
MATRICES

Exercice 1

 Matrice de passage.

\mathcal{B} , \mathcal{B}' et \mathcal{B}'' sont trois bases d'un espace vectoriel E sur \mathbb{K} .

$$\text{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}'') = \text{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \times \text{Pas}(\mathcal{B}', \mathcal{B}'')$$

$\text{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ est la matrice de Id_E relativement aux bases \mathcal{B}' et \mathcal{B} , c'est à dire $\text{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = M(Id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})$.

$\text{Pas}(\mathcal{B}', \mathcal{B}'')$ est la matrice de Id_E relativement aux bases \mathcal{B}'' et \mathcal{B}' , c'est à dire $\text{Pas}(\mathcal{B}', \mathcal{B}'') = M(Id_E, \mathcal{B}'', \mathcal{B}')$.

Or $M(Id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B}) \times M(Id_E, \mathcal{B}'', \mathcal{B}') = M(Id_E \circ Id_E, \mathcal{B}'', \mathcal{B}) = M(Id_E, \mathcal{B}'', \mathcal{B})$.

Ainsi $\text{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \times \text{Pas}(\mathcal{B}', \mathcal{B}'')$ est la matrice de Id_E relativement aux bases \mathcal{B}'' et \mathcal{B} ; c'est donc $\text{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}'')$

Exercice Retrouver le résultat à la main en posant : $\text{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = (a_{ij})$, $\text{Pas}(\mathcal{B}', \mathcal{B}'') = (b_{ij})$ et $\text{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}'') = (c_{ij})$.

Exercice 2

 Caractérisation des matrices de rang 1.

Q1. $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ est une matrice non nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $L = (\ell_1 \ell_2 \cdots \ell_n)$ une matrice non nulle de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

Ecrire la matrice $A = CL$ et montrer, en raisonnant sur les colonnes, qu'elle est de rang 1.

Q2. Enoncer et démontrer une réciproque.

Q1 $A = CL = (a_{ij})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A = \begin{pmatrix} c_1 \ell_1 & c_1 \ell_2 & \cdots & c_1 \ell_n \\ c_2 \ell_1 & c_2 \ell_2 & \cdots & c_2 \ell_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n \ell_1 & c_n \ell_2 & \cdots & c_n \ell_n \end{pmatrix}$. Ou $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{ij} = c_i \ell_j$.

Pour tout j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de A est $C_j(A) = \begin{pmatrix} c_1 \ell_j \\ c_2 \ell_j \\ \vdots \\ c_n \ell_j \end{pmatrix} = \ell_j C$.

Le rang de A est la dimension de $F = \text{Vect}(C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A)) = \text{Vect}(\ell_1 C, \ell_2 C, \dots, \ell_n C) \subset \text{Vect}(C)$.

Notons que $\text{Vect}(C)$ est de dimension 1 car C n'est pas nul(le). Donc F est de dimension 0 ou 1.

Si F est de dimension 0 : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\ell_i C = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$. Comme C n'est pas nul(le), $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\ell_i = 0$ et L est nul(le) ce qui n'est pas.

Ainsi F est de dimension 1 et A est de rang 1.

Q2 Réciproquement soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1. Montrons qu'il existe une matrice non nulle C de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et une matrice non nulle L de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ telles que : $A = CL$.

Notons encore, pour tout j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, $C_j(A)$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de A .

$\dim \text{Vect}(C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A)) = 1$ donc il existe un élément non nul $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que

$\text{Vect}(C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A)) = \text{Vect}(C)$. Alors $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \ell_j \in \mathbb{K}, C_j(A) = \ell_j C$.

Posons $L = (\ell_1 \ell_2 \dots \ell_n)$. L est un élément non nul de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ car au moins une des colonne de A n'est pas nulle (dans le cas contraire A est nulle et A est alors de rang 0).

$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, C_j(A) = \ell_j C$ donne $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{ij} = \ell_j c_i = c_i \ell_j$.

Par conséquent $A = CL$. Ce qui achève la preuve de la réciproque.

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang 1 si et seulement si il existe une matrice non nulle C de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et une matrice non nulle L de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ telles que : $A = CL$.

Exercice Reprendre l'exercice avec un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exercice 3 Formule d'inversion de Pascal. HEC 1998

Q1. n est un élément de \mathbb{N} . a) Vérifier rapidement que l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P(X)) = P(X + 1)$$

est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer φ^{-1} .

b) Déterminer la matrice M de φ dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Déterminer M^{-1} .

Q2. n est un élément de \mathbb{N} . On suppose que (a_0, a_1, \dots, a_n) et (b_0, b_1, \dots, b_n) appartiennent à \mathbb{R}^{n+1} et vérifient :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, b_j = \sum_{k=0}^j C_j^k a_k.$$

a) Trouver un lien entre les deux matrices lignes (a_0, a_1, \dots, a_n) , (b_0, b_1, \dots, b_n) et M .

b) En déduire, pour tout j dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, l'expression de a_j en fonction des nombres b_0, \dots, b_j .

Q3. Retrouver le nombre de surjections d'un ensemble de p éléments dans un ensemble de n éléments.

Q1 a) Si P est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ il en est de même pour $P(X + 1)$ donc φ est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2, \varphi(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X + 1) = \lambda P(X + 1) + Q(X + 1) = \lambda \varphi(P) + \varphi(Q)$. φ est linéaire.

Soit P un élément de $\text{Ker } \varphi$. $P(X + 1) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, P(x + 1) = 0$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = 0$ et P est nul.

$\text{Ker } \varphi = \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$. φ est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension finie.

φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Posons $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \psi(P) = P(X - 1)$. ψ est clairement un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

De plus : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \psi(\varphi(P)) = \psi(P(X + 1)) = P(X + 1 - 1) = P$. Ainsi $\psi \circ \varphi = \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$.

En composant à droite par φ^{-1} on obtient : $\psi = \varphi^{-1}$.

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi^{-1}(P) = P(X - 1)$.

b) $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \varphi(X^j) = (X + 1)^j = \sum_{i=0}^j C_j^i X^i$.

Ainsi $M = (m_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2}$ avec $\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, $m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ C_j^i & \text{si } i \leq j \end{cases}$.

c) $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\varphi^{-1}(X^j) = (X-1)^j = \sum_{i=0}^j C_j^i (-1)^{j-i} X^i$.

Ainsi $M^{-1} = (s_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2}$ avec $\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, $s_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ C_j^i (-1)^{j-i} & \text{si } i \leq j \end{cases}$.

Q2 a) Posons $L = (a_0 a_1 \dots a_n)$, $L' = (b_0 b_1 \dots b_n)$ et $L'' = LM$.

L'' est un élément de $\mathcal{M}_{1, n+1}(\mathbb{R})$. Mieux $L'' = (t_0 t_1 \dots t_n)$ avec $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $t_j = \sum_{i=0}^n a_i m_{ij} = \sum_{i=0}^j a_i C_j^i = b_j$.

Ainsi $L'' = L'$ ou $L' = LM$. Alors

$$(b_0 b_1 \dots b_n) = (a_0 a_1 \dots a_n)M.$$

b) $(b_0 b_1 \dots b_n) = (a_0 a_1 \dots a_n)M$ donc $(a_0 a_1 \dots a_n) = (b_0 b_1 \dots b_n)M^{-1}$.

