Voici les questions sans préparation 2005 qu'à bien voulu nous fournir l'ESCP. Suivent quelques bribes de correction à usage interne. En fait ce ne sont pas des corrections mais des pistes. Les solutions ne sont pas optimales. Il doit aussi rester quelques erreurs mais c'est la loi du genre non ?

QUESTIONS COURTES 2005

F 1 Immédiat.

F 2 Demande un peu de travail..

F 3 Demande un peu de réflexion.

Question 1 ESCP 2005 **F 1**

Soit f continue sur $[0,+\infty[$ telle que : $\forall x \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

On définit la fonction H par : $\forall x \in [0,+\infty[,\ H(x) = e^{-x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, calculer H'. En déduire H puis f.

Question 2 ESCP 2005 **F 3**

Soit φ une fonction affine. On suppose qu'il existe deux fonctions convexes f et g telles que $\varphi = f + g$.

Montrer que f et g sont affines (on pourra commencer par le cas où f ou g est de classe $\mathcal{C}^2$).

Question 3 ESCP 2005 **F 2**

Soit n urnes, chacune contenant x boules blanches et y boules noires. On tire une boule de la première urne et on la met dans la deuxième urne ; puis on tire une boule de la deuxième urne et on la met dans la troisième, ... Enfin on tire une boule de la dernière urne.

Quelle est la probabilité que la dernière boule tirée soit blanche ?

Question 4 ESCP 2005 **F 1**

Une urne contient 14 boules numérotées de 1 à 14. On en tire 7 sans remise. Quelle est la probabilité que la somme des numéros obtenus soit égale à la somme des numéros des boules non obtenues ?

Question 5 ESCP 2005 **F 1**

Soit X une variable aléatoire dont la loi dépend d'un paramètre θ.

Soit T_1, T_2 deux estimateurs indépendants, sans biais de θ, de variances respectives V_1 et V_2. Pour tout a réel, on pose $\Theta_a = aT_1 + (1-a)T_2$.

Θ_a est-il un estimateur sans biais de θ ?

Déterminer a pour que la variance de Θ_a soit minimale. Quelle est la valeur de cette variance ?

Question 6 ESCP 2005 **F 2**

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant, pour tout x réel, $f'(x) \leqslant 0$. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2x$.

Question 7 ESCP 2005 $\boxed{\text{F 2}}$

Soient A et B deux matrices symétriques réelles telles que $A^2 + B^2 = A + B = 2I$. Que peut-on dire de A et B ?

Question 8 ESCP 2005 $\boxed{\text{F 1}}$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les variables aléatoires indépendantes X et Y, pour que X et XY soient non corrélées

Question 9 ESCP 2005 $\boxed{\text{F 2}}$

Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $\langle Ax, x\rangle = 0$ ($\langle .,.\rangle$ étant le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$). Montrer que $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A)^{\perp}$.

Question 10 ESCP 2005 $\boxed{\text{F 2}}$

Soit $(X_n)_n$ et X des variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé.

A-t'on : si la suite (X_n) converge en loi vers X, alors $(X_n - X)$ converge en loi vers 0 ?

Soit X, Y, Z des variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé.

A-t'on : $[X, Y$ suivent la même loi $] \Rightarrow [XZ, YZ$ suivent la même loi $]$?

Question 11 ESCP 2005 $\boxed{\text{F 1}}$ *élève*

X et Y sont deux variables aléatoires suivant une loi de Poissson de paramètre a. Z est une variable alatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

On suppose X, Y et Z mutuellement indépendantes.

Montrer que $U = X\,Z$ et $V = Y\,Z$ ne sont pas indépendantes.

Question 12 ESCP 2005 $\boxed{\text{F 2}}$ *élève*

n est un élément de $\mathbb{N}^*$. x_1, x_2, ..., x_n sont n réels strictement positifs dont la somme vaut 1.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$.

Question 1 **ESCP 2005** Soit f continue sur $[0,+\infty[$ telle que : $\forall x \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

On définit la fonction H par : $\forall x \in [0,+\infty[,\ H(x) = e^{-x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, calculer H'. En déduire H puis f.

H est dérivable sur IR+

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ H'(x) = -e^{-x}\int_0^x f(t)\,dt + e^{-x}f(x) = e^{-x}\left[f(x) - \int_0^x f(t)\,dt\right] \leqslant 0$

H est décroissante.

H est positive

$H(0)=0$

Alors H est nulle. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^x f(t)\,dt = 0$.

En dérivant : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = 0$. f est nulle.

Question 2 ESCP 2005 Soit φ une fonction affine. On suppose qu'il existe deux fonctions convexes f et g telles que $\varphi = f + g$.

Montrer que f et g sont affines (on pourra commencer par le cas où f ou g est de classe $\mathcal{C}^2$).

• le cas où f et g sont $\mathcal{C}^2$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi''(x) = 0$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 = f''(x) + g''(x)$, $f''(x) \geq 0$, $g''(x) \geq 0$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = g''(x) = 0$. f et g sont affines.

• le cas général.

