{k+1}$;
Si $k \geqslant 2$, d'après l'hypothèse de récurrence : $s_{k+1} = 2\cos\theta\ s_k - s_{k-1} = 2\cos\theta\ x_k - x_{k-1} = x_{k+1}$. Ceci achève la récurrence.

Finalement $\boxed{\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ s_k = x_k}$.

$s_{n+1} = 2\cos\theta\ s_n - s_{n-1} = 2\cos\theta\ x_n - x_{n-1} = \lambda x_n - x_{n-1} = 0$. $\boxed{s_{n+1} = 0}$.

Rappelons que $s_{n+1} = x_1 \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$. Ainsi $x_1 \times \sin(n+1)\theta = 0$. Donc $x_1 = 0$ ou $\sin(n+1)\theta = 0$.

Supposons x_1 nul. La suite $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est alors la suite nulle. Donc $\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ x_k = s_k = 0$. Ce qui donne $X = 0$!

x_1 n'étant pas nul $\sin(n+1)\theta$ l'est. $(n+1)\theta$ est alors un multiple de π. Il existe un élément p de $\mathbb{Z}$ tel que : $(n+1)\theta = p\pi$. Alors $\theta = \dfrac{p\pi}{n+1}$ et comme θ appartient à $]0, \pi[$: p appartient à $\{1, \ldots, n\}$.

$\boxed{\text{Il existe un entier } p \text{ de } \{1, \ldots, n\} \text{ tel que } \theta = \dfrac{p\pi}{n+1}}$.

c. Soit p un élément de $\{1, \ldots, n\}$. Notons déjà que X_p n'est pas nul car sa première composante $\sin\theta_p$ est différente de 0 ($\theta_p \in]0, \pi[$). Dès lors montrons que $A_n X_p = \lambda_p X_p$.

Il suffit de prouver que : $\begin{cases} \bullet \quad \sin 2\theta_p = \lambda_p \sin\theta_p \\ \bullet \quad \forall k \in \{2, \ldots, n-1\},\ \sin(k-1)\theta_p + \sin(k+1)\theta_p = \lambda_p \sin k\theta_p \\ \bullet \quad \sin(n-1)\theta_p = \lambda_p \sin n\theta_p \end{cases}$

• $\lambda_p \sin\theta_p = 2\cos\theta_p \sin\theta_p = \sin 2\theta_p$.

• Si p est dans $\{2, \ldots, n-1\}$, $\lambda_p \sin k\theta_p = 2\cos\theta_p \sin k\theta_p = 2\sin k\theta_p \cos\theta_p = \sin(k\theta_p + \theta_p) + \sin(k\theta_p - \theta_p)$.

$\lambda_p \sin k\theta_p = \sin(k-1)\theta_p + \sin(k+1)\theta_p$.

• $\lambda_p \sin n\theta_p = 2\cos\theta_p \sin n\theta_p = 2\sin n\theta_p \cos\theta_p = \sin(n\theta_p + \theta_p) + \sin(n\theta_p - \theta_p)$.

$\lambda_p \sin n\theta_p = \sin(n+1)\theta_p + \sin(n-1)\theta_p = \sin p\pi + \sin(n-1)\theta_p = \sin(n-1)\theta_p$.

Ceci achève de prouver que : $A_n X_p = \lambda_p X_p$.

Donc $\boxed{\text{pour tout élément } p \text{ de } \{1, \ldots, n\},\ \lambda_p \text{ est une valeur propre de } A_n \text{ et } X_p \text{ un vecteur propre associé}}$.

d. Pour tout élément p de $\{1,\ldots,n\}$, $\lambda_p = 2\cos\theta_p = 2\cos\left(\dfrac{p\pi}{n+1}\right) = u\left(\dfrac{p\pi}{n+1}\right)$.

Comme $\dfrac{\pi}{n+1}$, $\dfrac{2\pi}{n+1}$, ..., $\dfrac{n\pi}{n+1}$ sont n réels deux à deux distincts de $]0,\pi[$ et que u est injective sur cet intervalle, λ_1, λ_2, ..., λ_n sont n réels deux à deux distincts.

Ainsi λ_1, λ_2, ..., λ_n sont n valeurs propres deux à deux distinctes de A_n qui est une matrice d'ordre n et qui a donc au plus n valeurs propres deux à deux distinctes.

Par conséquent $\boxed{\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\} \text{ est l'ensemble des valeurs propres de } A_n}$.

$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ sont n vecteurs propres de A_n associés à n valeurs propres deux à deux distinctes donc $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ est une famille libre de n vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel de dimension n.