Alors $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_j = \sum_{i=0}^n b_i s_{ij} = \sum_{i=0}^j b_i C_j^i (-1)^{j-i}$.

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_j = \sum_{i=0}^j C_j^i (-1)^{j-i} b_i.$$

Q3 Soit p un élément de \mathbb{N}^* . Pour tout n dans \mathbb{N}^* notons S_p^n le nombre de surjections d'un ensemble de p éléments dans un ensemble de n éléments. Par convention nous poserons $S_p^0 = 0$.

Soit n un élément de \mathbb{N}^* . Soit \mathcal{A} l'ensemble des applications d'un ensemble E ayant p éléments dans un ensemble F qui a n éléments.

Pour tout k dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ on note \mathcal{A}_k l'ensemble des applications de E dans F dont l'image a k éléments.

$\mathcal{A} = \bigcup_{k=0}^n \mathcal{A}_k$ et cette réunion est disjointe. Alors $n^p = \text{Card } \mathcal{A} = \sum_{k=0}^n \text{Card } \mathcal{A}_k$.

Dès lors cherchons pour k dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, $\text{Card } \mathcal{A}_k$.

Soit k un éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Pour construire un élément f de \mathcal{A}_k :

- On choisit l'image C de f ; il y a C_n^k possibilités car c'est une partie de k éléments de F et F a n éléments.
- On construit une surjection de E sur C . Il y a S_p^k possibilités car C a k éléments.

Ainsi $\text{Card } \mathcal{A}_k = C_n^k S_p^k$. Notons que ceci vaut encore pour $k = 0$ car $\text{Card } \mathcal{A}_0 = 0$ et $S_p^0 = 0$.

Dès lors $n^p = \text{Card } \mathcal{A} = \sum_{k=0}^n \text{Card } \mathcal{A}_k = \sum_{k=0}^n C_n^k S_p^k$.

Nous avons ainsi prouvé que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n^p = \sum_{k=0}^n C_n^k S_p^k$. Notons encore que ceci vaut pour $n = 0$.

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^p = \sum_{k=0}^n C_n^k S_p^k$.

Fixons n dans \mathbb{N} . Nous avons $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $j^p = \sum_{k=0}^j C_j^k S_p^k = \sum_{i=0}^j C_j^i S_p^i$!

Alors la question 2 donne : $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $S_p^j = \sum_{i=0}^j C_j^i (-1)^{j-i} i^p$.

En particulier $S_p^n = \sum_{i=0}^n C_n^i (-1)^{n-i} i^p$. Finalement :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, S_p^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} k^p$$

Remarque Si p est dans \mathbb{N}^* et si n appartient à $\llbracket p+1, +\infty \llbracket$, S_p^n est nul et ainsi $\sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} k^p = 0$

Exercice 4 Base duale. Transposée.

Q1. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base de E espace vectoriel de dimension p sur \mathbb{K} . E^* est l'espace vectoriel des formes linéaires sur E . Pour tout i dans $\llbracket 1, p \llbracket$, e_i^* est la forme linéaire sur E définie par :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \llbracket, e_i^*(e_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \neq i \end{cases}$$

Q1. Montrer que $\mathcal{B}^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_p^*)$ est une base de E^* .

Q2. E' est un espace vectoriel de dimension n sur \mathbb{K} et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ en est une base.

u est une application linéaire de E dans E' et $A = M(u, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Pour tout f dans E'^* on pose : $\varphi(f) = f \circ u$.

a) Montrer que φ est une application linéaire de E'^* dans E^* et que $M(\varphi, \mathcal{B}'^*, \mathcal{B}^*) = {}^t A$.

b) Montrer que u et φ ont même rang

(construire, si possible, une base (t_1, t_2, \dots, t_p) de E telle que $(u(t_1), u(t_2), \dots, u(t_r))$ soit une base de $\text{Im } u$ et $(t_{r+1}, t_{r+2}, \dots, t_p)$ une base de $\text{Ker } u$, compléter $(u(t_1), u(t_2), \dots, u(t_r)) \dots$ et déterminer $\text{Ker } \varphi$).

Que dire alors pour A et ${}^t A$?

Q1 $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ donc E^* a la même dimension p que E . Pour montrer que $\mathcal{B}^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_p^*)$ est une base de E^* il suffit donc de montrer que cette famille de cardinal p est libre. Aisé et sans gloire.

Montrons plutôt que \mathcal{B}^* est une base en utilisant la définition.

Soit f un élément de E^* . Montrons par analyse/synthèse qu'il existe un unique élément $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ de \mathbb{K}^p tel que

$$f = \sum_{k=1}^p \lambda_k e_k^*.$$

• Analyse/Unicité. Supposons que $f = \sum_{k=1}^p \lambda_k e_k^*$ avec $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ dans \mathbb{K}^p .

$\forall i \in \llbracket 1, p \llbracket, f(e_i) = \sum_{k=1}^p \lambda_k e_k^*(e_i) = \lambda_i e_i^*(e_i) = \lambda_i$. Ainsi $\forall i \in \llbracket 1, p \llbracket, \lambda_i = f(e_i)$. D'où l'unicité.

• Synthèse/Existence. Réciproquement posons $\forall i \in \llbracket 1, p \llbracket, \lambda_i = f(e_i)$ et montrons que $f = \sum_{k=1}^p \lambda_k e_k^*$.

f et $\sum_{k=1}^p \lambda_k e_k^*$ étant deux formes linéaires sur E pour montrer qu'elles sont égales il suffit de montrer qu'elles coïncident sur les éléments de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$.

$\forall i \in \llbracket 1, p \llbracket, \left(\sum_{k=1}^p \lambda_k e_k^* \right) (e_i) = \sum_{k=1}^p \lambda_k e_k^*(e_i) = \lambda_i e_i^*(e_i) = \lambda_i = f(e_i)$. Ainsi $f = \sum_{k=1}^p \lambda_k e_k^* = \sum_{k=1}^p f(e_k) e_k^*$. D'où l'existence.

$$\mathcal{B}^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_p^*) \text{ est une base de } E^* \text{ et si } f \text{ est un élément de } E^*, f = \sum_{k=1}^p f(e_k) e_k^*.$$

Q2 a) Soit f un élément de E'^* . u est une application linéaire de E dans E' et f une application linéaire de E' dans \mathbb{K} donc $f \circ u$ est une application linéaire de E dans \mathbb{K} .

Ainsi φ est une application de E'^* dans E^* .

$\forall (f, g) \in (E'^*)^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \varphi(\lambda f + g) = u \circ (\lambda f + g) = \lambda u \circ f + u \circ g = \lambda \varphi(f) + \varphi(g)$. φ est linéaire.

φ est une application linéaire de E'^* dans E^*

Posons $A = M(u, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = (a_{ij})$ et $C = M(\varphi, \mathcal{B}'^*, \mathcal{B}^*) = (c_{ij})$. $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Montrons que ${}^t C = A$.

Soit j un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et i un élément de $\llbracket 1, p \rrbracket$. $\varphi(e_j'^*) = \sum_{k=1}^p c_{kj} e_k^*$ donc $\varphi(e_j'^*)(e_i) = \sum_{k=1}^p c_{kj} e_k^*(e_i) = c_{ij}$.

