Voici les questions sans préparation 2004 qu'à bien voulu nous fournir l'ESCP. Suivent quelques bribes de correction à usage interne. En fait ce ne sont pas des corrections mais des pistes. Les solutions ne sont pas optimales. Il doit aussi rester quelques erreurs mais c'est la loi du genre non ?

QUESTIONS COURTES 2004

F 1 Immédiat.

F 2 Demande un peu de travail.

F 3 Demande un peu de réflexion.

Question 1 ESCP 2004 F 1

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et X une variable aléatoire définie également sur cet espace. On suppose que (X_n) converge en loi vers X, la suite $(X_n - X)$ converge-t-elle nécessairement en loi vers la variable certaine nulle ?

Question 2 ESCP 2004 F 1

Nature de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\ln k}{n^2}\right)$.

Question 3 ESCP 2004 F 3

Résoudre l'équation $X^3 = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$.

Question 4 ESCP 2004 F 1

On confond polynôme et fonction polynôme. Soit f défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$f(P) : x \mapsto \int_0^1 P(x+t)\,dt$$

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Est-il diagonalisable ?

Question 5 ESCP 2004 F 2

Quelles sont les variables aléatoires *discrètes* qui sont indépendantes d'elles-mêmes ?

Question 6 ESCP 2004 F2

Soit E l'ensemble des endomorphismes f de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que pour tout polynôme P, $\deg f(P) \leqslant \deg P$. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et déterminer sa dimension.

Question 7 ESCP 2004 F 3

Résoudre $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Question 8 ESCP 2004 F 2

On lance en une seule fois n pièces de monnaie, la probabilité que la $k^{\text{ème}}$ pièce amène Pile valant $\dfrac{1}{2k+1}$. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre impair de Pile ?

Question 9 ESCP 2004 $\boxed{\text{F 1}}$

Montrer que pour $x > -1$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $(1+x)^k \geqslant 1 + kx$.

Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$ lorsque n tend vers l'infini.

Question 10 ESCP 2004 $\boxed{\text{F 2}}$

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E tels que $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$. Montrer que ces sommes sont directes.

Question 1 **ESCP 2004** Soit (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et X une variable aléatoire définie également sur cet espace. On suppose que (X_n) converge en loi vers X, la suite $(X_n - X)$ converge-t-elle nécessairement en loi vers la variable certaine nulle ?

Non ! Prendre $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et poser $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = -X$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{X_n} = F_X$!

Ainsi (X_n) converge en loi vers X mais $(X_n - X)$ ne converge pas en loi vers la variable certaine nulle car $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n - X = -2X$.

R

Question 2 **ESCP 2004** Nature de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\ln k}{n^2}\right)$.

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{\ln k}{n^2}\right) \overset{\ln x \leqslant x-1}{\leqslant} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \ln k \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} \ln t\,dt = \frac{1}{n^2}\int_1^{n+1} \ln t\,dt$$

$$0 \leqslant \ln u_n \leqslant \frac{1}{n^2}\Big[t\ln t - t\Big]_1^{n+1} = \frac{1}{n^2}\Big[(n+1)\ln(n+1) - n\Big] = \frac{n+1}{n}\,\frac{\ln(n+1)}{n} - \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \ln u_n = 0\,. \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 1\,.$$

Question 3 **ESCP 2004** Résoudre l'équation $X^3 = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$.

$A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$ est diagonalisable et $\mathrm{Sp}\, A = \{-1, 1\}$.

$\exists P \in GL_2(\mathbb{R})$, $P^{-1}AP = D$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Posons $Y = P^{-1}XP$

$X^3 = A \Leftrightarrow Y^3 = D$

Si $Y^3 = D$: Y commute avec D donc Y est diagonale. (*)

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha = 1$ et $\beta = -1$. $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^3 = D \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = D$.

Alors $X^3 = A \Leftrightarrow Y^3 = D \Leftrightarrow Y = D \Leftrightarrow P^{-1}XP = D \Leftrightarrow X = A$.

A est la seule solution de l'équation

(*) Détaillons. • $YD = YY^3 = Y^4 = Y^3Y = DY$; Y commute avec D.

• $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $\begin{cases} c = -c \\ -b = b \end{cases}$; $b = c = 0$.

Y est diagonale.

R

Question 4 **ESCP 2004** On confond polynôme et fonction polynôme. Soit f défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$f(P) : x \mapsto \int_0^1 P(x+t)\,dt$$

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Est-il diagonalisable ?

