$\boxed{\textbf{F 1}}$ Assez simple ou proche du cours.

$\boxed{\textbf{F 2}}$ Demande du travail.

$\boxed{\textbf{F 3}}$ Délicat.

QUESTIONS COURTES 2003

Question 1 ESCP 2003 $\boxed{\textbf{F 3}}$

Soient A, B deux matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A admet n valeurs propres distinctes et que tout vecteur propre de A est également vecteur propre de B.
Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = B$.

Question 2 ESCP 2003 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 4 et une variance non nulle. Minimiser la quantité

$$f(a,b) = E[(X^2 - a - bX)^2]$$

lorsque (a, b) parcourt $\mathbb{R}^2$.

Question 3 ESCP 2003 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. Soient H_1, H_2 deux hyperplans de E (sous–espaces vectoriels de dimension $n-1$). Quelle est la dimension de $H_1 \cap H_2$?

Question 4 ESCP 2003 $\boxed{\textbf{F 3}}$

Parmi tous les parallélépipèdes rectangles de surface totale S, quel est celui (quels sont ceux) de volume maximal ?

Question 5 ESCP 2003 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit X une variable aléatoire de densité f paire et continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que X^2 suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer f.

Question 6 ESCP 2003 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit $E = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c, d) réels pour que φ définie sur E^2 par

$$\varphi(X, Y) = {}^tX \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} Y$$

soit un produit scalaire sur E.

Question 7 ESCP 2003 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires qui converge en loi vers une variable aléatoire X. A-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = E(X)$?

Question 8 ESCP 2003 $\boxed{\textbf{F 3}}$

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle. Peut–on avoir M semblable à $2M$? (on pourra commencer par étudier les valeurs propres d'une telle matrice).

Question 9 ESCP 2003 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Pour allumer un feu, on dispose de N allumettes. La probabilité d'allumer le feu avec une allumette donnée est $p \in]0,1[$. Vous finissez par allumer le feu.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'allumettes restantes. Déterminer la loi et l'espérance de X.

Question 10 **ESCP 2003** $\boxed{\textbf{F 1}}$

Existe–t-il une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices diagonalisables ?

Existe–t-il une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices inversibles ?

QUESTIONS COURTES 2004

Question 1 ESCP 2004 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et X une variable aléatoire définie également sur cet espace. On suppose que (X_n) converge en loi vers X, la suite $(X_n - X)$ converge-t-elle nécessairement en loi vers la variable certaine nulle ?

Question 2 ESCP 2004 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Nature de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\ln k}{n^2}\right)$.

Question 3 ESCP 2004 $\boxed{\textbf{F 3}}$

Résoudre l'équation $X^3 = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$.

Question 4 ESCP 2004 $\boxed{\textbf{F 1}}$

On confond polynôme et fonction polynôme. Soit f défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$f(P) : \, x \mapsto \int_0^1 P(x+t)\, dt$$

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Est-il diagonalisable ?

Question 5 ESCP 2004 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Quelles sont les variables aléatoires *discrètes* qui sont indépendantes d'elles-mêmes ?

Question 6 ESCP 2004 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit E l'ensemble des endomorphismes f de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que pour tout polynôme P, $\deg f(P) \leqslant \deg P$. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et déterminer sa dimension.

Question 7 ESCP 2004 $\boxed{\textbf{F 3}}$

Résoudre $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Question 8 ESCP 2004 $\boxed{\textbf{F 2}}$

On lance en une seule fois n pièces de monnaie, la probabilité que la $k^{\text{ème}}$ pièce amène Pile valant $\dfrac{1}{2k+1}$. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre impair de Pile ?

Question 9 ESCP 2004 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Montrer que pour $x > -1$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $(1+x)^k \geqslant 1 + kx$.

Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^k$ lorsque n tend vers l'infini.

Question 10 ESCP 2004 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E tels que $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$. Montrer que ces sommes sont directes.

QUESTIONS COURTES 2005

Question 1 ESCP 2005 F 1

Soit f continue sur $[0,+\infty[$ telle que : $\forall x \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

On définit la fonction H par : $\forall x \in [0,+\infty[,\ H(x) = e^{-x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, calculer H'. En déduire H puis f.

Question 2 ESCP 2005 F 3

Soit φ une fonction affine. On suppose qu'il existe deux fonctions convexes f et g telles que $\varphi = f + g$.

Montrer que f et g sont affines (on pourra commencer par le cas où f ou g est de classe $\mathcal{C}^2$).

Question 3 ESCP 2005 F 2

Soit n urnes, chacune contenant x boules blanches et y boules noires. On tire une boule de la première urne et on la met dans la deuxième urne ; puis on tire une boule de la deuxième urne et on la met dans la troisième, ... Enfin on tire une boule de la dernière urne.

Quelle est la probabilité que la dernière boule tirée soit blanche ?

Question 4 ESCP 2005 F 1

Une urne contient 14 boules numérotées de 1 à 14. On en tire 7 sans remise. Quelle est la probabilité que la somme des numéros obtenus soit égale à la somme des numéros des boules non obtenues ?

Question 5 ESCP 2005 F 1

Soit X une variable aléatoire dont la loi dépend d'un paramètre θ.

Soit T_1, T_2 deux estimateurs indépendants, sans biais de θ, de variances respectives V_1 et V_2. Pour tout a réel, on pose $\Theta_a = aT_1 + (1-a)T_2$.

Θ_a est-il un estimateur sans biais de θ ?

Déterminer a pour que la variance de Θ_a soit minimale. Quelle est la valeur de cette variance ?

Question 6 ESCP 2005 F 2

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant, pour tout x réel, $f'(x) \leqslant 0$. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2x$.

Question 7 ESCP 2005 F 2

Soient A et B deux matrices symétriques réelles telles que $A^2 + B^2 = A + B = 2I$. Que peut-on dire de A et B ?

Question 8 ESCP 2005 F 1

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les variables aléatoires indépendantes X et Y, pour que X et XY soient non corrélées

Question 9 ESCP 2005 F 2

Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $\langle Ax, x\rangle = 0$ ($\langle ., .\rangle$ étant le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$). Montrer que $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A)^{\perp}$.

Question 10 **ESCP 2005** $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit $(X_n)_n$ et X des variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé.

A-t'on : si la suite (X_n) converge en loi vers X, alors $(X_n - X)$ converge en loi vers 0 ?

Soit X, Y, Z des variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé.

A-t'on : $[X, Y$ suivent la même loi $] \Rightarrow [XZ, YZ$ suivent la même loi $]$?

Question 11 **ESCP 2005** $\boxed{\textbf{F 1}}$ *élève*

X et Y sont deux variables aléatoires suivant une loi de Poissson de paramètre a. Z est une variable alatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

On suppose X, Y et Z mutuellement indépendantes.

Montrer que $U = X\,Z$ et $V = Y\,Z$ ne sont pas indépendantes.

Question 12 **ESCP 2005** $\boxed{\textbf{F 2}}$ *élève*

n est un élément de $\mathbb{N}^*$. x_1, x_2, ..., x_n sont n réels strictement positifs dont la somme vaut 1.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$.

QUESTIONS COURTES 2006

Question 1 ESCP 2006 $\boxed{\textbf{F 3}}$

Soit (u_n) une suite réelle. Que pensez-vous de l'assertion :

$$u_n \sim \frac{1}{n} \Longleftrightarrow u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n} \quad ?$$

Question 2 ESCP 2006 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Étudier la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\ln k}{n^2}\right)$.

Question 3 ESCP 2006 $\boxed{\textbf{F 1 à 3}}$

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe un unique y_n solution de l'équation : $\ln x + x = \dfrac{1}{n}$ Étudier la suite (y_n).

En notant ℓ sa limite, donner un équivalent de $y_n - \ell$ lorsque n tend vers l'infini.

Question 4 ESCP 2006 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on écrit en base 10 le nombre $\sum\limits_{k=1}^{n} k$ et on note u_n son chiffre des unités.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est périodique, 20 étant une période de cette suite.