De plus $\varphi(e_j'^*)(e_i) = (e_j'^* \circ u)(e_i) = e_j'^*(u(e_i)) = e_j'^*\left(\sum_{k=1}^n a_{ki} e_k'\right) = \sum_{k=1}^n a_{ki} e_j'^*(e_k') = a_{ji} e_j'^*(e_j') = a_{ji}$.

Ainsi $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, c_{ij} = a_{ji}$. Donc $C = {}^t A$.

b) Notons r le rang de u . $r \leq \text{Min}(\dim E, \dim E') = \text{Min}(n, p)$.

Si $r = 0$, u est nulle et φ l'est également donc $\text{rg } \varphi = 0 = \text{rg } u$.

Supposons r non nul.

$\dim \text{Ker } u = p - r$. Soit (t_1, t_2, \dots, t_r) une base d'un supplémentaire F de $\text{Ker } u$ et $(t_{r+1}, t_{r+2}, \dots, t_p)$ une base de $\text{Ker } u$.

La supplémentarité de F et de $\text{Ker } u$ permet de dire que $\mathcal{T} = (t_1, t_2, \dots, t_p)$ est une base de E .

Remarque Il est entendu que si $\text{Ker } u = \{0_E\}$, $\text{Ker } u$ ne possède pas de base mais alors $r = p$ et ainsi $(t_1, t_2, \dots, t_r) = (t_1, t_2, \dots, t_p)$ est directement une base de E . En toute rigueur il faudrait envisager les cas particuliers $r = p$ et $r = n$.

Posons $\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, t'_k = u(t_k)$. $(t'_1, t'_2, \dots, t'_r)$ est une famille de cardinal r de $\text{Im } u$ et $\dim \text{Im } u = r$.

Pour montrer que cette famille est une base de $\text{Im } u$ il suffit de montrer qu'elle est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ un élément de \mathbb{K}^r tel que : $\sum_{k=1}^r \lambda_k t'_k = 0_{E'}$.

$0_{E'} = \sum_{k=1}^r \lambda_k t'_k = \sum_{k=1}^r \lambda_k u(t_k) = u\left(\sum_{k=1}^r \lambda_k t_k\right)$. Alors $\sum_{k=1}^r \lambda_k t_k$ est un élément de $\text{Ker } u$ et de F . Il est donc nul car

$\text{Ker } u$ et F sont supplémentaires. $\sum_{k=1}^r \lambda_k t_k = 0_E$ donne alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0_{\mathbb{K}}$ car la famille (t_1, t_2, \dots, t_r) est libre.

Ceci achève de montrer que $(t'_1, t'_2, \dots, t'_r)$ est une base de $\text{Im } u$. Cette famille est en particulier une famille libre de E' que l'on peut compléter, si nécessaire, en une base $\mathcal{T}' = (t'_1, t'_2, \dots, t'_n)$ de E' .

Nous poserons $\mathcal{T}^* = (t_1^*, t_2^*, \dots, t_p^*)$ et $\mathcal{T}'^* = (t_1'^*, t_2'^*, \dots, t_n'^*)$. \mathcal{T}^* est une base de E^* et \mathcal{T}'^* est une base de E'^* .

Cherchons $\text{Ker } \varphi$. Soit $f = \sum_{k=1}^n \lambda_k t_k'^*$ un élément de E'^* .

$f \in \text{Ker } \varphi \iff f \circ u = 0_{E^*} \iff \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(u(t_i)) = 0_{\mathbb{K}}$.

Or $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $u(t_i) = t'_i$ et $\forall i \in \llbracket r+1, p \rrbracket$, $u(t_i) = 0_{E'}$.

Alors $f \in \text{Ker } \varphi \iff \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $f(t'_i) = 0_{\mathbb{K}} \iff \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\sum_{k=1}^n \lambda_k t'_k{}^*(t'_i) = 0_{\mathbb{K}} \iff \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$.

$f \in \text{Ker } \varphi \iff f \in \text{Vect}(t'_{r+1}{}^*, t'_{r+2}{}^*, \dots, t'_n{}^*)$ (à un petit abus près si $r = n$).

$\text{Ker } \varphi = \text{Vect}(t'_{r+1}{}^*, t'_{r+2}{}^*, \dots, t'_n{}^*)$. Donc $\text{Ker } \varphi$ est de dimension $n - r$.

Alors $\text{rg } \varphi = \dim E'^* - (n - r) = n - (n - r) = r = \text{rg } u$. Ainsi

$$\boxed{\text{rg } \varphi = \text{rg } u. \text{ Alors } \text{rg } A = \text{rg } {}^t A.}$$

Remarques 1. Si $r = n$ il est entendu que $\text{Ker } \varphi$ est réduit au vecteur nul et est alors de dimension 0.

Donc $\text{rg } \varphi = \dim E'^* - 0 = n = r = \text{rg } \varphi \dots$ et le résultat vaut encore.

2. φ est la transposée de u . On la note ${}^t u$. L'application de $\mathcal{L}(E, E')$ dans $\mathcal{L}(E'^*, E^*)$ qui à u associe ${}^t u$ est linéaire.

Exercice 5 Pseudo-inverse d'une matrice ESCP 98

n est un élément de $\llbracket 2, +\infty \llbracket$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit A une matrice de E de rang p . On appelle pseudo-inverse de A tout élément X de E tel que :

$$AXA = A, XAX = X \text{ et } AX = XA$$

Q1. Ici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 . A admet-elle un pseudo-inverse ?

Q2. Même chose avec $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q3. On suppose A inversible. Déterminer l'ensemble des pseudo-inverses de A .

Q4. X et X' sont deux pseudo-inverses de A . En partant de $AXAX'$, montrer que $AX' = XA$, puis que $X = X'$. Conclusion ?

Q5. On note f l'endomorphisme de \mathbb{K}^n de matrice A dans la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{K}^n .

a) On suppose que X est un pseudo-inverse de A . On note g l'endomorphisme de \mathbb{K}^n de matrice X dans la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{K}^n .

Montrer que $\text{Im } g = \text{Im } f$ et $\text{Ker } g = \text{Ker } f$ et que $\mathbb{K}^n = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.

b) Réciproquement on suppose que $\mathbb{K}^n = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$. Montrer que A possède un pseudo-inverse.

Q1 $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$. Alors $AAA = A$, $AAA = A$ et $AA = AA \dots$ ha ! ha !

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ admet un pseudo inverse : } A}$$

Q2 $A'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Supposons que X soit un pseudo-inverse de A' .

$XA' = A'X$ donc $A' = A'XA' = A'^2X = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{K})}X = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{K})}$!

$$\boxed{A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ n'admet pas de pseudo inverse.}}$$

Q3 Soit X un pseudo-inverse de A . $AXA = A$ donne $AXAA^{-1} = AA^{-1} = I_n$ donc $AX = I_n$ et ainsi $X = A^{-1}$.

Ainsi si A possède un pseudo-inverse X , $X = A^{-1}$. Montrons alors que A^{-1} est un pseudo-inverse de A .

