

Voici les questions sans préparation 2003 qu'à bien voulu nous fournir l'ESCP. Suivent quelques bribes de correction. En fait ce ne sont pas des corrections mais des pistes. Les solutions ne sont pas optimales. Il doit aussi rester quelques erreurs mais c'est la loi du genre non ?

QUESTIONS COURTES 2003

F 1 Immédiat.

F 2 Demande un peu de travail.

F 3 Demande un peu de réflexion.

Question 1 ESCP 2003 **F 3**

Soient A, B deux matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A admet n valeurs propres distinctes et que tout vecteur propre de A est également vecteur propre de B .

Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = B$.

Question 2 ESCP 2003 **F 2**

Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 4 et une variance non nulle. Minimiser la quantité

$$f(a, b) = E[(X^2 - a - bX)^2]$$

lorsque (a, b) parcourt \mathbb{R}^2 .

Question 3 ESCP 2003 **F 2**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. Soient H_1, H_2 deux hyperplans de E (sous-espaces vectoriels de dimension $n - 1$). Quelle est la dimension de $H_1 \cap H_2$?

Question 4 ESCP 2003 **F 3**

Parmi tous les parallélépipèdes rectangles de surface totale S , quel est celui (quels sont ceux) de volume maximal ?

Question 5 ESCP 2003 **F 2**

Soit X une variable aléatoire de densité f paire et continue sur \mathbb{R} . On suppose que X^2 suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer f .

Question 6 ESCP 2003 **F 2**

Soit $E = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c, d) réels pour que φ définie sur E^2 par

$$\varphi(X, Y) = {}^tX \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} Y$$

soit un produit scalaire sur E .

Question 7 ESCP 2003 **F 2**

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires qui converge en loi vers une variable aléatoire X . A-t-on $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = E(X)$?

Question 8 ESCP 2003 **F 3**

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle. Peut-on avoir M semblable à $2M$? (on pourra commencer par étudier les valeurs propres d'une telle matrice).

Question 9 ESCP 2003 F 2

Pour allumer un feu, on dispose de N allumettes. La probabilité d'allumer le feu avec une allumette donnée est $p \in]0, 1[$. Vous finissez par allumer le feu.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'allumettes restantes. Déterminer la loi et l'espérance de X .

Question 10 ESCP 2003 F 1

Existe-t-il une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices diagonalisables ?

Existe-t-il une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices inversibles ?

Question 1 ESCP 2003

Soient A, B deux matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A admet n valeurs propres distinctes et que tout vecteur propre de A est également vecteur propre de B .

Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = B$.

Il existe une base (x_1, x_2, \dots, x_n) de $\Pi_{n,2}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Soit Q la matrice de passage de la base canonique de $\Pi_{n,2}(\mathbb{R})$ à $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$.

Alors $Q^{-1} A Q = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

$\forall i \in \overline{1, n}$, $\exists \mu_i \in \mathbb{R}$, $B x_i = \mu_i x_i$ (tout vecteur propre de A est vecteur propre de B)

Alors $Q^{-1} B Q = \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$.

Pour $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $Q(P) = (P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_n))$

Q est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sur \mathbb{R}^n car $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont n éléments distincts

(Q linéaire et injective donc p.i.s.o car $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = \dim \mathbb{R}^n$).

Alors $\exists ! P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $Q(P) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$.

$\forall i \in \overline{1, n}$, $P(\lambda_i) = \mu_i$.

Alors $P(\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$.

Donc $P(Q^{-1} A Q) = Q^{-1} B Q$; $Q^{-1} P(A) Q = Q^{-1} B Q$; $P(A) = B$.

Exercice... A est une matrice de $\Pi_n(\mathbb{R})$ inversible.

Montrer que A^{-1} est un polynôme en A .

Question 2 ESCP 2003

Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 4 et une variance non nulle. Minimiser la quantité

$$f(a, b) = E[(X^2 - a - bX)^2]$$

lorsque (a, b) parcourt \mathbb{R}^2 .