Question 5 ESCP 2006 $\boxed{\textbf{F 3}}$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On pose $v_n = \displaystyle\int_0^{u_n} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$.

Montrer que les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.

Question 6 ESCP 2006 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire que l'on a : $a_{i,j} = 1$ si $i = j+1$ ou $i = j-1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon)

Q1. Soit λ un scalaire. Que peut-on dire du rang de $A - \lambda I_n$?

Q2. Montrer que A admet exactement n valeurs propres réelles.

Question 7 ESCP 2006 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Question 8 ESCP 2006 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. Montrer que $A + I_n$ ou $A - I_n$ est inversible.

Question 9 ESCP 2006 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et u et v deux endomorphismes de E.

On suppose que $u \circ v = 0$ et que $u + v$ est un automorphisme de E. Montrer que $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = n$.

Question 10 ESCP 2006 $\boxed{\text{F 2}}$

Montrer que $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Existe-il un polynôme $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ on ait $\langle A, P\rangle = P(0)$? *(On pourra considérer les polynômes $P_n = \sqrt{n}(1-X)^n$)*

Question 11 ESCP 2006 $\boxed{\text{F 2}}$

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}^+$ et une espérance m_1 non nulle. On note F la fonction de répartition de X et on définit la fonction g par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1-F(x)}{m_1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que g est une densité de probabilité.

Question 12 ESCP 2006 $\boxed{\text{F 1}}$

Soit n et m deux entiers naturels non nuls, deux urnes U_1 et U_2 et un stock de $n+m$ boules.

A chaque étape, indépendante des précédentes, on choisit une urne, l'urne U_1 étant choisie avec la probabilité p et l'urne U_2 étant choisie avec la probabilité q et on met une boule dans l'urne choisie.

On s'arrête lorsque l'urne U_1 contient n boules ou lorsque l'urne U_2 contient m boules. On note X le nombre d'étapes ainsi effectuées.

Écrire une fonction en Pascal permettant de simuler la variable aléatoire X.

Question 13 ESCP 2006 $\boxed{\text{F 1}}$

Soit X une variable aléatoire réelle de densité f continue sur $\mathbb{R}$ et admettant une espérance. On suppose qu'il existe b tel que pour tout x réel $f(b-x) = f(x)$. Quelle est l'espérance de X ?

Question 14 ESCP 2006 $\boxed{\text{F 1}}$

Soit X une variable à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et F sa fonction de répartition. On suppose que :

- F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- X admet une espérance $E(X)$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x\big(1-F(x)-F(-x)\big) = 0$.

Montrer que $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} [1-F(t)-F(-t)]\,\mathrm{d}t$.

Question 15 ESCP 2006 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Une urne contient n boules rouges et n boules noires. On retire les boules de l'urne deux par deux jusqu'à ce que l'urne soit vide, à chaque rang du tirage toutes les poignées de deux boules possibles étant supposées équiprobables.

Quelle est la probabilité que tout au long de l'épreuve on n'obtienne que des paires bicolores ?

Question 16 ESCP 2006 $\boxed{\textbf{F 1}}$ (*élève*)

A et B sont deux événements de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Montrer que $P(A \cap B) \geqslant \text{Max}\big(P(A) - P(\overline{B}), P(B) - P(\overline{A})\big)$. Quand y a-t-il égalité ?

$\boxed{\text{JF}}$ Le max est savoureux !

Question 17 ESCP 2006 $\boxed{\textbf{F 1}}$ (*élève*)

a_1, a_2, ..., a_n sont n réels.

Trouver le reste dans la division de $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \big(\cos(a_k) + \sin(a_k)\, X\big)$ par $Q = X^2 + 1$.

Question 18 ESCP 2006 $\boxed{\textbf{F 1}}$ (*élève*)

X est une variable aléatoire à densité possèdant un moment d'ordre 2.

Comparer $V(|X|)$ et $V(X)$.

QUESTIONS COURTES 2007

Question 1 ESCP 2007 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + A = 0$. Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

▶ **On commencera par montrer que c'est faux (!) et on traitera l'équation $A^2 + I = 0$.**

Question 2 ESCP 2007 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres non nulles (s'il y en a).

Montrer que, lorsque $n = p$, $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

Question 3 ESCP 2007 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'équation $X^n = A$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, admet-elle au moins une solution ?

Question 4 ESCP 2007 $\boxed{\textbf{F 0}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \dfrac{1}{2^{n+1} n!} \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \, e^{t/2} dt$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n$. En déduire la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n \, n!}$.

Question 5 ESCP 2007 $\boxed{\textbf{F 3}}$

Soit $f(x) = \ln\big(x + \dfrac{1}{1+x}\big)$. Donner le domaine de définition de f.

Démontrer que les dérivées $f^{(n)}(0)$ d'ordre impair sont nulles, lorsque n est un multiple de 3.

▶ **C'est faux. On donnera une condition nécessaire et suffisant sur n pour que $\mathbf{f^{(n)}} = \mathbf{0}$.**

Question 6 ESCP 2007 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit (u_n) une suite réelle positive et λ un réel strictement positif. L'équivalence suivante est-elle vérifiée ?

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lambda \iff (u_n)^n \sim \lambda^n.$$

Question 7 ESCP 2007 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit X une variable aléatoire strictement positive de densité f. On suppose que X et $1/X$ admettent une espérance.

Comparer $E\left(\dfrac{1}{X}\right)$ et $\dfrac{1}{E(X)}$.

Question 8 ESCP 2007 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit $n \geqslant 1$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon identiquement distribué indépendant de loi de Poisson de paramètre inconnu $\lambda > 0$

On pose $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k, \quad T_n = \sqrt{n} \, \frac{\overline{X_n} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$

À l'aide de T_n, déterminer, pour n grand, un intervalle de confiance de λ au risque α donné.

Question 9 ESCP 2007 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Une urne contient initialement une boule rouge et une boule noire. On effectue dans cette urne une succession de tirages suivant le protocole suivant :

- si on tire une boule rouge, on remet dans l'urne $r > 0$ boules rouges avant le tirage suivant.
- si on tire une boule noire, on remet dans l'urne $s > 0$ boules noires avant le tirage suivant.

On s'arrête lorsque le nombre de boules d'une couleur présente dans l'urne est 10 fois plus grand que le nombre de boules de l'autre couleur.

Écrire une fonction PASCAL permettant de simuler cette expérience.

Question 10 ESCP 2007 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit A le point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(1, 0)$. Soit θ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$.

À tout $\omega \in \Omega$, on associe le point M_ω du cercle unité d'affixe $e^{i\theta(\omega)}$

Donner l'espérance de la variable aléatoire représentant la distance de A à M_ω.

Question 11 ESCP 2007 D. ADJERAD $\boxed{\textbf{F 1}}$

f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$. Montrer que si $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ ne sont pas supplémentaires alors f n'est pas diagonalisable.

Question 12 ESCP 2007 C. BONHOMME $\boxed{\textbf{F 1}}$

A est une matrice non nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Question 13 ESCP 2007 C. BRONES $\boxed{\textbf{F 1}}$

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suites de variable aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent la loi exponentielle de paramètre 1. N est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi géométrique de paramètre p. On suppose que les variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n\geqslant n}$ et N sont mutuellement indépendantes.

Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ définie par : $\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \underset{1\leqslant k\leqslant N(\omega)}{\operatorname{Min}} X_k(\omega)$.

Question 14 ESCP 2007 M. BOUCHER Oubliée mais du type suivant (ESCP 2006) $\boxed{\textbf{F 1 ou 0}}$

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Question 15 ESCP 2007 P. DESMICHEL $\boxed{\textbf{F 1}}$

f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\dim \operatorname{Ker} f = 2$. Donner plusieurs conditions nécessaires et suffisantes pour que f soit diagonalisable.