$AA^{-1}A = A$, $A^{-1}AA^{-1} = A^{-1}$ et $AA^{-1} = A^{-1}A$. A^{-1} est donc un pseudo-inverse de A .

Si A est inversible, A possède un pseudo-inverse et un seul : A^{-1} .

Q4 Soient X et X' deux pseudo-inverses de A .

$AXAX' = AX'$ car $AXA = A$. $AX = XA$ et $AX' = X'A$ donnent $AXAX' = AXX'A = XAX'A = XA$ (car $AX'A = A$).

Finalement $AX' = AXAX' = XA$. Alors $X = XAX = AX'X = X'AX = X'XA$ car $AX' = X'A$ et $AX = XA$.

Comme $XA = AX'$, $X = X'XA = X'AX' = X'$.

Un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède au plus un pseudo-inverse.

Q5 a) $AXA = A$, $XAX = X$ et $AX = XA$ donc $f \circ g \circ f = f$, $g \circ f \circ g = g$ et $f \circ g = g \circ f$.

Notons alors que $f = f \circ g \circ f = f^2 \circ g = g \circ f^2$ car $f \circ g = g \circ f$. De même $g = g^2 \circ f = f \circ g^2$.

• $\text{Im } g = g(\mathbb{K}^n) = f(g^2(\mathbb{K}^n)) \subset f(\mathbb{K}^n) = \text{Im } f$ car $g^2(\mathbb{K}^n) \subset \mathbb{K}^n$. Par "symétrie" $\text{Im } f \subset \text{Im } g$ et ainsi $\text{Im } g = \text{Im } f$.

• Soit x un élément de $\text{Ker } g$. $f(x) = f^2(g(x)) = f^2(0_{\mathbb{K}^n}) = 0_{\mathbb{K}^n}$; $x \in \text{Ker } f$.

Donc $\text{Ker } g \subset \text{Ker } f$. Par "symétrie" $\text{Ker } f \subset \text{Ker } g$ et $\text{Ker } f = \text{Ker } g$.

• Soit x un élément de $\text{Im } f \cap \text{Ker } f$. $f(x) = 0_{\mathbb{K}^n}$ et il existe z dans \mathbb{K}^n tel que $x = f(z)$.

$x = f(z) = g(f^2(z)) = g(f(x)) = g(0_{\mathbb{K}^n}) = 0_{\mathbb{K}^n}$. Ainsi $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$. De plus $\dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f = \dim \mathbb{K}^n$.

Finalement :

$$\mathbb{K}^n = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$$

b) Réciproquement supposons que $\mathbb{K}^n = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$ et montrons que A possède un pseudo-inverse. Pour se faire il suffit de prouver qu'il existe un endomorphisme g de \mathbb{K}^n tel que : $f \circ g \circ f = f$, $g \circ f \circ g = g$ et $f \circ g = g \circ f$.

Une petite analyse s'impose. Supposons qu'un tel endomorphisme g existe. Alors $\text{Ker } g = \text{Ker } f$ donc g est nul sur $\text{Ker } f$. Ne reste plus qu'à définir g sur $\text{Im } f$.

Soit x un élément de $\text{Im } f$. Il existe z dans E tel que $x = f(z)$. $x = f(z) = g(f^2(z)) = g(f(x))$.

Par conséquent $\forall x \in \text{Im } f, x = g(f(x)) = f(g(x))$. Tout est alors clair non ? g est vaguement sur $\text{Im } f$ la réciproque de la restriction de f à $\text{Im } f$. Construisons g .

Considérons l'application h de $\text{Im } f$ dans $\text{Im } f$ définie par : $\forall x \in \text{Im } f, h(x) = f(x)$. f étant linéaire, h l'est également. Montrons que h est un automorphisme de $\text{Im } f$. Il suffit de prouver que h est injective car $\text{Im } f$ est de dimension finie. Soit x un élément de $\text{Ker } h$. x appartient à $\text{Im } f$ et $f(x) = h(x) = 0_{\mathbb{K}^n}$ donc x appartient à $\text{Ker } f \cap \text{Im } f$. $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ étant supplémentaires $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$. Ainsi $x = 0_{\mathbb{K}^n}$.

$\text{Ker } h = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ et h est un endomorphisme injectif de $\text{Im } f$ donc h est un automorphisme de $\text{Im } f$.

Exercice Montrer que h est surjectif (on pourra utiliser $\mathbb{K}^n = \text{Im } f + \text{Ker } f$).

Soit p la projection sur $\text{Im } f$ parallèlement à $\text{Ker } f$. $\forall x \in \mathbb{K}^n, p(x) \in \text{Im } f$.

Posons : $\forall x \in \mathbb{K}^n, g(x) = h^{-1}(p(x))$. g est une application linéaire de \mathbb{K}^n dans \mathbb{K}^n (h^{-1} et p sont linéaires).

Montrons que $f = f \circ g \circ f$, $g = g \circ f \circ g$ et $f \circ g = g \circ f$.

Soit x un élément de \mathbb{K}^n . $g(x) = h^{-1}(p(x))$ appartient à $\text{Im } f$ donc $f(g(x)) = h(g(x)) = h(h^{-1}(p(x))) = p(x)$.
 $f(g(x)) = p(x)$.

Calculons alors $g(f(x))$. $f(x) \in \text{Im } f$ donc $p(f(x)) = f(x)$ et $g(f(x)) = h^{-1}(p(f(x))) = h^{-1}(f(x))$.

Comme p est la projection sur $\text{Im } f$ parallèlement à $\text{Ker } f$, $x = p(x) + x''$ avec x'' élément de $\text{Ker } f$.

Ainsi $f(x) = f(p(x) + f(x'')) = f(p(x)) + f(x'') = f(p(x))$. Donc $g(f(x)) = h^{-1}(f(x)) = h^{-1}(f(p(x)))$.

$p(x)$ est dans $\text{Im } f$ donc $f(p(x)) = h(p(x))$ et $g(f(x)) = h^{-1}(f(p(x))) = h^{-1}(h(p(x))) = p(x)$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $f(g(x)) = p(x) = g(f(x))$. $f \circ g = p = g \circ f$.

Nous avons également montré dans ce qui précède que $f(x) = f(p(x))$ pour x quelconque donc : $f = f \circ p$.

Alors $f \circ g \circ f = f \circ (g \circ f) = f \circ p = f$.

$g \circ f \circ g = (g \circ f) \circ g = p \circ g = g$ car g prend ses valeurs dans $\text{Im } f$ qui est la base de p .

Ceci achève de montrer que $f \circ g \circ f = f$, $g \circ f \circ g = g$ et $f \circ g = g \circ f$.

La matrice X de g dans \mathcal{B} est un pseudo-inverse de A . Donc A possède un pseudo-inverse.

A possède un pseudo-inverse si et seulement si $\mathbb{K}^n = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.

Exercice 6 Tout matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède au moins un polynôme annulateur non nul.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2})$ est une famille de cardinal $n^2 + 1$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est un espace vectoriel de dimension n^2 . Cette famille est donc nécessairement liée.