Pour $m_k = E(X^k)$ pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, f(a, b) = a^2 - 2am_2 + b^2m_2 + 2abm_3 - 2bm_3 + m_4.$$

f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial b}(a, b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 2m_2 + 2bm_3 = 0 \\ 2bm_2 + 2am_3 - 2m_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{m_2^2 - m_1m_3}{m_2 - m_1^2} \\ b = \frac{m_3 - m_1m_2}{m_2 - m_1^2} \end{cases}$$

$$V(X) = m_2 - m_1^2 \neq 0$$

Un point critique et un réel $(a_0, b_0) = \left(\frac{m_2^2 - m_1m_3}{m_2 - m_1^2}, \frac{m_3 - m_1m_2}{m_2 - m_1^2} \right)$.

$$\begin{aligned} f(a_0 + \alpha, b_0 + \beta) - f(a_0, b_0) &= \alpha^2 + \beta^2 m_2 + 2\alpha\beta m_3 = (\alpha + m_3\beta)^2 + (m_2 - m_1^2)\beta^2 \\ &= (\alpha + m_3\beta)^2 + \underbrace{V(X)}_{>0} \beta^2 \geq 0 \end{aligned}$$

f possède un minimum absolu atteint au réel point (a_0, b_0) avec

$$a_0 = \frac{m_2^2 - m_1m_3}{m_2 - m_1^2} \text{ et } b_0 = \frac{m_3 - m_1m_2}{m_2 - m_1^2} \quad \swarrow \text{avec covariance } a_0!$$

$$f(a_0, b_0) = \underbrace{(a_0 - m_2 + b_0 m_3)^2}_{=0} - (m_2 + b_0 m_3)^2 + b_0^2 m_2 - 2b_0 m_3 + m_4$$

$$f(a_0, b_0) = (m_2 - m_1^2) b_0^2 - 2b_0 (m_3 - m_1 m_2) + m_4 - m_2^2$$

$$f(a_0, b_0) = (m_2 - m_1^2) \frac{(m_3 - m_1 m_2)^2}{(m_2 - m_1^2)^2} - 2 \frac{m_3 - m_1 m_2}{m_2 - m_1^2} (m_3 - m_1 m_2) + m_4 - m_2^2$$

$$f(a_0, b_0) = - \frac{(m_3 - m_1 m_2)^2}{m_2 - m_1^2} + m_4 - m_2^2 = - \frac{(\text{cov}(X, X^2))^2}{V(X)} + V(X^2)$$

$$\underline{\underline{f(a_0, b_0) = V(X^2) \left[1 - \rho_{X, X^2}^2 \right]}}$$

Question 3 ESCP 2003 Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. Soient H_1, H_2 deux hyperplans de E (sous-espaces vectoriels de dimension $n-1$). Quelle est la dimension de $H_1 \cap H_2$?

$$n = \dim E \geq \dim(H_1 + H_2) = 2(n-1) - \dim(H_1 \cap H_2)$$

$$\dim(H_1 \cap H_2) \geq 2n - 2 - n = n - 2$$

$$\text{Or } \dim(H_1 \cap H_2) \leq \dim H_1 = n - 1. \text{ Donc } n - 2 \leq \dim(H_1 \cap H_2) \leq n - 1.$$

$$\text{1}^\circ \text{ Cas... } H_1 = H_2. \text{ Alors } H_1 \cap H_2 = H_1; \dim(H_1 \cap H_2) = n - 1$$

$$\text{2}^\circ \text{ Cas... } H_1 \neq H_2$$

Supposons $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 1$. Alors $H_1 \cap H_2 \subset H_1$, $H_1 \cap H_2 \subset H_2$,

$$\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 \text{ et } \dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_2.$$

$$\text{Alors } H_1 \cap H_2 = H_1 \text{ et } H_1 \cap H_2 = H_2; H_1 = H_2!$$

$$\text{Ainsi } \dim(H_1 \cap H_2) = n - 2.$$

$$\underline{\text{admet}} \dots \dim(H_1 \cap H_2) = \begin{cases} n - 2 & \text{si } H_1 \neq H_2 \\ n - 1 & \text{si } H_1 = H_2. \end{cases}$$

Question 4 ESCP 2003 Parmi tous les parallélépipèdes rectangles de surface totale S , quel est celui (quels sont ceux) de volume maximal ?