Soit $a \in \mathbb{R}$. $x \longmapsto \dfrac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}$ est constante sur $\mathbb{R} - \{a\}$

$\exists \lambda_a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R} - \{a\},\ \dfrac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \lambda_a$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R} - \{a\}$, $\lambda_a = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} + \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}$

$x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (resp. $x \mapsto \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}$) est croissante sur $\mathbb{R} - \{a\}$ car f (resp. g) est convexe sur $\mathbb{R}$.

Donc $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ et $x \mapsto \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}$ sont croissantes sur $\mathbb{R} - \{a\}$ et de somme constante. Alors $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ et $x \mapsto \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}$ sont constantes sur $\mathbb{R} - \{a\}$.

$\exists (\alpha, \alpha') \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \alpha$ et $\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} = \alpha'$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{a\}$, $f(x) = \alpha(x - a) + f(a)$ et $g(x) = \alpha'(x - a) + g(a)$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha(x - a) + f(a)$ et $g(x) = \alpha'(x - a) + g(a)$.

f et g sont affines.

Question 3 ESCP 2005 Soit n urnes, chacune contenant x boules blanches et y boules noires. On tire une boule de la première urne et on la met dans la deuxième urne ; puis on tire une boule de la deuxième urne et on la met dans la troisième, ... Enfin on tire une boule de la dernière urne.

Quelle est la probabilité que la dernière boule tirée soit blanche ?

On pose $p = \dfrac{x}{x+y}$ et $q = \dfrac{y}{x+y}$.

On pose p_n la probabilité cherchée. $p_1 = \dfrac{x}{x+y}$.

$$p_{n+1} = p_n \times \frac{x+1}{x+y+1} + (1-p_n) \times \frac{x}{x+y+1}$$

$$p_{n+1} = \frac{x}{x+y+1} + \frac{1}{x+y+1} p_n$$

$$\ell = \frac{x}{x+y+1} + \frac{1}{x+y+1} \ell \Leftrightarrow \ell = \frac{x}{x+y}.$$

$$p_n - \frac{x}{x+y} = \left(\frac{1}{x+y+1}\right)^{n-1} \left(p_1 - \frac{x}{x+y}\right) = 0$$

$$p_n = \frac{x}{x+y}.$$

R

Question 4 **ESCP 2005** Une urne contient 14 boules numérotées de 1 à 14. On en tire 7 sans remise. Quelle est la probabilité que la somme des numéros obtenus soit égale à la somme des numéros des boules non obtenues ?

Soit $x_1, x_2, \dots, x_7$ les résultats obtenus. Supposons que :

$$x_1+x_2+\dots+x_7 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{14} k = \frac{1}{2}\times\frac{14\times 15}{2} = \frac{1}{2}\,7\times 15 \ !$$

La probabilité est nulle.

Question 5 **ESCP 2005** Soit X une variable aléatoire dont la loi dépend d'un paramètre θ.

Soit T_1, T_2 deux estimateurs indépendants, sans biais de θ, de variances respectives V_1 et V_2. Pour tout a réel, on pose $\Theta_a = aT_1 + (1-a)T_2$.

Θ_a est-il un estimateur sans biais de θ ?

Déterminer a pour que la variance de Θ_a soit minimale. Quelle est la valeur de cette variance ?

Θ_a est sans biais car $E(\Theta_a) = a\,E(T_1) + (1-a)\,E(T_2) = a\theta + (1-a)\theta = \theta$

$V(\Theta_a) = a^2 V_1 + (1-a)^2 V_2$

$\varphi(a) = a^2 V_1 + (1-a)^2 V_2$

$\varphi'(a) = 2a V_1 - 2(1-a) V_2 = 2a(V_1+V_2) - 2V_2$.

1°/ $V_1+V_2 \neq 0$ $\quad a = \dfrac{V_2}{V_1+V_2}$!

La variance de Θ_a est minimale pour $\dfrac{V_1}{V_1+V_2}$ et elle vaut : $\dfrac{V_1V_2}{V_1+V_2}$.

2/ $V_1+V_2=0$. Alors $V_1=V_2=0$.

La variance de Θ_a est toujours nulle ...

Question 6 **ESCP 2005** Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant, pour tout x réel, $f'(x) \leqslant 0$. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2x$.

$\varphi(x) = f(x) - 2x$

$\varphi'(x) = f'(x) - 2 < 0$

φ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

L'équation a au plus une solution.

→ $x \geqslant 0$. $\varphi(x) = f(x) - 2x \leqslant f(0) - 2x$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = -\infty$

→ $x \leqslant 0$ $\varphi(x) = f(x) - 2x \geqslant f(0) - 2x$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = +\infty$

φ définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

$\exists ! \, \alpha \in \mathbb{R}, \varphi(\alpha) = 0$

$\exists ! \, \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha) = 2\alpha$.

Question 7 ESCP 2005 Soient A et B deux matrices symétriques réelles telles que $A^2 + B^2 = A + B = 2I$. Que peut-on dire de A et B ?

$B = (2I - A)$.