- f est linéaire.
- $P = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell X^\ell$. $\quad f(P)(x) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \left[\frac{(x+t)^{\ell+1}}{\ell+1}\right]_0^1 = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{a_\ell}{\ell+1} \underbrace{\left[(X+1)^{\ell+1} - X^{\ell+1}\right]}_{\deg\, \ell}$

  $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

- $f(X^i) = \frac{1}{i+1}\left[(X+1)^{i+1} - X^{i+1}\right] = \frac{1}{i+1}\sum_{\ell=0}^{i} \binom{i+1}{\ell} X^\ell$

La matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ est triangulaire supérieure et tous les éléments de sa diagonale valent 1.

$\mathrm{Sp}\, f = \{1\}$

Alors f est diagonalisable ssi $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$.

Si $n=0$ c'est vrai

Si $n \geqslant 1$ $\quad f(X) = \frac{1}{2}\left[(X+1)^2 - X^2\right] = \frac{1}{2}(2X+1) = X + \frac{1}{2} \neq X$!

f est diagonalisable ssi $n=0$.

R

Question 5 ESCP 2004 Quelles sont les variables aléatoires discrètes qui sont indépendantes d'elles-mêmes ?

Supposons X et X indépendantes. $V(X) = \text{cov}(X, X) = 0$

X est presque sûrement constante.

Réciproquement supposons que X est presque sûrement constante.

$\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $P(X=\alpha)=1$.

$\forall x \in X(\Omega) - \{\alpha\}$, $P(X=x)=0$.

Soit $(x, x') \in X(\Omega)^2$

<u>1er cas</u> $x \neq \alpha$. $0 \leq P(\{X=x\} \cap \{X=x'\}) \leq P(X=x) = 0$

Alors $P(\{X=x\} \cap \{X=x'\}) = 0 = 0 \times P(X=x') = P(X=x)\,P(X=x')$.

<u>2e cas</u> $x' \neq \alpha$ même chose

<u>3e cas</u> $x = x' = \alpha$. $P(\{X=x\} \cap \{X=x'\}) = P(X=\alpha) = 1 = 1 \times 1 = P(X=x)\,P(X=x')$.

<u>Exercice..</u> X est une variable aléatoire discrète.

Montrer que $V(X)=0$ si et seulement si X est presque sûrement constante.

R

Question 6 **ESCP 2004** Soit E l'ensemble des endomorphismes f de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que pour tout polynôme P, $\deg f(P) \leqslant \deg P$. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et déterminer sa dimension.

Notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ triangulaires supérieures.

$\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$

$(E_{ij})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n+1}$ en est une base. dim $\mathcal{T} = \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Soit $\mathcal{E} = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X]) \mid \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \deg f(P) \leqslant \deg P\}$

$\mathcal{E}$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

Posons $\forall f \in \mathcal{E}$, $\varphi(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ où $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$.

φ est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{T}$. dim $\mathcal{E}$ = dim $\mathcal{T} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

A démontrer proprement

R

Question 7 **ESCP 2004** $\boxed{\textbf{F 3}}$

Résoudre $X^2 = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$... dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Posons $A = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. $\mathrm{Sp}\,A = \{0,1\}$. Notons (E_1, E_2, E_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On obtient facilement $\mathrm{SEP}(A,0) = \mathrm{Vect}(E_2,E_3)$ et $\mathrm{SEP}(A,1) = \mathrm{Vect}(E_1+E_2)$.

* Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $X^2 = A$. $AX = X^3 = XA$. A et X commutent.

$AXE_2 = XAE_2 = 0$; $XE_2 \in \mathrm{SEP}(A,0)$; $\exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $XE_2 = \alpha E_2 + \beta E_3$.

De même $\exists (\alpha',\beta') \in \mathbb{R}^2$, $XE_3 = \alpha' E_2 + \beta' E_3$.

$AX(E_1+E_2) = XA(E_1+E_2) = X(E_1+E_2)$; $X(E_1+E_2) \in \mathrm{SEP}(A,1)$.

$\exists \gamma \in \mathbb{R}$, $X(E_1+E_2) = \gamma(E_1+E_2)$; $XE_1 = \gamma(E_1+E_2) - XE_2 = \gamma E_1 + (\gamma-\alpha)E_2 - \beta E_3$

Ainsi $X = \begin{pmatrix}\gamma & 0 & 0\\ \gamma-\alpha & \alpha & \alpha'\\ -\beta & \beta & \beta'\end{pmatrix}$.