Soit a, b, c les dimensions du parallélépipède.

Sa volume est abc . Sa surface est $2ab + 2bc + 2ca$.

Le problème est $\begin{cases} \text{Max } abc \\ \text{s.c. } 2ab + 2bc + 2ca = S \end{cases}$... mais la contrainte n'est pas linéaire.

On pose $\mathcal{R} = (\mathbb{R}_+^*)^3$, $\forall (x, y, z) \in \mathcal{R}$, $f(x, y, z) = xyz$ et $\mathcal{B} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2xy + 2yz + 2zx = S\}$

On cherche le maximum de f sur la contrainte \mathcal{B} .

* Supposons que f admette en $A = (a, b, c)$ un maximum sur la contrainte \mathcal{B} .

$A \in \mathcal{B} \cap \mathcal{R}$ donc $c = \frac{S - 2ab}{2a + 2b}$. Soit $X = (x, y, z) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{B}$.

$x > 0, y > 0, z = \frac{S - 2xy}{2(x+y)} > 0$ et $f(x, y, \frac{S - 2xy}{2(x+y)}) \leq f(a, b, \frac{S - 2ab}{2(a+b)})$.

Posez $\mathcal{R}' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, \frac{S - 2xy}{2(x+y)} > 0\}$.

et $\forall (x, y) \in \mathcal{R}'$, $h(x, y) = f(x, y, \frac{S - 2xy}{2(x+y)}) = xy \frac{S - 2xy}{2(x+y)}$.

\mathcal{R}' admet un ouvert et h admet en (a, b) un maximum. Comme h est de classe \mathcal{C}^1

sur \mathcal{R}' , (a, b) est un point critique de h . $\nabla h(a, b) = 0$.

Alors $\frac{\partial h}{\partial a}(a, b) = \frac{a}{2(a+b)^2} [(S - 4ab)(a+b) - Sa + 2ab^2] = 0$.

$$\begin{cases} (S - 4ab)(a+b) - Sa + 2ab^2 = 0 \\ Sa - 2ab^2 = Sb - 2ab^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = S(a-b) - 2ab(a-b) = (a-b)(S - 2ab) \\ (S - 4ab)(a+b) - Sa + 2ab^2 = 0 \end{cases}$$

à $S - 2ab > 0$ donc $\left. \begin{matrix} a=b \\ 0 = (S - 4a^2)/2a - Sa + 2a^3 = a(S - 6a^2) \end{matrix} \right\} \Rightarrow a = b = \sqrt{\frac{S}{6}}$.

Alors $c = \frac{S - 2ab}{2a + 2b} = \frac{S - 2 \cdot \sqrt{\frac{S}{6}} \cdot \sqrt{\frac{S}{6}}}{4 \sqrt{\frac{S}{6}}} = \frac{\frac{2S}{3}}{4 \sqrt{\frac{S}{6}}} = \frac{\frac{S}{6}}{\sqrt{\frac{S}{6}}} = \sqrt{\frac{S}{6}}$; $A = (\sqrt{\frac{S}{6}}, \sqrt{\frac{S}{6}}, \sqrt{\frac{S}{6}})$.

* Pour $A = (\sqrt{\frac{S}{6}}, \sqrt{\frac{S}{6}}, \sqrt{\frac{S}{6}})$. Montrons que f admet en A un maximum sous la
 contrainte δ . $|A| = (\sqrt{\frac{S}{6}})^3 = (\frac{S}{6})^{3/2}$.

soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. $x > 0, y > 0, z > 0$ et $2xy + 2yz + 2zx = S$

Rappel.. $\forall u, v, w \in \mathbb{R}_+, \sqrt[3]{uvw} \leq \frac{u+v+w}{3}$.

$$\frac{S}{6} = \frac{2xy + 2yz + 2zx}{3} \geq \sqrt[3]{(xy)(yz)(zx)} = (f(x))^{2/3}. \text{ Alors } |f(x)| \leq \left(\frac{S}{6}\right)^{3/2} = |A|.$$

Ainsi le volume est maximal si et seulement si les dimensions du parallélépipède
 sont $\sqrt{\frac{S}{6}}, \sqrt{\frac{S}{6}}, \sqrt{\frac{S}{6}}$.