Ainsi on peut trouver $n^2 + 1$ éléments $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n^2}$ de \mathbb{K} , non tous nuls et tels que :

$$\lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \dots + \lambda_{n^2} A^{n^2} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}.$$

Posons $P = \sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k X^k$. P est un élément non nul de $\mathbb{K}[X]$ (l'un au moins de ses coefficients n'est pas nul) tel que $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Exercice 7 Polynôme minimal

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Si P est un polynôme annulateur non nul de A , de degré minimal, l'ensemble des polynômes annulateurs de A est l'ensemble des multiples de P .
2. A possède un polynôme annulateur unitaire et un seul tel que l'ensemble des polynômes annulateurs de A soit l'ensemble des multiples de ce polynôme.

1. Notons \mathcal{S} l'ensemble des polynômes annulateurs de A et \mathcal{S}' l'ensemble des multiples de P . Montrons que $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$.

Soit T un élément de \mathcal{S}' . Il existe un élément Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que : $T = QP$.

$T(A) = Q(A)P(A) = Q(A)0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Alors T appartient à \mathcal{S} . Ainsi $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$.

Réciproquement soit T un élément de \mathcal{S} . Notons Q et R le reste dans la division de T par P .

$T = QP + R$ et $\deg R < \deg P$.

$T(A) = Q(A)P(A) + R(A)$ et $T(A) = P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Alors $R(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Si R n'est pas nul, R est un polynôme annulateur non nul de A dont le degré est strictement inférieur à celui de P et P est un polynôme annulateur non nul de A , de degré minimal. Cela est contradictoire.

Par conséquent R est nul et T est un multiple de P donc appartient à \mathcal{S}' . Ainsi $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$.

Ceci achève de prouver que $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$.

2. Notons encore \mathcal{S}^* l'ensemble des polynômes annulateurs non nuls de A . Nous savons que \mathcal{S}^* n'est pas vide. Alors $\{\deg T; T \in \mathcal{S}^*\}$ est une partie non vide de \mathbb{N} ; elle possède un plus petit élément v . Il existe un élément V de \mathcal{S}^* tel que $\deg V = v$.

V est un polynôme annulateur non nul de A de degré minimal donc \mathcal{S} est l'ensemble des multiples de V .

Soit a le coefficient du terme de plus haut degré de V . $W = \frac{1}{a}V$ est un polynôme annulateur non nul et unitaire de A , de degré minimal.

Alors, d'après ce qui précède, W est un polynôme unitaire et \mathcal{S} est l'ensemble des multiples de W .

Soit \widehat{W} un second polynôme unitaire tel que \mathcal{S} soit l'ensemble des multiples de \widehat{W} .

W est un multiple de \widehat{W} et \widehat{W} est un multiple de W . Alors il existe un élément λ de \mathbb{K} tel que $\widehat{W} = \lambda W$.

\widehat{W} et W étant deux polynômes unitaires on a nécessairement $\lambda = 1$ et ainsi \widehat{W} et W sont égaux.

Exercice 8 Rang d'une matrice

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r non nul. Montrer qu'à deux petits abus près :

$$\exists (P, Q) \in Gl_p(\mathbb{K}) \times Gl_n(\mathbb{K}), Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,p-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$$

I_r est la matrice identité de $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, $O_{r,p-r}$, $O_{n-r,r}$ et $O_{n-r,p-r}$ sont les matrices nulles de $\mathcal{M}_{r,p-r}(\mathbb{K})$, $\mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n-r,p-r}(\mathbb{K})$.

Considérons un espace vectoriel E (resp. E') de dimension p (resp. n) et une base \mathcal{B} de E (resp. une base \mathcal{B}' de E').

Soit f l'application linéaire de E dans E' qui a pour matrice A relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' .

Supposons que A soit de rang r . f est également de rang r . Notons que $r = \text{rg } f \leq \text{Min}(\dim E, \dim E') = \text{Min}(p, n)$.

Soit F un supplémentaire de $\text{Ker } f$. F est de dimension r ($\dim F = \dim E - \dim \text{Ker } f = \text{rg } f = r$).

Soit (t_1, t_2, \dots, t_r) une base de F et $(t_{r+1}, t_{r+2}, \dots, t_p)$ une base de $\text{Ker } f$.

Comme F et $\text{Ker } f$ sont supplémentaires, $\mathcal{T} = (t_1, t_2, \dots, t_p)$ est une base de E .

Remarque Si $r = p$, $\text{Ker } f = \{0_E\}$ donc $\text{Ker } f$ ne possède pas de base mais $(t_1, t_2, \dots, t_r) = (t_1, t_2, \dots, t_p)$ est encore une base de E .

Posons $\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $t'_k = f(t_k)$. (t'_1, \dots, t'_r) est une famille d'éléments de $\text{Im } f$. Montrons que c'est une base de $\text{Im } f$.

Il suffit de montrer que cette famille est libre car son cardinal r est la dimension de $\text{Im } f$ ($\dim \text{Im } f = \text{rg } f = r$).

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ un élément de \mathbb{K}^r tel que $\sum_{k=1}^r \lambda_k t'_k = 0_{E'}$.

$0_{E'} = \sum_{k=1}^r \lambda_k t'_k = \sum_{k=1}^r \lambda_k f(t_k) = f\left(\sum_{k=1}^r \lambda_k t_k\right)$. Alors $\sum_{k=1}^r \lambda_k t_k$ est un élément de $\text{Ker } f$ et de F qui sont supplémentaires.

Donc $\sum_{k=1}^r \lambda_k t_k = 0_E$. Comme la famille (t_1, \dots, t_r) est libre : $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$.

Ceci achève de montrer que (t'_1, \dots, t'_r) est une base de $\text{Im } f$. C'est donc une famille libre de E' que l'on peut compléter en une base $\mathcal{T}' = (t'_1, \dots, t'_n)$ de E' .

Remarque Si $r = n$, $(t'_1, t'_2, \dots, t'_r) = (t'_1, t'_2, \dots, t'_n)$ est directement une base de E' .

$\mathcal{T} = (t_1, t_2, \dots, t_p)$ est une base de E et $\mathcal{T}' = (t'_1, \dots, t'_n)$ est une base de E' .

$\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $f(t_k) = t'_k$ et $\forall k \in \llbracket r+1, p \rrbracket$, $f(t_k) = 0_{E'}$.

Alors la matrice de f relativement aux bases \mathcal{T} et \mathcal{T}' est $M(f, \mathcal{T}, \mathcal{T}') = \begin{pmatrix} I_r & O_{r, p-r} \\ O_{n-r, r} & O_{n-r, p-r} \end{pmatrix}$.

Notons P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{T} et Q la matrice de passage de \mathcal{B}' à \mathcal{T}' .

P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et Q est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

De plus $M(f, \mathcal{T}, \mathcal{T}') = Q^{-1} M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') P$. Par conséquent : $Q^{-1} A P = \begin{pmatrix} I_r & O_{r, p-r} \\ O_{n-r, r} & O_{n-r, p-r} \end{pmatrix}$.

Exercice Envisager une réciproque. Utiliser ces résultats pour montrer que A et ${}^t A$ ont même rang.

Exercice 9 Les matrices au service d'un grand classique d'analyse ESSEC 1992

n est un élément de $\llbracket 2, +\infty \rrbracket$. f est une application de classe \mathcal{C}^n de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose que f et $f^{(n)}$ sont bornées sur \mathbb{R} .