* Soit $(\alpha,\beta,\alpha',\beta',\gamma) \in \mathbb{R}^5$. Posons $X = \begin{pmatrix}\gamma & 0 & 0\\ \gamma-\alpha & \alpha & \alpha'\\ -\beta & \beta & \beta'\end{pmatrix}$.

$$X^2 = A \iff \begin{cases}\gamma^2 = 1\\ \gamma(\gamma-\alpha)+\alpha(\gamma-\alpha)-\alpha'\beta = 1\\ -\beta\gamma+\beta(\gamma-\alpha)-\beta\beta' = 0\end{cases} \text{ et } \begin{cases}\alpha^2+\alpha'\beta = 0\\ \beta\alpha+\beta\beta' = 0\end{cases} \text{ et } \begin{cases}\alpha\alpha'+\alpha'\beta' = 0\\ \beta\alpha'+\beta'^2 = 0\end{cases}$$

$$X^2 = A \iff \begin{cases}\gamma^2 = 1\\ -\alpha^2-\alpha'\beta = 0\\ -\beta\alpha-\beta\beta' = 0\end{cases} \text{ et } \begin{cases}\alpha\alpha'+\alpha'\beta' = 0\\ \beta\alpha'+\beta'^2 = 0\end{cases} \iff \begin{cases}\gamma^2 = 1\\ \alpha^2+\alpha'\beta = 0\\ \beta(\alpha+\beta') = 0\\ \alpha'(\alpha+\beta') = 0\\ \beta\alpha'+\beta'^2 = 0\end{cases} \iff \begin{cases}\gamma^2 = 1\\ \alpha^2 = \beta'^2\\ \alpha^2+\alpha'\beta = 0\\ \beta(\alpha+\beta') = 0\\ \alpha'(\alpha+\beta') = 0\end{cases}$$

$$X^2 = A \iff \begin{cases}\gamma^2 = 1\\ \beta' = \alpha\\ \alpha^2+\alpha'\beta = 0\\ \alpha\beta = 0\\ \alpha\alpha' = 0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}\gamma^2 = 1\\ \beta' = -\alpha\\ \alpha^2+\alpha'\beta = 0\end{cases} \iff \begin{cases}\gamma = \pm 1\\ \alpha = 0\\ \beta' = 0\\ \alpha'\beta = 0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}\gamma = \pm 1\\ \alpha \neq 0\\ \beta = 0\\ \alpha' = 0\\ \beta' = \alpha\\ \alpha^2 = 0\ !!\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}\gamma^2 = 1\\ \beta' = -\alpha\\ \alpha^2+\alpha'\beta = 0\end{cases}$$

$$X^2 = A \iff \begin{cases}\gamma = \pm 1\\ \alpha = 0\\ \beta' = 0\\ \alpha' = 0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}\gamma = \pm 1\\ \alpha = 0\\ \beta' = 0\\ \beta = 0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}\gamma = \pm 1\\ \beta' = -\alpha\\ \alpha^2+\alpha'\beta = 0\end{cases} \iff \begin{cases}\gamma = \pm 1\\ \beta' = -\alpha\\ \alpha^2+\alpha'\beta = 0\end{cases}$$

Les deux premiers cas sont dans le troisième !

Je vous laisse écrire la conclusion.

R

Question 8 **ESCP 2004** On lance en une seule fois n pièces de monnaie, la probabilité que la $k^{\text{ème}}$ pièce amène Pile valant $\frac{1}{2k+1}$. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre impair de Pile ?

Notons p_n cette probabilité.

$p_1 = \frac{1}{3}$

$p_{n+1} = p_n\left(1 - \frac{1}{2(n+1)+1}\right) + (1-p_n)\frac{1}{2(n+1)+1}$, non ?

$p_{n+1} = \frac{1}{2n+3} + \frac{2n+1}{2n+3}\, p_n$. $\left((2n+1)\,p_n\right)$ est arithmétique de raison 1

et de premier terme 1. $(2n+1)\,p_n = n$. $p_n = \frac{n}{2n+1}$.

Vérifié pour $n=1$, 2 et 3.

Question 9 **ESCP 2004** Montrer que pour $x > -1$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $(1+x)^k \geqslant 1+kx$.

Déterminer un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$ lorsque n tend vers l'infini.

$\forall x \in]-1,+\infty[,\quad \varphi(x) = (1+x)^k$

$\forall x \in]-1,+\infty[,\quad \varphi''(x) = k(k-1)(1+x)^{k-2} \geqslant 0.$ φ est convexe sur $]-1,+\infty[$.

$\forall x \in]-1,+\infty[,\quad \varphi(x) \geqslant (x-0)\varphi'(0) + \varphi(0)$

$\forall x \in]-1,+\infty[,\quad (1+x)^k \geqslant kx+1$.

$n \geqslant 2$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(1-\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1$$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$. Ainsi $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k \sim \ln n$.

Question 10 **ESCP 2004** Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E tels que $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$. Montrer que ces sommes sont directes.

$\dim E = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Im} g - \dim (\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g)$

$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g - \dim (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g)$. Par addition

$2 \dim E = 2 \dim E - \dim (\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) - \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g)$ (théorème du rang).

Alors $\dim (\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) + \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g) = 0$. Le reste est clair.