Exercice.. Montrons que $\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ pour
 tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Inductif si $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$ applique le $t \leq t-1$ à $\frac{x_i}{S}$ où
 $S = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

Question 5 ESCP 2003 Soit X une variable aléatoire de densité f paire et continue sur \mathbb{R} . On suppose que X^2 suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer f .

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} (f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})) & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

g et h sont deux densités, elles coïncident sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ où h est pair.

$$\forall x \in]0, +\infty[\cap \mathbb{D}, \lambda e^{-\lambda x} = h(x) = g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} (f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})) = \frac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x})$$

↑
f est pair

$$\forall x \in]0, +\infty[\cap \mathbb{D}, f(\sqrt{x}) = \lambda \sqrt{x} e^{-\lambda x}$$

La $x \mapsto \lambda \sqrt{x} e^{-\lambda x}$ et $x \mapsto f(\sqrt{x})$ sont égaux sur $]0, +\infty[$.

$$\text{Dac } \forall x \in]0, +\infty[, f(\sqrt{x}) = \lambda \sqrt{x} e^{-\lambda x}$$

$$\text{Ainsi } \forall x \in]0, +\infty[, f(x) = \lambda x e^{-\lambda x^2}$$

f est continue en 0 dac $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Par passage à la limite à

droite en 0 il vient $f(0) = 0$.

$$\text{Alors } \forall x \in]0, +\infty[, f(x) = \lambda x e^{-\lambda x^2}$$

$$\text{Soit } x \in]-\infty, 0[. f(x) = f(-x) = \lambda(-x)e^{-\lambda(-x)^2} = \lambda|x|e^{-\lambda x^2}$$

↑
 $-x \in]0, +\infty[$

$$\text{Finalement } \forall x \in \mathbb{R}, \underline{\underline{f(x) = \lambda|x|e^{-\lambda x^2}}}$$

Question 6 ESCP 2003 Soit $E = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c, d) réels pour que φ définie sur E^2 par

$$\varphi(X, Y) = {}^t X \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} Y$$

soit un produit scalaire sur E .

- Supposons que φ est un produit scalaire. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
 $\varphi(E_1, E_1) = \varphi(E_2, E_2)$; ${}^t E_2 A E_2 = {}^t E_1 A E_1$; $b = c$. A est symétrique.
 $E_3 \neq 0$ donc $\varphi(E_1, E_3) > 0$; alors $a > 0$.
 Soit $x = \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \in E$ et $x \neq 0_E$.

$$0 < \varphi(x, x) = {}^t x A x = (u, y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = au^2 + 2buy + dy^2$$

$$0 < a \left[\left(u + \frac{b}{a}y\right)^2 + y^2 \left(\frac{d}{a} - \frac{b^2}{a^2}\right) \right]; \quad 0 < \left(u + \frac{b}{a}y\right)^2 + y^2 \frac{ad - b^2}{a^2} \text{ car } a > 0.$$

$$\text{En fait } x = -\frac{b}{a}y \text{ et } y = 1 \text{ satisfait } \frac{ad - b^2}{a^2} > 0; \quad ad - b^2 > 0$$

Si φ est un produit scalaire $c = b$, $a > 0$ et $ad - b^2 > 0$.

- Supposons $c = b$, $a > 0$ et $ad - b^2 > 0$
 $\rightarrow \varphi$ est bilinéaire à choix et symétrique.
 \rightarrow Soit $x = \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \in E$. $\varphi(x, x) = {}^t x A x = au^2 + 2buy + dy^2$

$$\varphi(x, x) = a \left[\underbrace{\left(u + \frac{b}{a}y\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{ad - b^2}{a^2} y^2}_{\geq 0} \right] \geq 0.$$

$$\text{Supposons } \varphi(x, x) = 0. \text{ Alors } \left(u + \frac{b}{a}y\right)^2 = \frac{ad - b^2}{a^2} y^2 = 0.$$

$$x = -\frac{b}{a}y \text{ et } y = 0 \text{ car } ad - b^2 \neq 0; \quad x = y = 0; \quad x = 0_E.$$

Ceci achève de montrer que φ est un produit scalaire.

$$\text{Ex... } E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}). \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}). \quad \forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = {}^t x A y.$$

Montrer que φ est un produit scalaire si et seulement si A est symétrique et si la valeur propre de A est strictement positive.