Question 16 ESCP 2007 G. GOBINET $\boxed{\textbf{F2}^+}$

X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $[-2, 2]$. Y est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p. X et Y sont indépendantes. t est un réel.

Trouver la probabilité pour que $\begin{pmatrix} X & 1 \\ t & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Question 17 ESCP 2007 J. NAKACHE $\boxed{\textbf{F 1}}$

Deux joueurs A et B jouent à Pile ou Face. On lance deux fois la pièce. Si l'on obtient PF (resp. FP), A (resp. B) gagne. Dans le cas contraire on recommence.

La probabilité d'obtenir Pile est p ($p \in]0,1[$). On suppose que la probabilité d'obtenir Pile est plus grande que celle d'obtenir Face.

Q1. Trouver la probabilité pour que le jeu s'arrête.

Q2. Le jeu est-il équitable ?

Question 18 **ESCP 2007** V. OWEN **F 1**

φ est une forme linéaire sur un espace vectoriel E de dimension n non nulle. u est un vecteur non nul de E.

On considère l'endomorphisme f de E défini par : $\forall x \in E,\ f(x) = x + \varphi(x)\, u$.

Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Question 19 **ESCP 2007** M. RAPAPORT **F 1**

Montrer que $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} = 2$.

Question 20 **ESCP 2007** F. TAN et N. RIFFI **F 1 ou 0**

λ est un réel non nul. $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \frac{1}{\lambda} & -1 \end{pmatrix}$. Trouver $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p!}\, (A_\lambda + A_{2\lambda})^{2p} \right)$.

Question 21 **ESCP 2007** T. TOFFIER **F 1**

f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout élément x de E, il existe un élément p de $\mathbb{N}^*$ tel que $f^p(x) = 0_E$.

Montrer qu'il existe un élément q de $\mathbb{N}^*$ tel que $f^q = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

JF Et si E est de dimension quelconque ?

Question 22 **ESCP 2007** J. VANNIMENUS **F 1 ou 0**

Montrer que la série de terme général $\dfrac{n^p}{2^n}$ converge.

Question 23 **ESCP 2007** D. BISMUTH, BERKANE **F 1**

A et B sont deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Q1. Montrer que si $P(A) \leqslant P(B)$ alors $P(A \cap B) - P(A)\,P(B) \leqslant P(A) - \big(P(A)\big)^2$.

Q2. Montrer que $P(A \cap B) - P(A)\,P(B) \leqslant \dfrac{1}{4}\cdot$ Existe t-il (A, B) tel qu'on ait égalité ?

Question 24 **ESCP 2007** W. PLANQUES *oubliée*

QUESTIONS COURTES 2008

Question 1 ESCP 2008 F 1

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$. On note f une densité de X. Justifier l'existence et calculer, pour tout z de $\mathbb{R}$:

$$G(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leqslant zx) f(x)\, dx.$$

Vérifier que G possède les propriétés caractéristiques d'une fonction de répartition.

Question 2 ESCP 2008 F 1

Soient X_1, X_2 et X_3 trois variables de Bernoulli de paramètres respectifs p_1, p_2 et p_3 éléments de $]0,1[$. On suppose ces variables définies sur le même espace probabilisé et indépendantes. On suppose que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ et on note $S = X_1 + X_2 + X_3$.

Déterminer la valeur maximale de la variance de S et préciser quand elle est atteinte.

Question 3 ESCP 2008 F 1

Soit α un réel non nul, n un entier strictement plus grand que 1 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A(A - \alpha I) = 0$.

Montrer que A est diagonalisable.

Question 4 ESCP 2008 F 2

L'équation matricielle $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a-t-elle des solutions dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$? Donner un exemple non trivial d'une matrice nilpotente telle que l'équation matricielle $X^2 = A$ possède des solutions.

Question 5 ESCP 2008 F 1

On considère l'équation $x^2 + px + q = 0$, avec $p, q \in \mathbb{Z}$. On suppose que cette équation admet une solution complexe non réelle z telle que $|z| \leqslant 1$.

Montrer que $|z| = 1$ et qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $z^n = 1$. Quelles sont les valeurs possibles de n ?

Question 6 ESCP 2008 F 1

Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien. Trouver toutes les fonctions f définies sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (u,v) \in E^2,\ f(u+v) - f(u-v) = 4\langle u, v\rangle.$$

Question 7 ESCP 2008 F 2

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe des réels $k > 0$ et $\alpha > 1$ tels que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+2}, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|^\alpha.$$

A-t-on le même résultat si on suppose $0 < \alpha < 1$?

Question 8 ESCP 2008 F 3

Soit A une matrice inversible telle que tous les coefficients de A et de A^{-1} sont positifs ou nuls. Montrer que chaque ligne et chaque colonne de A comporte un coefficient non nul et un seul.

Question 9 ESCP 2008 F 1

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X - Y$.

Question 10 ESCP 2008 F 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2n} - \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^{n}$.

Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

QUESTIONS COURTES ESCP 2009

Question 1 ESCP 2009 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A un élément non nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et T définie sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $T(M) = M - \mathrm{tr}(M)A$ où $\mathrm{tr}(M)$ est la somme des éléments diagonaux de M.

a) Montrer que T est un endomorphisme de E.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{tr}(A)$ pour que T soit bijective.

c) Caractériser T lorsque T n'est pas bijective.

Question 2 ESCP 2009 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient : $A^t AA^t AA = I$.

Question 3 ESCP 2009 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. E un espace euclidien de dimension n. $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de n vecteurs unitaires de E.

On suppose encore que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, n]\!],\ i \neq j \Rightarrow \|e_i - e_j\| = 1$.

Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.

Question 4 ESCP 2009 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs strictement positives, indépendantes, de même loi et admettant une espérance.

Montrer que $E\left(\dfrac{X}{X+Y}\right) = \dfrac{E(X)}{E(X+Y)}\cdot$

Question 5 ESCP 2009 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit un réel $a > 0$. Pour tout entier $n > a$, on considère une variable aléatoire X_n suivant la loi géométrique de paramètre $a/n\cdot$

Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires définies par $Y_n = \frac{X_n}{n}\cdot$

Question 6 ESCP 2009 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Une urne contient $4n + 2$ boules numérotées de 1 à $4n + 2$. On tire $2n + 1$ boules sans remise, quelle est la probabilité que la somme des numéros des boules tirées soit strictement supérieure à la somme des numéros des boules restantes ?

Question 7 ESCP 2009 $\boxed{\textbf{F 1}}$

On retourne une à une les cartes d'un jeu ordinaire (32 cartes) bien battu. Quel est le nombre moyen de cartes qu'il faut retourner pour voir le premier as ?

Question 8 ESCP 2009 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{2n} \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k\, e^{\frac{k}{2n}}\cdot$

Question 9 ESCP 2009 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit f une fonction positive et continue sur $\mathbb{R}_+$, telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt = 1$

Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(a) = e^{-a}$.

Question 10 ESCP 2009 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et f un endomorphisme de E. Déterminer la dimension de $\operatorname{Ker} f$ lorsque $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

Question 11 ESCP 2009 $\boxed{\textbf{F 2}}$

n appartient à $[\![2, +\infty[\![$. Soit P un polynôme réel de degré n, admettant n racines réelles distinctes.

a) Combien P' admet-il de racines réelles ?

b) Comparer la moyenne arithmétique des racines de P à la moyenne arithmétique des racines de P'.

Question 12 ESCP 2009 $\boxed{\textbf{F 1}}$ ANGLADE

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'quation $\left(z^2 + \dfrac{1}{z^2}\right)^2 + \left(z + \dfrac{1}{z}\right)^2 = 4$.

Question 13 ESCP 2009 $\boxed{\textbf{F 1}}$ SITBON

X est Y sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre p.

Trouver la probabilité pour que les deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & Y \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} X & X \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soient semblables.

Question 14 ESCP 2009 $\boxed{\textbf{F 1}}$ SALS

Soient X_1, ..., X_n, n variables aléatoires réelles indépendantes, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suivent la loi exponentielle de paramètre λ.