On pose $M_0 = \text{Sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_n = \text{Sup}_{x \in \mathbb{R}} |f^{(n)}(x)|$. On se propose de montrer que, pour tout élément k de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $f^{(k)}$ est bornée.

h_1, h_2, \dots, h_{n-1} sont $n-1$ réels non nuls et deux à deux distincts.

Q1. Montrer que $H_{n-1} = \begin{pmatrix} \frac{h_1}{1!} & \frac{h_1^2}{2!} & \dots & \frac{h_1^{n-1}}{(n-1)!} \\ \frac{h_2}{1!} & \frac{h_2^2}{2!} & \dots & \frac{h_2^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{h_{n-1}}{1!} & \frac{h_{n-1}^2}{2!} & \dots & \frac{h_{n-1}^{n-1}}{(n-1)!} \end{pmatrix}$ est une matrice inversible de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.

Q2. Pour tout réel x on pose : $\begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_{n-1}(x) \end{pmatrix} = H_{n-1} \begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x) \\ \vdots \\ f^{n-1}(x) \end{pmatrix}$.

a) Soit x un réel et k un élément de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$. En majorant $|f(x+h_k) - f(x) - F_k(x)|$ avec l'inégalité de Taylor-Lagrange, établir que :

$$|F_k(x)| \leq 2M_0 + \frac{|h_k|^n}{n!} M_n$$

b) En déduire que, pour tout élément k de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $f^{(k)}$ est bornée.

Pour montrer que H_{n-1} est inversible, montrons que $\forall U \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$, $H_{n-1}U = 0_{\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow U = 0_{\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})}$.

Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ tel que : $H_{n-1}U = 0_{\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})}$.

$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{h_i^k}{k!} u_k = 0$. h_1, h_2, \dots, h_{n-1} étant non nul on a encore : $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{h_i^{k-1}}{k!} u_k = 0$.

Considérons alors le polynôme $P = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_k}{k!} X^{k-1}$.

D'après ce qui précède $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $P(h_i) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_k}{k!} h_i^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h_i^{k-1}}{k!} u_k = 0$.

P est alors un polynôme de degré au plus $n-2$ admettant au moins $n-1$ racines distinctes h_1, h_2, \dots, h_{n-1} .

P est donc le polynôme nul. Ses coefficients sont nuls. $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\frac{u_k}{k!} = 0$ et $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $u_k = 0$.

Finalement la matrice U est nulle ce qui achève de prouver que

$$\boxed{H_{n-1} \text{ est inversible}}.$$

Q2 Notons que $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_k(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_k^i}{i!} f^{(i)}(x)$.

a) Soient x un élément de \mathbb{R} et k un élément de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

f est de classe \mathcal{C}^n sur \mathbb{R} . En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à f à l'ordre $n-1$ on obtient :

$$\left| f(x+h_k) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x+h_k-x)^i}{i!} f^{(i)}(x) \right| \leq \frac{|x+h_k-x|^n}{n!} \text{Max}_{u \in [x, x+h_k]} |f^{(n)}(u)|. \text{ Ainsi}$$

$$\left| f(x+h_k) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(h_k)^i}{i!} f^{(i)}(x) \right| \leq \frac{|h_k|^n}{n!} \text{Max}_{u \in [x, x+h_k]} |f^{(n)}(u)| \leq \frac{|h_k|^n}{n!} M_n.$$

$$\text{Alors } \left| f(x+h_k) - f(x) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(h_k)^i}{i!} f^{(i)}(x) \right| \leq \frac{|h_k|^n}{n!} M_n \text{ ou } |f(x+h_k) - f(x) - F_k(x)| \leq \frac{|h_k|^n}{n!} M_n.$$

$$|F_k(x)| = \left| f(x+h_k) - f(x) - (f(x+h_k) - f(x) - F_k(x)) \right| \leq |f(x+h_k)| + |f(x)| + |f(x+h_k) - f(x) - F_k(x)|.$$

$$|F_k(x)| \leq M_0 + M_0 + \frac{|h_k|^n}{n!} M_n = 2M_0 + \frac{|h_k|^n}{n!} M_n.$$

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \forall x \in \mathbb{R}, |F_k(x)| \leq 2M_0 + \frac{|h_k|^n}{n!} M_n.}$$

b) H_{n-1} est inversible. Posons $H_{n-1}^{-1} = (t_{ij})$.

$$\text{Pour tout réel } x \text{ on a : } \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_{n-1}(x) \end{pmatrix} = H_{n-1} \begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x) \\ \vdots \\ f^{n-1}(x) \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x) \\ \vdots \\ f^{n-1}(x) \end{pmatrix} = H_{n-1}^{-1} \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_{n-1}(x) \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} t_{ki} F_i(x)$. Alors $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f^{(k)}(x)| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |t_{ki}| |F_i(x)|$.

Donc $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f^{(k)}(x)| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |t_{ki}| \left(2M_0 + \frac{|h_i|^n}{n!} M_n \right)$. Finalement :

$$\boxed{\text{pour tout élément } k \text{ de } \llbracket 1, n-1 \rrbracket, f^{(k)} \text{ est bornée}}.$$

Exercice 10 Matrice à diagonale strictement dominante.

$A = (a_{ij})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

Montrer que A est inversible (prendre $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $AX=0$ et considérer : $|x_{i_0}| = \text{Max}(|x_1|, |x_2| \cdots, |x_n|)$).

Pour montrer que A est inversible, montrons que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que : $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Il existe un élément i_0 de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_{i_0}| = \text{Max}(|x_1|, |x_2| \cdots, |x_n|)$.

$AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = 0$. En particulier $\sum_{k=1}^n a_{i_0 k} x_k = 0$.

Alors $|a_{i_0 i_0}| |x_{i_0}| = |a_{i_0 i_0} x_{i_0}| = \left| - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^n a_{i_0 k} x_k \right| = \left| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^n a_{i_0 k} x_k \right| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^n |a_{i_0 k}| |x_k| \leq |x_{i_0}| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^n |a_{i_0 k}|$.

Ainsi $\left(|a_{i_0 i_0}| - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^n |a_{i_0 k}| \right) |x_{i_0}| \leq 0$. Comme par hypothèse $|a_{i_0 i_0}| - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^n |a_{i_0 k}| > 0$, $|x_{i_0}| \leq 0$ donc $|x_{i_0}| = 0$.

Alors $\text{Max}(|x_1|, |x_2| \cdots, |x_n|) = 0$. Par conséquent $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, |x_k| = 0$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = 0$.

Finalement la matrice X est nulle ce qui achève de prouver que A est inversible.

Exercice 11 Ensemble des matrices qui commutent avec une matrice diagonale.

D est une matrices diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les éléments de la diagonale sont deux à deux distincts.

Q1. Montrer que l'ensemble \mathcal{S} des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec D est le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q2. Montrer que $(I_n, D, D^2, \dots, D^{n-1})$ est une base de \mathcal{S} .

Q1 $D = (d_{ij})$. $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow d_{ij} = 0$ et $d_{ii} \neq d_{jj}$. Soit $A = (a_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$A \in \mathcal{S} \iff AD = DA \iff \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \sum_{k=1}^n a_{ik} d_{kj} = \sum_{k=1}^n d_{ik} a_{kj} \iff \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{ij} d_{jj} = d_{ii} a_{ij}$.