Question 7 ESCP 2003 Soit (X_n) une suite de variables aléatoires qui converge en loi vers une variable aléatoire X . A-t-on $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = E(X)$?

$$X_n(\omega) = \left\{ \frac{1}{n}, \omega \right\}. \quad P(X_n = \frac{1}{n}) = \frac{n}{n+1} \text{ et } P(X_n = n) = \frac{1}{n+1}.$$

⊛ (X_n) converge en loi vers la variable certaine nulle (et nous a piqué)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = 1 !$$

⊛ Détails ! Notons F_n la fonction de répartition de X_n

$$\forall x \in]-\infty, \frac{1}{n}[, F_n(x) = 0 ; \forall x \in [\frac{1}{n}, n[, F_n(x) = P(X_n = \frac{1}{n}) = \frac{n}{n+1} \text{ et}$$

$$\forall x \in [n, +\infty[, F_n(x) = 1.$$

$$\text{soit } \forall x \in]-\infty, 0], \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0.$$

et soit $x \in]0, +\infty[$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n > n_0$, $x \in [\frac{1}{n}, n[$ car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty.$$

$$\forall x \in [n_0, +\infty[, F_n(x) = \frac{n}{n+1} ; \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 1.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 1 & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

Notons G la fonction de répartition d'une variable certaine nulle.

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

• G est continue en tout point de \mathbb{R}^* mais c'est par continuité en 0.

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = G(x).$$

Alors (X_n) converge en loi vers la variable certaine nulle.

Question 8 ESCP 2003 Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle. Peut-on avoir M semblable à $2M$? (on pourra commencer par étudier les valeurs propres d'une telle matrice).

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \pi \neq 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}. \quad \pi^2 = 0.$$

Pour $P = \text{Diag}(2, 1, 1)$ P est inversible.

$$P\pi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2\pi P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $P\pi = 2\pi P$, $P\pi P^{-1} = 2\pi$; π et 2π sont semblables.

Question 9 ESCP 2003 Pour allumer un feu, on dispose de N allumettes. La probabilité d'allumer le feu avec une allumette donnée est $p \in]0, 1[$. Vous finissez par allumer le feu.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'allumettes restantes. Déterminer la loi et l'espérance de X .

Notons T la var égale au nombre d'allumettes non utilisées.
Notons A l'événement le feu a été allumé.

La loi de X est en fait la loi de T sachant A .

Ainsi on peut raisonner en dérivée (!) que :

→ X prend ses valeurs dans $\llbracket 0, N-1 \rrbracket$

$$\rightarrow \forall k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, P(X=k) = \frac{P(X=k | A)}{P(A)} = \frac{p q^{N-k-1}}{1-q^N} \quad \text{où } q = 1-p.$$

$$\rightarrow E(X) = \frac{p}{1-q^N} q^{N-2} \sum_{k=0}^{N-1} k \left(\frac{1}{q}\right)^{k-1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \sum_{k=0}^{N-1} x^k = \frac{1-x^N}{1-x}; \text{ à dériver:}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \sum_{k=0}^{N-1} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} [-N x^{N-1} (1-x) + 1-x^N]$$

$$E(X) = \frac{p q^{N-2}}{1-q^N} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{q}\right)^2} \left[-N \frac{1}{q^{N-1}} \left(1-\frac{1}{q}\right) + 1 - \frac{1}{q^N} \right]$$

$$E(X) = \frac{p q^{N-2}}{1-q^N} \frac{q^2}{p^2} \left[1 - \frac{N}{q^{N-1}} + \frac{N-1}{q^N} \right] = \frac{1}{p} \frac{1}{1-q^N} [q^N - Nq + N-1]$$

$$E(X) = \frac{N}{1-q^N} - \frac{1}{p}.$$

Question 10 ESCP 2003 Existe-t-il une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices diagonalisables ?

Existe-t-il une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices inversibles ?

$(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix})$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constituée de matrices inversibles et diagonalisables !