Q1. Déterminer la loi de $Y_n = \operatorname{Max}(X_1, ..., X_n)$.

Q2. Déterminer un équivalent de $P(Y_n \geqslant a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Question 15 ESCP 2009 $\boxed{\textbf{F 1}}$ PELLEGRINI

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E telle que pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $\|e_i\| = 1$ et $\|e_i\|^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} < e_i, e_j >^2$.

Montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Variante JF $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une famille de vecteurs $\boxed{\text{unitaires}}$ d'un espace vectoriel euclidien E (dont on ne précise pas la dimension...) telle que :

$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (< x, u_k >)^2$$

Montrer que $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base orthonormée de E.

Question 16 ESCP 2009 $\boxed{\textbf{F 1}}$ BUCCARI

M et X sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui prennent leurs valeurs dans N. Pour tout n dans $\mathbb{N}$ la loi de X sachant $\{M = n\}$ est la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

Trouver la loi de X en fonction de la loi de M. Comparer les lois de X et de $M - X$.

On suppose que M possède une espérance. Montrer que $E(X)$ existe et l'exprimer en fonction de $E(N)$.

Trouver la loi de X lorsque M suit la loi géométrique de paramètre p.

JF On entendra que M suit la loi géométrique "sur $\mathbb{N}$" de paramètre p ; autrement dit que $M+1$ suit notre loi géométrique de paramètre 1.

Question 17 **ESCP 2009** $\boxed{\textbf{F 1}}$ GARBE et HELD

Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x - 1 = 0$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}^+$ que nous noterons a_n.

Étudier la suite (a_n).

Question 18 **ESCP 2009** $\boxed{\textbf{F 1}}$ BLOCK

Soit X une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}^*$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $P(X = n) = P(X = -n) = \dfrac{1}{2n(n+1)}$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, A_n est l'événement : $\{X = n\} \cup \{X = -n\}$.

Montrer que l'espérance de X sachant A_n existe et la calculer.

Question 19 **ESCP 2009** $\boxed{\textbf{F 1}}$ DUTEIL

A et B sont deux événements. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B)\, P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A} \cap B)\, P(A \cap \overline{B}).$$

Question 20 **ESCP 2009** $\boxed{\textbf{F 2}^+}$ BILLETTE

f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, telle qu'il existe un polynôme de degré impair P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f^{(n)}(x)| \leqslant |P(x)|.$$

Montrer que f est nulle sur $\mathbb{R}$.

QUESTIONS COURTES 2010

Question 1 ESCP 2010 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Extremums de la fonction $f:\ (x,y)\mapsto e^x+e^y+e^{1-x-y}$, (x,y) décrivant $[0,1]^2$.

(On rappelle que la moyenne géométrique de trois nombres positifs est toujours inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique).

Question 2 ESCP 2010 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit P une fonction polynomiale. Montrer que l'équation $P(x)=e^x$ n'admet qu'un nombre fini de solutions réelles.

Question 3 ESCP 2010 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Trouver toutes les matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $M^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

Question 4 ESCP 2010 $\boxed{\textbf{F 2}}$

a) Soit $u\geqslant 1$. Comparer $\ln u$ et $u-1$.

b) Soit $f\in C^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$ telle que $f(0)=1$ et pour tout $x>0, f(x)>1$.

On suppose que : $\forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)\geqslant \dfrac{1}{\ln(f(x))}\cdot$ Montrer que : $\forall x\in[0,+\infty[,\ f(x)\geqslant 1+\sqrt{2x}$

Question 5 ESCP 2010 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$.

On définit la fonction F sur l'intervalle $]0,+\infty[$ en posant : $F(x)=\displaystyle\int_0^1 \frac{xf(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que F est continue sur $]0,+\infty[$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Question 6 ESCP 2010 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit X une variable aléatoire de densité $x\mapsto \dfrac{1}{\ln 2}\times\dfrac{1}{1+x}\times\mathbf{1}_{[0,1]}$.

Montrer que $Y=\dfrac{1}{X}-\left\lfloor\dfrac{1}{X}\right\rfloor$ suit la même loi que X.

Question 7 ESCP 2010 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit E un espace euclidien de dimension n, avec $n\geqslant 2$.

On suppose qu'il existe $n+1$ vecteurs $e_1,e_2,\dots,e_{n+1}$ tels que pour $i\neq j:\langle e_i,e_j\rangle<0$.

a) Montrer, en utilisant la norme de u, que si $u=\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_i e_i=0$, alors $\sum\limits_{k=1}^{n}|\lambda_i|e_i=0$

b) Montrer que n quelconques de ces vecteurs forment une base de E.

Question 8 ESCP 2010 $\boxed{\textbf{F 1}}$

On casse un bâton de longueur 1. Le point de rupture suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Calculer la probabilité que le grand morceau soit au moins 3 fois plus grand que le petit morceau.

Question 9 ESCP 2010 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que 2 événements A et B soient indépendants est que

$$P(A \cap B) \times P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A} \cap B) \times P(A \cap \overline{B}).$$

Question 10 ESCP 2010 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme dont toutes les racines sont réelles.

Montrer que pour tout x réel : $P'^2(x) \geqslant P(x)P''(x)$.

Réciproquement si pour tout réel x, $P'^2(x) \geqslant P(x)P''(x)$, P a-t-il toutes ses racines réelles ?

Question 11 ESCP 2010 S. ARSALANE et J.D. FOATA $\boxed{\textbf{F 1}}$

Existence et valeur de $\underset{(a,b)\in(]0,+\infty[)^2}{\text{Min}} \left(\sqrt{a+b}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}} + \dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)\right)$.

Question 12 ESCP 2010 O. GUESNÉ $\boxed{\textbf{F 1}}$

u_1, u_2, ..., u_n sont n réels tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^2 = 1$. A est la matrice $(u_i\, u_j)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = 2\,A - I_n$.

Montrer que B est orthogonale. Quelles-sont les valeurs propres de A ?

Question 13 ESCP 2010 G. FOUBART $\boxed{\textbf{F 1}}$

André, Jacques et Maurice se donnent rendez-vous et se déplacent de façon indépendante.

La probabilité pour que André (resp. Jacques et Maurice) arrive à l'heure est $1/2$ (resp. $1/3$ et $1/4$).

Quelle est la probabilité pour que au moins 2 personnes soient à l'heure ?

Question 14 ESCP 2010 X. MARTUCCI $\boxed{\textbf{F 1}}$

X est une variable aléatoire de densité f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln 2}\,\dfrac{1}{x+1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On pose $Y = \dfrac{1}{X} - \text{Ent}\left(\dfrac{1}{X}\right)$ Montrer que Y suit la même loi que X.

Question 15 ESCP 2010 E. JARDIN $\boxed{\textbf{F 1}}$

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $P(X_n = 1) = p$ et $P(X_n = -1) = q = 1 - p$ $(0 < p < 1)$.

Trouver la loi de $Y_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} X_k$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que la suite Y_n converge en loi.

Question 16 ESCP 2010 Obtenue par E. JARDIN $\boxed{\textbf{F 1}}$

A est une matrice carrée d'ordre n. Pour tout (i,j) appartenant à $[\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}=1$ si $i+j=n+1$ et 0 sinon.

Déterminer le spectre de A

Question 17 **ESCP 2010** F. HUA $\boxed{\textbf{F 1}}$

Étudier la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-1}-\sqrt{x^2-1}\right)\mathrm{d}x$.

Question 18 **ESCP 2010** T. VERGER $\boxed{\textbf{F 1}}$

f est une application continue de $[a,b]$ $(a<b)$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|=\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ si et seulement si f garde un signe constant sur $[a,b]$.

Question 19 **ESCP 2010** K. AFRIAT $\boxed{\textbf{F 1}}$

Q1. Montrer que $F: x\to\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Q2. $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ ayant pour fonction de répartition F.