$2I = A^2 + (2I - A)^2 = 2A^2 - 4A + 4I$.

$2A^2 - 4A + 2I = 0$; $A^2 - 2A + I = 0$; $(A - I)^2 = 0$

$\mathrm{Sp}\,A \subset \{1\}$. A est diagonalisable donc $\mathrm{Sp}\,A = \{1\}$.

Ainsi $A = I$

Alors $A = B = I$.

R

Question 8 **ESCP 2005** Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les variables aléatoires indépendantes X et Y, pour que X et XY soient non corrélées

X et XY non corrélées

$\Updownarrow$ $\text{cov}(X, XY) = 0$

$\Updownarrow$ $E(X^2Y) - E(X)E(XY) = 0$

$\Updownarrow$ $E(X^2)E(Y) - (E(X))^2 E(Y) = 0$

$\Updownarrow$ $E(Y) = 0$ ou $V(X) = 0$

$\Updownarrow$ Y centrée ou
X presque sûrement constante.

R

Question 9 **ESCP 2005** Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $\langle Ax, x\rangle = 0$ ($\langle .,. \rangle$ étant le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$). Montrer que $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A)^{\perp}$.

$$0 = \langle A(x+y), x+y\rangle = \underbrace{\langle Ax, x\rangle}_{=0} + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle + \underbrace{\langle Ay, y\rangle}_{=0}$$

Alors $\langle Ax, y\rangle = -\langle x, Ay\rangle$ (A est antisymétrique).

$y \in (\operatorname{Im} A)^{\perp}$

$\Updownarrow$

$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \langle Ax, y\rangle = 0$

$\Updownarrow$

$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ -\langle x, Ay\rangle = 0$

$\Updownarrow$

$Ay \in (\mathbb{R}^n)^{\perp}$

$\Updownarrow$

$Ay = 0_{\mathbb{R}^n}$

$\Updownarrow$

$y \in \operatorname{Ker} A$ $\qquad\qquad$ $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A)^{\perp}$

R

Question 10 **ESCP 2005** Soit $(X_n)_n$ et X des variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé.

A-t'on : si la suite (X_n) converge en loi vers X, alors $(X_n - X)$ converge en loi vers 0 ?

Soit X, Y, Z des variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé.

A-t'on : $[X, Y$ suivent la même loi $] \Rightarrow [XZ, YZ$ suivent la même loi $]$?

- Prenons $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et posons $X_n = -X$

  Alors $X_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

  Donc (X_n) converge en loi vers X mais $(X_n - X)$ ne converge pas en loi vers 0.

- ① $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, \frac{1}{2})$ et $Y = 1 - X$.

  Alors X et Y suivent la même loi.

  Posons $Z = X$. $XZ = X^2$ et $YZ = (1-X)X$

$XZ = X^2$ a la loi de X et YZ est nulle.

② $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, $Y = -X$, $Z = X$.

Alors X et Y ont même loi.

$XZ = X^2$ et $YZ = -X^2$ n'ont pas la même loi.

R

Question 11 **ESCP 2005** $\boxed{\textbf{F 1}}$ *élève*

X et Y sont deux variables aléatoires suivant une loi de Poisson de paramètre a. Z est une variable alatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

On suppose X, Y et Z mutuellement indépendantes.

Montrer que $U = X\,Z$ et $V = Y\,Z$ ne sont pas indépendantes.

$\{U=1\} = \{XZ=1\} = (\{X=1\} \cap \{Z=1\}) \cup (\{X=-1\} \cap \{Z=-1\}) = \{X=1\} \cap \{Z=1\}$.

$\{V=-1\} = \{XZ=-1\} = \dots = \{X=1\} \cap \{Z=-1\}$.

Alors $\{U=1\} \cap \{V=-1\} = \emptyset$.

$P(\{U=1\} \cap \{V=-1\}) = 0$

$P(U=1)P(V=-1) = P(X=1)P(Z=1)P(X=1)P(Z=-1) = \frac{1}{4}(P(X=1))^2 \neq 0.$

R

Question 12 **ESCP 2005** $\boxed{\textbf{F 2}}$ *élève*

n est un élément de $\mathbb{N}^*$. x_1, x_2, ..., x_n sont n réels strictement positifs dont la somme vaut 1.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$.

"V1" $\dfrac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \leqslant \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \dfrac{1}{n}$; $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$

"V2" $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$

$$f\left(\frac{1}{n}x_1+\frac{1}{n}x_2+\cdots+\frac{1}{n}x_n\right) \leqslant \frac{1}{n}f(x_1)+\frac{1}{n}f(x_2)+\cdots+\frac{1}{n}f(x_n).$$

$$\frac{1}{\frac{1}{n}x_1+\frac{1}{n}x_2+\cdots+\frac{1}{n}x_n} \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)$$

$$n \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right) ; \quad \frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n} \geqslant n^2.$$

V3 $\displaystyle n^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}\,\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2 \underset{\uparrow}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{x_k})^2 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2 = 1 \times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2.$ Cauchy-Schwarz

R