Finalement $\boxed{(X_1,X_2,\ldots,X_n) \text{ est une base de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

4. U_n n'est autre que la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$. Donc $\boxed{U_n \text{ est inversible}}$.

Comme $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A_n respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n : $\boxed{D_n = U_n^{-1}A_nU_n \text{ est la matrice diagonale } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}}$

5. a. Soit p et q deux éléments de $\{1,\ldots,n\}$.

A_n est une matrice symétrique donc : $< AX_p, X_q >=< X_p, AX_q >$.

Ainsi $< \lambda_pX_p, X_q >=< X_p, \lambda_qX_q >$. C'est à dire $\lambda_p < X_p, X_q >= \lambda_q < X_p, X_q >$.

Par conséquent : $\boxed{\lambda_p{}^tX_pX_q = \lambda_q{}^tX_pX_q}$. Ceci donne encore : $(\lambda_p - \lambda_q) < X_p, X_q >= 0$.

Dès lors si nous supposons $p \neq q$, λ_p et λ_q sont dictincts et : $< X_p, X_q >= 0$; X_p et X_q sont donc orthogonaux.

$\boxed{(X_1,X_2,\ldots,X_n) \text{ est une base orthogonale de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

<u>Remarque</u> *Ce n'est pas un scoop. A_n étant une matrice symétrique réelle, ses sous-espaces propres sont orthogonaux et donc la base $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ est orthogonale non ?*

Soient p et q deux éléments distincts de $\{1,\ldots,n\}$.

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta_p\ \sin k\theta_q = (\sin\theta_p, \sin 2\theta_p, \ldots, \sin n\theta_p)\begin{pmatrix} \sin\theta_q \\ \sin 2\theta_q \\ \vdots \\ \sin n\theta_q \end{pmatrix} = {}^tX_pX_q =< X_p, X_q >= 0.$$

Donc $\boxed{\forall (p,q) \in \{1,\ldots,n\}^2,\ p \neq q \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \sin k\theta_p\ \sin k\theta_q = 0}$.

b. Soit p un élément de $\{1,\dots,n\}$. $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(2k\theta_p)$ est la partie réelle de : $\sum\limits_{k=0}^{n} e^{i(2k\theta_p)}$. Or $e^{i(2\theta_p)}$ est différent de 1 car $2\theta_p = \frac{2p\pi}{n+1}$ n'est pas un multiple de 2π puisque p appartient à $\{1,\dots,n\}$; ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{i(2k\theta_p)} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{i(2\theta_p)}\right)^k = \frac{1-(e^{i(2\theta_p)})^{n+1}}{1-e^{i(2\theta_p)}}\cdot$$

Remarquons alors que : $1-(e^{i(2\theta_p)})^{n+1} = 1-e^{i(2p\pi)} = 0$. Ainsi : $\sum\limits_{k=0}^{n} e^{i(2k\theta_p)} = 0$.

Finalement $\boxed{\forall p \in \{1,\dots,n\},\ \sum\limits_{k=0}^{n} \cos(2k\theta_p) = 0}$.

Soit p un élément de $\{1,\dots,n\}$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin^2(k\theta_p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\cos(2k\theta_p)}{2} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \cos(2k\theta_p)$.

Ceci donne encore : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin^2(k\theta_p) = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \cos(2k\theta_p) + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}\cdot$

Donc $\boxed{\forall p \in \{1,\dots,n\},\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin^2(k\theta_p) = \frac{n+1}{2}}$.

c. Posons $U_n^2 = (v_{pq})$. Soient p et q deux éléments de $\{1,\dots,n\}$.

$\displaystyle v_{pq} = \sum_{k=1}^{n} u_{pk}u_{kq} = \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{pk\pi}{n+1}\sin\frac{kq\pi}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \sin k\theta_p\ \sin k\theta_q$.

Ainsi v_{pq} vaut 0 si p et q sont distincts et $\dfrac{n+1}{2}$ s'ils sont égaux. Donc $\boxed{U_n^2 = \dfrac{n+1}{2}\ I_n}$.

En particulier : $\displaystyle\Big(\frac{2}{n+1}\ U_n\Big)U_n = I_n$ donc $\displaystyle U_n^{-1} = \frac{2}{n+1}\ U_n$.

Alors $D_n = U_n^{-1}A_nU_n$ donne $\displaystyle A_n = U_nD_nU_n^{-1} = U_nD_n\Big(\frac{2}{n+1}U_n\Big)$.

Finalement : $\boxed{A_n = \dfrac{2}{n+1}\ U_nD_nU_n}$.

<u>Remarque</u> *On pourra pour compléter ce problème visiter ou revisiter HEC 90 MI et ESSEC 96 MI.*