Montrer que $(\mathrm{Max}(X_1,X_2,\ldots,X_n)-\ln n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi.

Question 20 **ESCP 2010** J. DIAZ $\boxed{\textbf{F 1}}$

Donner les conditions pour que $x\to a\,e^{-|x|}\,\ln(1+e^{|x|})$ soit une densité de probabilité.

Question 21 **ESCP 2010** S. ALLAIN $\boxed{\textbf{F 1}}$

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a p valeurs propres distinctes et est diagonalisable. Donnez le degré minimal pour un polynôme annulateur non nul de cette matrice.

Question 22 **ESCP 2010** J. MESNILDREY et M. PARIN $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$, de densité f continue sur $[a,b]$ et nulle en dehors de $[a,b]$.

Justifier l'existence d'un réel α tel que $E(|X-\alpha|)$ soit minimale. Que représente α ?

Question 23 **ESCP 2010** L. VIE $\boxed{\textbf{F 2}}$

n et p sont deux éléments de $[\![2,+\infty[\![$. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^p=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $A^{p-1}\neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

On pose $E=\{P(A)\,;\,P\in\mathbb{R}[X]\}$.

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et trouver sa dimension.

Question 24 **ESCP 2010** D. ATTIAS $\boxed{\textbf{F 1}}$

On lance une pièce qui donne face avec la probabilité p (où p appartient $]0,1[$). n est entier supérieur ou égal 1. On note : P_n (resp. F_n) la variable aléatoire égale au nombre de piles (resp. faces) obtenus au cours des n premiers lancers. ε est un réel strictement positif.

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}P\left(\left|\frac{F_n-P_n}{n}-(1-2p)\right|\leqslant\varepsilon\right)=1$.

Question 25 **ESCP 2010** G. PECORARI $\boxed{\textbf{F 1}}$

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. Les boules numérotées de 1 à k sont rouges et les autres blanches $(1 < k < n)$.

On effectue n tirages successifs et sans remise d'une boule dans l'urne. Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, X_i est la variable aléatoire égale à 1 si on tire une boule rouge au $i^{\text{ème}}$ tirage et 0 sinon.

Trouver la loi de X_i, $E(X_i)$, $V(X_i)$.

Écrire une fonction en Turbo-Pascal qui simule la variable aléaoire X_i.

Question 26 **ESCP 2010** J. HÉRY $\boxed{\textbf{F 2}}$

n appartient à $[\![2, +\infty[\![$. Soit P un polynôme réel de degré n, admettant n racines réelles distinctes.

a) Combien P' admet-il de racines réelles ?

b) Comparer la moyenne arithmétique des racines de P à la moyenne arithmétique des racines de P'.

Question déjà donnée en 2009.

Question 27 **ESCP 2010** PROST et ROUX

Une urne contient $4n + 2$ boules numérotées de 1 à $4n + 2$. On tire $2n + 1$ boules sans remise, quelle est la probabilité que la somme des numéros des boules tirées soit strictement supérieure à la somme des numéros des boules restantes ?

Question déjà donnée en 2009.

QUESTIONS COURTES 2011

Question 1 ESCP 2011 F1

Q1. Montrer que la fonction $F : x \to \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ vérifie les propriétés d'une fonction de répartition.

Q2. Déterminer la loi de la borne supérieure M_n de n variables aléatoires indépendantes de même loi de fonction de répartition F.

Q3. Étudier la convergence en loi de la suite $(M_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Déjà vu en 2010

Question 2 ESCP 2011 F1$^-$

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Q1. Montrer que pour tout réel u tel que $|u| \leqslant 1$, $E(u^X)$ existe.

Q2. Montrer que pour tout réel u tel que $|u| < 1$: $\dfrac{1-E(u^X)}{1-u} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)\, u^k$.

Question 3 ESCP 2011 F1$^+$

Soit N une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = P(N = n)$.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que , pour tout n dans $N(\Omega)$, la loi conditionnelle de X sachant que $[N = n]$ est la loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, n\}$.

Q1. Comparer la loi de X et celle de $N - X$.

Q2. Si N suit la loi géométrique de paramètre p, calculer $E(X)$.

Question 4 ESCP 2011 F1$^-$

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}^*$, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = -n) = P(X = n) = \dfrac{1}{2n(n+1)}$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement $[(X = -n) \cup (X = n)]$.

Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X admet une espérance conditionnelle relatives à A_n.

Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} E_{A_n}(X)\, P(A_n)$ ou $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} E(X \mid A_n)\, P(A_n)$.

La variable alétoire X admet-elle une espérance ?

Déjà donné en 2009

Question 5 ESCP 2011 F2

Soient trois nombres complexes a, b , c. Calculer A^7 avec : $A = \begin{pmatrix} 1+i\sqrt{3} & a & b \\ 0 & 1-i\sqrt{3} & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Question 6 ESCP 2011 F1

$A = (a_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 1$ et $\forall i \in [\![1,n]\!],\ a_{i,i} > 1$.

Montrer que A est matrice définie positive, c'est à dire que A est symétrique réelle telle que pour tout élément non nul X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX > 0$.

Question 7 ESCP 2011 $\boxed{\textbf{F1}^-}$

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ ne sont pas supplémentaires.

A-t-on : $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} f$ ou $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$?

Question 8 ESCP 2011 $\boxed{\textbf{F2}}$

Soient a et b deux réels et f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b + |x|$.

Q1. A quelle condition sur a et b la fonction f est-elle bijective ?

Q2. On suppose cette condition remplie. Calculer $f^{-1}(y)$ en fonction de y.

Question 9 ESCP 2011 $\boxed{\textbf{F1}}$

f est une application continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

On pose : $\forall x \in [0, +\infty[,\ h(x) = e^{-x} \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Q1. Montrer que la fonction h est décroissante.

Q2. En déduire que la fonction f est identiquement nulle.

Question 10 ESCP 2011 $\boxed{\textbf{F1}}$

a est un réel et f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\operatorname*{Sup}_{t\in\mathbb{R}} |f''(t)|$ existe. On pose $M = \operatorname*{Sup}_{t\in\mathbb{R}} |f''(t)|$.

On pose : $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \displaystyle\int_a^{a+x} f(u)\,\mathrm{d}u - x\, f\left(a + \frac{x}{2}\right)$.

Q1. Interpréter géométriquement le nombre $G(x)$, pour f positive et $x > 0$.

Q2. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R},\ |G'(x)| \leqslant M\,\dfrac{x^2}{4}$... ou $\forall x \in \mathbb{R},\ |G'(x)| \leqslant M\,\dfrac{x^2}{8}$.

Q3. En déduire que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $|G(x)| \leqslant M\,\dfrac{|x|^3}{12}$.

QUESTIONS COURTES 2011 (suite)

Question 1 ESCP 2011 Obtenu par M. CARRIERE $\boxed{\textbf{F1}}$

Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. E un espace vectoriel euclidien de dimension n. $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de n vecteurs unitaires de E.

On suppose encore que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, n]\!],\ i \neq j \Rightarrow \|e_i - e_j\| = 1$.

Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.

Déjà donnée en 2009.

Question 2 **ESCP 2011** Obtenu par M. CARRIERE $\boxed{\textbf{F1}}$

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $P(X_n = 1) = p$ et $P(X_n = -1) = q = 1 - p$ $(0 < p < 1)$.

Trouver la loi de $Y_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} X_k$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que la suite (Y_n) converge en loi.

Déjà donnée en 2010 à l'ESCP et à HEC.

Question 3 **ESCP 2011** Obtenu par M. CARRIERE $\boxed{\textbf{F1}^-}$

On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir deux piles consécutifs ou deux faces consécutifs.

Donner la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de lancers effectués.

Question 4 **ESCP 2011** Obtenu par M. CARRIERE $\boxed{\textbf{F1}^-}$

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi exponentielle de paramètre a.

x est un réel strictement positif.