$A \in \mathcal{S} \iff \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{ij} (d_{jj} - d_{ii}) = 0$.

Notons que si i et j sont deux éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$:

$a_{ij} (d_{jj} - d_{ii}) = 0 \iff 0 = 0$ si $i = j$ et $a_{ij} (d_{jj} - d_{ii}) = 0 \iff a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Alors $A \in \mathcal{S} \iff \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0 \iff A$ est diagonale.

L'ensemble des matrices qui commutent avec D est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q2 Le sous-espace vectoriel \mathcal{S} constitué des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est clairement de dimension n .

Pour tout élément k de \mathbb{N} , D^k est un élément de \mathcal{S} ($D^k D = D^{k+1} = D D^k$).

(I_n, D, \dots, D^{n-1}) est donc une famille d'éléments de \mathcal{S} et son cardinal n est la dimension de \mathcal{S} . Ainsi suffit-il de montrer que cette famille est libre pour pouvoir affirmer que c'est une base de \mathcal{S} .

Pour la suite posons $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$; mieux écrivons $D = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$.

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ un élément de \mathbb{K}^n tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k D^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $D^k = \text{Diag}(d_1^k, d_2^k, \dots, d_n^k)$.

Donc $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k D^k = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \text{Diag}(d_1^k, d_2^k, \dots, d_n^k) = \text{Diag}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k d_1^k, \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k d_2^k, \dots, \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k d_n^k\right)$.

Alors $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k d_i^k = 0$. Posons $P = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$; $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(d_i) = 0$.

Ainsi P est un polynôme de degré au plus $n-1$ admettant au moins n racines distinctes. P est le polynôme nul. Ses coefficients sont nuls. $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\lambda_k = 0$.

Ceci achève de montrer que

$$\boxed{(I_n, D, D^2, \dots, D^{n-1}) \text{ est une base de } \mathcal{S}}.$$

Exercice Montrer à la main que $(I_n, D, D^2, \dots, D^{n-1})$ est une famille génératrice de \mathcal{S} (on pourra utiliser l'interpolation de Lagrange).

Exercice 12 Pratique du produit matriciel.

$(E_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q1. Soit $A = (a_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soient p et q deux éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

a) Calculer AE_{pq} et $E_{pq}A$.

b) Soient r et s deux éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Calculer $E_{pq}E_{rs}$ (on peut utiliser a)).

Q2. Application 1 \mathcal{C} est l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Montrer que \mathcal{C} contient la droite vectorielle engendrée par I_n .

b) Utiliser Q1 a) pour montrer l'inclusion inverse.

Q3. Application 2 $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et \mathcal{S} est l'ensemble des formes linéaires f sur E vérifiant

$$\forall (A, B) \in E^2, f(AB) = f(BA).$$

a) f_0 est l'application qui à tout élément de E associe sa trace. Montrer que \mathcal{S} contient la droite vectorielle engendrée par f_0 .

b) Utiliser Q1 b) pour montrer l'inclusion inverse.

Dans cet exercice si M est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si i et j sont deux éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$, nous noterons $L_i(M)$ la $i^{\text{ème}}$ ligne de M et $C_j(M)$ sa $j^{\text{ème}}$ colonne.

Q1 a) Posons $E_{pq} = (e_{ij})$, $C = AE_{pq} = (c_{ij})$ et $D = E_{pq}A = (d_{ij})$.

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, e_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } (i, j) \neq (p, q) \\ 1 & \text{si } (i, j) = (p, q) \end{cases}.$$

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} e_{kj} = a_{ip} e_{pj}.$$

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, c_{ij} = \begin{cases} a_{ip} & \text{si } j = q \\ 0 & \text{si } j \neq q \end{cases}. \text{ Ainsi } \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, C_j(AE_{pq}) = C_j(C) = \begin{cases} C_p(A) & \text{si } j = q \\ 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})} & \text{si } j \neq q \end{cases}.$$

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, d_{ij} = \sum_{k=1}^n e_{ik} a_{kj} = e_{iq} a_{qj}.$$

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, d_{ij} = \begin{cases} a_{qj} & \text{si } i = p \\ 0 & \text{si } i \neq p \end{cases}. \text{ Ainsi } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, L_i(E_{pq}A) = L_i(D) = \begin{cases} L_q(A) & \text{si } i = p \\ 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})} & \text{si } i \neq p \end{cases}.$$

AE_{pq} est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont toutes les colonnes sont nulles sauf la $q^{\text{ème}}$ qui est la $p^{\text{ème}}$ colonne de A .

$E_{pq}A$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont toutes les lignes sont nulles sauf la $p^{\text{ème}}$ qui est la $q^{\text{ème}}$ ligne de A .

$$\text{b) D'après ce qui précède } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, L_i(E_{pq}E_{rs}) = \begin{cases} L_q(E_{rs}) & \text{si } i = p \\ 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})} & \text{si } i \neq p \end{cases}$$

- Supposons $r \neq q$. Soit i un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Si i est distinct de p , $L_i(E_{pq}E_{rs})$ est nulle. Si $i = p$, $L_i(E_{pq}E_{rs}) = L_q(E_{rs})$ est encore nulle car q est distinct de r .

Finalement, pour $q \neq r$, la matrice $E_{pq}E_{rs}$ est la matrice nulle.

- Supposons $r = q$. Soit i un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Supposons $i = p$, $L_p(E_{pq}E_{rs}) = L_i(E_{pq}E_{rs}) = L_q(E_{rs}) = L_r(E_{rs})$. Ainsi tous les éléments de $L_p(E_{pq}E_{rs})$ sont nuls sauf celui de la $s^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1. Alors $L_p(E_{pq}E_{rs}) = L_p(E_{ps})$.

Si i est distinct de p , $L_i(E_{pq}E_{rs})$ est nulle comme $L_i(E_{ps})$.

Finalement $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, L_i(E_{pq}E_{rs}) = L_i(E_{ps})$. Donc $E_{pq}E_{rs} = E_{ps}$.

$$E_{pq}E_{rs} = \begin{cases} E_{ps} & \text{si } q = r \\ 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} & \text{si } q \neq r \end{cases}.$$

Q2 a) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), (\lambda I_n)M = M(\lambda I_n)$ Donc $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda I_n \in \mathcal{C}$ ou $\text{Vect}(I_n) \subset \mathcal{C}$.

b) Réciproquement soit A un élément de \mathcal{C} . $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA$. En particulier $\forall (p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, AE_{pq} = E_{pq}A$.

Soient p et q deux éléments distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Posons $A = (a_{ij}), C = AE_{pq} = (c_{ij})$ et $D = E_{pq}A = (d_{ij})$. D'après Q1 a) :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, c_{ij} = \begin{cases} a_{ip} & \text{si } j = q \\ 0 & \text{si } j \neq q \end{cases}. \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, d_{ij} = \begin{cases} a_{qj} & \text{si } i = p \\ 0 & \text{si } i \neq p \end{cases}.$$

En particulier $c_{pq} = a_{pp}, c_{pp} = 0, d_{pp} = a_{qp}$ et $d_{pq} = a_{qq}$.