Q1. Donner la loi et l'espérance de la variable aléatoire N_x égale à Min $\{i \in \mathbb{N}^* \mid \{X_i > x\}$ est réalisé$\}$.

Q2. Calculer $P\big(N_x > E(N_x)\big)$.

Question 5 **ESCP 2011** E. PHILIP $\boxed{\textbf{F1}}$

α est un élément de $]0, 1]$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ (*hum...*), X_n suit la loi binômiale de paramètres n et $\dfrac{\alpha}{n}\cdot$

Montrer que la suite (X_n) converge en loi et trouver la loi limite.

Question 6 **ESCP 2011** V. MESKHI $\boxed{\textbf{F1}}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 2 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Question 7 **ESCP 2011** R. BUEGUE et T. ADELINE $\boxed{\textbf{F1}^+}$

On place n boules numérotées de 1 à n dans n cases numérotées de 1 à n (une boule par case).

p_n est la probabilité pour qu'au moins une boule ait un numéro correspondant au numéro de sa case.

Trouver $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n$.

Question 8 **ESCP 2011** M. DELAFOSSE et D. DEROCHEBOUET $\boxed{\textbf{F1}}$

On considère que la durée de vie d'une abeille suit une loi exponentielle de paramètre inconnu.

Au bout de 70 jours l'apiculteur s'aperçoit que la moitié des abeilles de la ruche est mortes.

Quelle est approximativement la durée de vie moyenne d'une abeille ?

Question 9 **ESCP 2011** C. DAUDET $\boxed{\textbf{F1}}$

Q1. Donner les conditions pour que $f_a : x \to a\, e^{-|x|} \ln(1 + e^{|x|})$ soit une densité de probabilité.

Q2 X est une variable aléatoire de densité f_a. X admet-elle une espérance ?

Déjà donnée en 2010.

Question 10 **ESCP 2011** G. FOUBART $\boxed{\mathbf{F1^+}}$

Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x - 1 = 0$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}^+$ que nous noterons x_n.

Étudier la suite (x_n).

Déjà donnée en 2009.

Question 11 **ESCP 2011** J. ESSO $\boxed{\mathbf{F1}}$

X est une variable aléatoire à densité qui possède un moment d'ordre 2.

Montrer que $E(|X|)$ existe et que $E(|X|) \leqslant \sqrt{E(X^2)}$.

Une seconde question oubliée

Question 12 **ESCP 2011** T. EHRMANN $\boxed{\mathbf{F1^+}}$

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une poignée de boules de l'urne, toutes les poignées y compris la poignée vide étant équiprobables. S est la somme des numéros obtenus dans la poignée.

Calculer l'espérance de S.

Question 13 **ESCP 2011** L. CANELA $\boxed{\mathbf{F1^+}}$

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variable aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et qui suivent la loi exponentielle de paramètre λ.

On suppose que $\lambda \geqslant 4$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\cdot$

Q1. Montrer que M_n est un estimateur sans biais et convergent de $\dfrac{1}{\lambda}\cdot$

Q2. Quel n faut-il prendre pour que $\left| M_n - \dfrac{1}{\lambda} \right|$ soit inférieur ou égal à 0.01 au risque 5%. On rappelle que $\Phi(1.96) = 0.975$.

QUESTIONS COURTES 2012

Les neuf premières questions ont été publiées par l'ESCP. Les autres ont été recueillies par des élève et peuvent être incomplètes (ou approximatives).

Question 1 ESCP 2012 F 1 MARHABEN

A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = {}^tA$.

Quand la matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

Montrer que A est orthogonale.

Question 2 ESCP 2012 F 1

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que $X\,g(X)$ et $g'(X)$ admettent une espérance.

a) Montrer que $E\big(g'(X)\big) = E\big(X\,g(X)\big)$.

b) En déduire les valeurs des moments de X.

Question 3 ESCP 2012 F 2

f est une fonction T-périodique sur $\mathbb{R}$, avec $T > 0$, dérivable sur $\mathbb{R}$.

On suppose que T s'annule en p points distincts x_1, x_2, ..., x_p de $[0, T[$ tels que $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$.

Montrer que f' s'annule en au moins p points distincts de [0,T[et distincts de x_1, x_2, ..., x_p.

Question 4 ESCP 2012 F2 P. KONIECZNY

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note P_n le polynôme $X(X-1)(X-2)\dots(X-n)$.

a). Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, P_n' possède une racine et une seule dans $]0, 1[$ que nous noterons r_n.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R} - [\![0, n]\!],\ \dfrac{P_n'(x)}{P_n(x)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{x-k}\cdot$ En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} r_n$.

Question 5 ESCP 2012 F 1

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes, suivant la même loi géométrique de paramètre p.

Déterminer la probabilité de l'événement $\{3X = 2Y\}$.

Question 6 ESCP 2012 F 1

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On pose $\forall k \in \mathbb{N},\ p_k = P(X = k)$ et on suppose que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_k = \left(a + \dfrac{b}{k}\right) p_{k-1}$ ou a et b sont deux réels réels tels que $a \leqslant 0$ et $b > 0$.

La variable aléatoire X peut-elle suivre :

a) une loi exponentielle ?

b) une loi de Poisson ?

c) une loi binomiale ?

d) une loi géométrique ?

Question 7 ESCP 2012 $\boxed{\text{F 1}}$ G. BURNEL et L. CHICHEPORTICHE

On considère un certain jeu de casino et on note X la variable aléatoire égale au gain du casino à chaque partie jouée. Un joueur joue une partie et il note X_0 la variable aléatoire égale à la somme qu'il perd.

Pour mesurer sa malchance, celui-ci observe les pertes X_1, X_2, ..., X_n, ... des joueurs suivants, en supposant que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X.

Il s'intéresse à l'indice du premier joueur qui perd plus que lui, autrement dit à la variable aléatoire N du plus petit indice n tel que l'événement $\{X_n > X_0\}$ soit réalisé.

a) Justifier que $P(N > n-1) = \dfrac{1}{n}\cdot$

b) Le joueur a-t-il raison de penser qu'il est vraiment malchanceux ?

Non le joueur n'a visiblement pas de raison de penser qu'il est malchanceux mais les candidats qui ont eu à traiter cet exercice si (encore que...). Il manque visiblement une hypothèse...

Pour l'anecdote l'un de mes deux élèves ci-dessus à eu 20 à son épreuve et l'autre 11...

Supposons que le résultat soit juste. En l'appliquant pour n=2 il vient $P(X_1 \leqslant X_0) = \dfrac{1}{2}\cdot$ *En considérant que* $X_1 - X_0$ *et* $X_0 - X_1$ *ont même loi et en remarquant que* $P(X_1 < X_0) + P(X_0 < X_1) + P(X_1 = X_0) = 1$ *il vient rapidement* $P(X_1 = X_0) = 0$.

$\boxed{\text{Nous supposerons, pour traiter cet exercice, que } \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i \neq j \Rightarrow P(X_i = X_j) = 0.}$

Question 8 ESCP 2012 $\boxed{\text{F 1}}$ A. GAY

λ et μ sont deux réels. On suppose λ n'est pas nul.

On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes définie par : $P_0 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = \lambda\, P_n + \mu\, P'_n$.

Q1. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{R}_2[X]$.

Q2. n est fixé dans $\mathbb{N}$ et Q est un élément de $\mathbb{R}_2[X]$. Existe-t-il P_0 dans $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $P_n = Q$?

Question 9 ESCP 2012 $\boxed{\text{F 1}}$ Obtenue par un élève d'ECS 1

A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AMB = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Montrer que A est nulle ou B est nulle.

Question 10 ESCP 2012 $\boxed{\text{F1}}$ S. LY et N. KARPIEL

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire 3 boules simultanément et X, Y et Z sont les variables aléatoires égales au numéro des boules obtenues avec $X < Y < Z$.

Q1. Trouver la loi de Y.

Q2. Montrer que Y et $n+1-Y$ ont la même loi. Calculez $E(Y)$.

Question 11 ESCP 2012 $\boxed{\text{F1}}$ I. KARDASZEWICZ

$(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables alétaoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent la même loi exponentielle de paramètre a.

Soit x un réel strictement positif. Trouver la loi de la variable aléatoire N_x égale à $\mathrm{Min}\{k \in \mathbb{N}^* \mid X_k > x\}$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} P(N_x > E(N_x))$.

Déjà vu en 2011.

Question 12 ESCP 2012 $\boxed{\text{F } 1^+}$ J. KY

X est une variable aléatoire à densité de densité $x \to \dfrac{1}{\ln 2}\,\dfrac{1}{1+x}\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

Montrer que $Y = \dfrac{1}{X} - \mathrm{Ent}\left(\dfrac{1}{X}\right)$ et X ont même loi.

Déjà vu en 2010. Vu aussi en exercice préparé en 2003 (3.38).

Question 13 ESCP 2012 $\boxed{\text{F } 1^-}$ E. MESKHI

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f nulle sur $]-\infty, 0[$ et continue sur $[0, +\infty[$. On suppose que X possède une espérance.

Montre que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = 0$ et que $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(X > x)\,\mathrm{d}x$.

Un marronnier !

Question 14 ESCP 2012 $\boxed{\text{F } 1}$ T. PILEWICZ

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant toutes la même loi.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X_n = 1) = p$ et $P(X_n = -1) = q = 1-p$ où p est un réel appartenant à $]0,1[$ et différent de $\dfrac{1}{2}\cdot$

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, A_n est l'événement $\{X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 0\}$.

Q1. Calculer pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $P(A_{2n})$ et $P(A_{2n-1})$.

Q2. Donner la nature de la série de terme général $P(A_n)$ (on rappelle que $n! \sim \sqrt{2\pi\, n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$).

Question 15 ESCP 2012 $\boxed{\text{F } 1}$ M. ZYCH

$E = [\![1,4]\!] \times [\![1,4]\!]$ est inclu dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure habituelle.

On choisit une partie de E constituée de 4 points de E (ce choix se fait de manière équiprobable).

Q1. Trouver la probabilité pour que ces quatre points soient alignés.

Q2. Trouver la probabilité d'avoir au moins trois points alignés.

Question 16 ESCP 2012 $\boxed{\text{F } 1}$ S. TEIAR

f est une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f(1) = 0$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

Q1. Nature de la suite de terme général u_n.

Q2. Nature de la série de terme général u_n.

Question 17 **ESCP 2012** $\boxed{\textbf{F 1}}$ **I. YAZBECK**

M est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXMX \geqslant 0$ et telle qu'il existe un élément non nul X_0 de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tX_0MX_0 = 0$.

Q1. Existe-t-il une matrice symétrique S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = {}^tSS$?

Q2. Existe-t-il une matrice orthogonale Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = {}^tQQ$?

Q3. Existe-t-il une matrice inversible A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = {}^tAA$.

Question 18 **ESCP 2012** $\boxed{\textbf{F 1}}$ **M. ARNOLD**

A, B, C, D sont quatre événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On pose $a = P(A \cap B)$, $a = P(\overline{A} \cap B)$, $a = P(A \cap \overline{B})$, et $a = P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Exprimer $\mathrm{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$ en fonction de a, b, c et d. Montrer $\mathrm{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) \in \left[-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right]$

Question 19 **ESCP 2012** $\boxed{\textbf{F 1}}$ **A. DEROO**

p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$ de rang 2. f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et g une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. On suppose que $g \circ f = p$.

Calculer le rang de f et de g.

Question 20 **ESCP 2012** $\boxed{\textbf{F 1}}$ **V. HUANG**

$n \in \mathbb{N}^*$ et X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui prend ses valeurs dans $[\![0, n]\!]$. $f : t \to E(t^X)$.

Q1. Montrer que pour tout élément k de $[\![1, n]\!]$ la dérivée $k^{\text{ème}}$ de f en 1 vaut $E\big(X(X-1)\dots(X-k+1)\big)$.

On pose $E_0(X) = 1$ et $\forall k \in [\![1, n]\!],\ E_k(X) = E\big(X(X-1)\dots(X-k+1)\big)$.

Q2. Montrer que pour tout élément j de $[\![0, n]\!]$, $P(X = j) = \dfrac{1}{j!} \displaystyle\sum_{k=j}^{n} \dfrac{(-1)^{k-j}}{(k-j)!} E_k(X)$

Question 21 **ESCP 2012** $\boxed{\textbf{F 1}}$ **C. GRASSET et C. HAYEM**

X est une variable aléatoire à densité qui possède un moment d'ordre 2.

Montrer que $E\big(|X|\big)$ existe et que $E\big(|X|\big) \leqslant \sqrt{E(X^2)}$.

Déjà vu en 2011.

Question 22 **ESCP 2012** $\boxed{\textbf{F 1}}$ Obtenue par **S. TEIAR**

N et X sont deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On suppose que, pour tout n dans $\mathbb{N}$ la loi de X sachant $\{N = n\}$ est la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

Comparer les lois de X et de $N - X$.

Déja vu en 2010 et 2011.

Question 23 **ESCP 2012** $\boxed{\textbf{F 1}}$ Obtenue par **S. TEIAR**

A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est inversible et qu'il existe q dans $\mathbb{N}^*$ telle que $B^q = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Montrer que $I_n + A^{-1}BA$ et $I_n + ABA^{-1}$ sont inversibles.

Question 24 ESCP 2012 $\boxed{\text{F 1}}$ Obtenue par **S. TEIAR**

Q1. Montrer que la fonction $F : x \to \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ vérifie les propriétés d'une fonction de répartition.

Q2. Déterminer la loi de la borne supérieure M_n de n variables aléatoires indépendantes de même fonction de répartition F.

Q3. Étudier la convergence en loi de la suite $(M_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Déja vu en QSP à l'ESCP en 2010, 2011. Vu à l'oral de l'ESCP en 2003 3.13, 2005 3.4.

Question 25 ESCP 2012 $\boxed{\text{F2}}$

On considère la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \displaystyle\int_0^{u_n} (1 - e^{-t})\,\mathrm{d}t$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Montrer que la série de terme général u_n converge.

Question 26 ESCP 2012 $\boxed{\text{F2}}$

X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que $X+Y$ suive une loi de Bernoulli.

Montrer que l'une des deux variables est presque sûrement constante.

Question 27 ESCP 2012 $\boxed{\text{F1}}$

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. X suit la loi exponentielle de paramètre λ et Y suit la loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$. $Z = XY$.

Z est-elle une variable aléatoire discrète ? à densité ?

Question 28 ESCP 2012 $\boxed{\text{F1}}$

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ v(A) = A + {}^tA$.

Q1. Montrer que v est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer v^2.

Q2. Montrer que v est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.

Q3. Déterminer $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} v$.

Question 29 ESCP 2012 $\boxed{\text{F1}}$

$E = \mathbb{R}_n[X]$ et $F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$. E est munit du produit scalaire canonique. Déterminer $F^\perp$

Sans doute incomplet. On peut donc ajouter : trouver la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique de E, par exemple.

QUESTIONS COURTES 2013

Question 1 ESCP 2013 $\boxed{\text{F2}}$

1. Soit $u \geqslant 1$. Comparer $\ln u$ et $u-1$.

2. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ telle que $f(0) = 1$ et pour tout $x > 0, f(x) > 1$.

On suppose que : $\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) \geqslant \dfrac{1}{\ln(f(x))}$. Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) \geqslant 1 + \sqrt{2x}$.

Déjà vu à l'ESCP en 2010.

Question 2 ESCP 2013 $\boxed{\text{F2}}$

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \big(f(t)\big)^n \,\mathrm{d}t$, et on suppose que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

1. En raisonnant par l'absurde, montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $|f(t)| \leqslant 1$.

2. En considérant la suite $(I_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que pour tout $t \in [0,1], f(t) \in \{-1, 0, 1\}$.