Or $C = AE_{pq} = E_{pq}A = D$ donc $a_{pp} = c_{pq} = d_{pq} = a_{qq}$ et $a_{qp} = d_{pp} = c_{pp} = 0$.

Ainsi $\forall (p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, p \neq q \Rightarrow a_{pp} = a_{qq}$ et $a_{qp} = 0$. Alors $A = a_{11} I_n$. A appartient à $\text{Vect}(I_n)$. Finalement

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA\} = \text{Vect}(I_n).$$

Q3 a) Il est de notoriété publique que $f_0 = \text{tr}$ est une forme linéaire sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que $\forall (A, B) \in E^2, f_0(AB) = \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) = f_0(BA)$. Ainsi f_0 est un élément de \mathcal{S} .

Soit λ un élément de \mathbb{K} . $f = \lambda f_0$ est encore une forme linéaire sur E et $\forall (A, B) \in E^2$, $f(AB) = \lambda f_0(AB) = \lambda f_0(BA) = f(BA)$ donc $f = \lambda f_0$ appartient à \mathcal{S} . Par conséquent :

$$\boxed{\mathcal{S} \text{ contient } \text{Vect}(f_0) = \text{Vect}(\text{tr})}.$$

b) Soit f un élément de \mathcal{S} . Montrons qu'il existe un élément λ de \mathbb{K} tel que $f = \lambda f_0$.

$\forall (A, B) \in E^2$, $f(AB) = f(BA)$. En particulier $\forall (p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $f(E_{pq}E_{qq}) = f(E_{qq}E_{pq})$

Alors $\forall (p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $f(E_{pq}) = f(E_{qq}E_{pq})$ (car $E_{pq}E_{qq} = E_{pq}$ d'après Q1 b)).

Ce qui donne $\forall (p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $p \neq q \Rightarrow f(E_{pq}) = f(E_{qq}E_{pq}) = f(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) = 0$ (toujours d'après Q1 b)).

On a encore $\forall (p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $f(E_{pq}E_{qp}) = f(E_{qp}E_{pq})$.

Ceci donne $\forall (p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $f(E_{pp}) = f(E_{qq})$ (car $E_{pq}E_{qp} = E_{pp}$ et $E_{qp}E_{pq} = E_{qq}$ d'après Q1 b)).

La suite $(f(E_{pp}))_{p \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est constante. Soit λ cette constante.

$\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(E_{pp}) = \lambda = \lambda \times 1 = \lambda \text{tr}(E_{pp}) = (\lambda f_0)(E_{pp})$.

Soient p et q deux éléments distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$. $f(E_{pq}) = 0 = \lambda \times 0 = \lambda \text{tr}(E_{pq}) = (\lambda f_0)(E_{pq})$.

Finalement $\forall (p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $f(E_{pq}) = (\lambda f_0)(E_{pq})$.

Les formes linéaires f et λf_0 coïncident sur la base canonique de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ elles sont donc égales. f appartient à $\text{Vect}(f_0)$.

Ceci achève de montrer que $\mathcal{S} \subset \text{Vect}(I_n)$.

$$\boxed{\{f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}) \mid \forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, f(AB) = f(BA)\} = \text{Vect}(\text{tr})}.$$

Exercice Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe un élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et un seul tel que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(M) = \text{tr}(AM)$.

Exercice 13 Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice.

Dans cet exercice si M est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si i est un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$, nous noterons $L_i(M)$ la $i^{\text{ème}}$ ligne de M .

$(E_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q1. Soit $A = (a_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soient p et q deux éléments distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Calculer $E_{pq}A$.

Q2. i et j sont deux éléments distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et λ est un éléments de \mathbb{K} . On note φ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui même qui a une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associe la matrice déduite de A par l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

a) Montrer que $\varphi(I_n) = I_n + \lambda E_{ij}$.

b) Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(A) = \varphi(I_n)A$.

c) Montrer que $I_n + \lambda E_{ij}$ est inversible et d'inverse $I_n - \lambda E_{ij}$.

Q1 Posons $E_{pq} = (e_{ij})$ et $C = E_{pq}A = (c_{ij})$. $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^n e_{ik} a_{kj} = e_{iq} a_{qj}$.

$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $c_{ij} = \begin{cases} a_{qj} & \text{si } i = p \\ 0 & \text{si } i \neq p \end{cases}$. Ainsi $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $L_i(E_{pq}A) = L_i(C) = \begin{cases} L_q(A) & \text{si } i = p \\ 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})} & \text{si } i \neq p \end{cases}$.

$E_{pq}A$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont toutes les lignes sont nulles sauf la $p^{\text{ème}}$ qui est la $q^{\text{ème}}$ ligne de A .

Q2 a) Soit k un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$. $L_k(I_n + \lambda E_{ij}) = L_k(I_n) + \lambda L_k(E_{ij})$.

Si k est différent de i , $L_k(E_{ij})$ est nulle et si k vaut i , $L_k(E_{ij}) = L_i(E_{ij}) = L_j(I_n)$.

Ainsi $L_k(I_n + \lambda E_{ij}) = \begin{cases} L_i(I_n) + \lambda L_j(I_n) & \text{si } k = i \\ L_k(I_n) & \text{si } k \neq i \end{cases}$. Ceci montre donc que $I_n + \lambda E_{ij} = \varphi(I_n)$.

b) Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\varphi(I_n) A = (I_n + \lambda E_{ij})A = A + \lambda E_{ij}A$.

Soit k un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$. $L_k(\varphi(I_n) A) = L_k(A + \lambda E_{ij}A) = L_k(A) + \lambda L_k(E_{ij}A)$.

D'après Q1, $L_k(E_{ij}A)$ est nulle si $k \neq i$ et coïncide avec la $j^{\text{ème}}$ ligne de A si $k = i$.

Alors $L_k(\varphi(I_n) A) = L_k(A + \lambda E_{ij}A) = \begin{cases} L_i(A) + \lambda L_j(A) & \text{si } k = i \\ L_k(A) & \text{si } k \neq i \end{cases}$.

Ainsi $\varphi(I_n) A = \varphi(A)$.

c) $(I_n + \lambda E_{ij})(I_n - \lambda E_{ij}) = I_n^2 - \lambda I_n E_{ij} + \lambda E_{ij} I_n - \lambda^2 E_{ij} E_{ij} = I_n - \lambda^2 E_{ij} E_{ij} = I_n$.

Ainsi $I_n + \lambda E_{ij}$ est inversible et d'inverse $I_n - \lambda E_{ij}$. Notons que cette matrice inverse se déduit de I_n par l'opération $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$ normal non ?

Exercice On reprend les éléments de l'exercice précédent.

Q1. i et j sont deux éléments distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On note ψ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même qui à une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associe la matrice déduite de A par l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$.

a) Montrer que $\psi(I_n) = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$.

b) Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \psi(A) = \psi(I_n) A$.

c) Montrer que $\psi(I_n)$ est inversible et d'inverse elle-même.

Q2. Traiter l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ($\lambda \neq 0$).

Q3. Traiter les opérations élémentaires sur les colonnes.

Q4. Et pour les éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$?