3. En déduire f.

Question 3 ESCP 2013 $\boxed{\text{F1}^+}$

Soit f une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Montrer que pour tout élément x de $[0, +\infty[$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Question 4 ESCP 2013 $\boxed{\text{F1}}$

Soit E l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant la relation : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ P(zz') = P(z)\,P(z')$.

a) Déterminer les polynômes de $\mathbb{C}_1[X]$ éléments de E.

b) Déterminer tous les polynômes éléments de E.

Question 5 ESCP 2013 $\boxed{\text{F1}^-}$ Jessica et Robin COHEN

P, Q, R, S sont trois éléments de $\mathbb{R}_3[X]$. Les propositions suivantes sont-elles des conditions suffisantes à la non liberté de la famille (P, Q, R, S) ?

Proposition a) $P(0) = Q(0) = R(0) = S(0) = 0$

Proposition b) $P(0) = Q(0) = R(0) = S(0) = 1$

Question 6 ESCP 2013 $\boxed{\text{F1}^+}$ Natacha BOGDANIUK

E est l'espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$. T est l'application de E dans E qui à toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E associe la suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $\left(\dfrac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q1. T est-elle surjective ? injective ?

Q2. Résoudre l'équation $u \in E$ et $T(u) = \dfrac{1}{2}\, u$.

Question 7 **ESCP 2013** $\boxed{\textbf{F1}}$ **Thomas PERARD**

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent la loi géométrique de paramètre p.

Trouver la probabilité pour que les matrices $\begin{pmatrix} X & X \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ soient semblables.

Déjà vu à l'ESCP en 2009.

Question 8 **ESCP 2013** $\boxed{\textbf{F1}}$

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Soient f et g deux endomorphismes de tels que $f \circ g = g \circ f$.

On note S (resp. A) la matrice de f (resp. g) dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E.

On suppose que S est symétrique et A antisymétique.

Montrer que $\forall x \in E,\ \|(f-g)(x)\| = \|(f+g)(x)\|$

Déjà vu à HEC en 2007.

Question 9 **ESCP 2013** $\boxed{\textbf{F1}}$

Dans une file d'attente de n personnes, résultant de la distribution au hasard de ces personnes, se trouvent deux amis Jean et Paul. Quelle est la probabilité que Jean soit séparé de Paul par m personnes ? Quel est le nombre de personnes le plus probable qui séparent Jean et Paul ?

Question 10 **ESCP 2013** $\boxed{\textbf{F1}^-}$ **Arthur SEZILLE**

On jette indéfiniment et de manière indépendante une pièce équilibrée et on définit l'événement E : "on obtient sur deux tours consécutifs le même résultat (pile-pile ou face-face)".

On appelle X la variable aléatoire égale au numéro du tour où l'événement E se réalise pour la première fois.

Trouver la loi de X et son espérance.

Déjà vu à l'ECSP en 2011.

Question 11 **ESCP 2013** $\boxed{\textbf{F1}^+}$

On retourne une à une les cartes d'un jeu ordinaire (32 cartes). Quel est le nombre moyen de cartes qu'il faut retourner pour voir le premier as ?

Déjà vu à l'ECSP en 2009.

Question 12 **ESCP 2013** $\boxed{\textbf{F1}}$ **ADELINE**

X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi de Poisson de paramètre λ.

Trouver la loi et l'espérance de la variable aléatoire $Y = (-1)^X$.

Question 13 **ESCP 2013** $\boxed{\textbf{F1}}$ **Sofyan FORTAS, Nassim ELOUARZADI, Germain GAUTHIER, Perrine GAYET**

a est un réel strictement positif. $n_0 = \text{Ent}\,(a) + 1$.

Pour tout n dans $[\![n_0,+\infty[\![$, X_n est une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $\frac{a}{n}\cdot$

Étudier la convergence en loi de la suite $\left(\frac{X_n}{n}\right)_{n\geqslant n_0}$.

Déjà vu à l'ECSP en 2009 et 2011.

Question 14 **ESCP 2013** $\boxed{\textbf{F1}}$ **Robin MISSIRIAN**

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ indépendantes, X de loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ et Y de loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (m,μ) pour que $P(Y\leqslant X)\geqslant \frac{1}{2}\cdot$

Question 15 **ESCP 2013** $\boxed{\textbf{F1}^-}$ **Baptiste GUERIN**

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

Q1. X est une variable aléatoire, il existe un réel c tel que $P(\mathrm{Ent}\,(X)<c)=1$.

Q2. f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, X est une variable aléatoire possèdant une expérance alors $f(X)$ possède une espérance.

Q3 Oubliée ?

QUESTIONS COURTES 2014

Question 1 ESCP 2014

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Dire si les implications suivantes sont vraies ou fausses et justifier la réponse :

a) Si A est inversible, alors pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ il existe un unique $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A\,X = Y$.

b) Si A est inversible, alors pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ il existe un $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A\,X = Y$.

c) Si pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ il existe un unique $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A\,X = Y$, alors A est inversible.

d) Si pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ il existe un $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A\,X = Y$, alors A est inversible.

e) Si A est inversible, alors il existe un unique $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A\,X = U$.

f) S'il existe un unique $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A\,X = U$, alors A est inversible.

Question 2 ESCP 2014

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la même loi géométrique de paramètre $p > 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

a) $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que la variable aléatoire $\dfrac{1}{S_n}$ admet une espérance, qu'on notera m.

b) $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ Calculer l'espérance de $\dfrac{S_k}{S_n}$ en fonction de m.

Question 3 ESCP 2014

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tA{\times}A = {}^tB{\times}B$.

1. Montrer que A et B ont même rang.

2. On suppose B inversible. Montrer qu'il existe U telle que ${}^tU{\times}U = I_n$ et $A = U{\times}B$.

Question 4 ESCP 2014

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 telle que f et f' soient bornées.

Existence et calcul de $E(Xf(X) - f'(X))$.

Question 5 ESCP 2014

On considère une suite infinie de lancers d'une pièce, la probabilité d'obtenir Pile étant égale à $0 < p < 1$ et celle d'obtenir Face égale à $1 - p$.

Soit X_n le résultat du n-ième lancer.

Les événement $A_n = [X_n \neq X_{n-1}]$ sont-ils indépendants ?

Question 6 ESCP 2014

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit (a, b) une famille orthonormée de E. Soit f l'application définie par

$$f : x \to \langle x, a\rangle b - \langle x, b\rangle a.$$

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = (\mathrm{Ker}(f))^\perp$.
2. L'application f est-elle diagonalisable ?

Question 7 ESCP 2014

Soit p un réel de $]0, 1[$ et U une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi uniforme sur $]0, 1]$ et X la variable aléatoire définie par : $X = \left\lfloor \dfrac{\ln(U)}{\ln(1-p)} \right\rfloor + 1$ où $\lfloor y \rfloor$ désigne la partie entière de y.

Déterminer la loi de X.

Question 8 ESCP 2014

Soient deux variables aléatoires discrètes X, Y à valeurs dans $\mathbb{R}$, indépendantes de même loi, et admettant une espérance $M \neq 0$ et une variance $V \neq 0$.

Calculer l'espérance et la variance de XY en fonction de M et V.

Les variables $X + Y$ et XY sont-elles indépendantes ?

Question 9 ESCP 2014

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit A une matrice donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une application linéaire.

On définit l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = M - \phi(M)A$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\phi(A)$ pour que f soit bijective.

Question 10 ESCP 2014

Déterminer $E(XYZ)$ et $V(XYZ)$ avec X, Y, et Zdes variables aléatoires disrcrètes mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Même question pour $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

Question 11 ESCP 2014

Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur $\mathbb{R}^+$. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ T(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Monter que T est un endomorphisme de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
2. Déterminer les couples $(f, g) \in \left(\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})\right)^2$ tels que $T(f) = g$ et $T(g) = f$.