Voici les questions sans préparation 2007 qu'à bien voulu nous fournir l'ESCP. Suivent quelques bribes de correction à usage interne. En fait ce ne sont pas des corrections mais des pistes. Les solutions ne sont pas optimales. Il doit aussi rester quelques erreurs mais c'est la loi du genre non ?

QUESTIONS COURTES 2007

Question 1 ESCP 2007 F2

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + A = 0$. Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

▶ **On commencera par montrer que c'est faux (!) et on traitera l'équation $A^2 + I = 0$.**

Question 2 ESCP 2007 F2

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres non nulles (s'il y en a).

Montrer que, lorsque $n = p$, $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

Question 3 ESCP 2007 F1

Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'équation $X^n = A$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, admet-elle au moins une solution ?

Question 4 ESCP 2007 F0

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \dfrac{1}{2^{n+1}n!} \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \, e^{t/2} dt$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$. En déduire la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n \, n!}$.

Question 5 ESCP 2007 F3

Soit $f(x) = \ln\left(x + \dfrac{1}{1+x}\right)$. Donner le domaine de définition de f.

Démontrer que les dérivées $f^{(n)}(0)$ d'ordre impair sont nulles, lorsque n est un multiple de 3.

▶ **C'est faux. On donnera une condition nécessaire et suffisant sur n pour que $\mathbf{f^{(n)} = 0}$.**

Question 6 ESCP 2007 F1

Soit (u_n) une suite réelle positive et λ un réel strictement positif. L'équivalence suivante est-elle vérifiée ?

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lambda \iff (u_n)^n \sim \lambda^n.$$

Question 7 ESCP 2007 F2

Soit X une variable aléatoire strictement positive de densité f. On suppose que X et $1/X$ admettent une espérance.

Comparer $E\left(\dfrac{1}{X}\right)$ et $\dfrac{1}{E(X)}$.

Question 8 ESCP 2007

Soit $n \geqslant 1$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon identiquement distribué indépendant de loi de Poisson de paramètre inconnu $\lambda > 0$

On pose $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$, $\quad T_n = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X_n} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$

À l'aide de T_n, déterminer, pour n grand, un intervalle de confiance de λ au risque α donné.

Question 9 **ESCP 2007** $\boxed{\textbf{F1}}$

Une urne contient initialement une boule rouge et une boule noire. On effectue dans cette urne une succession de tirages suivant le protocole suivant :

- si on tire une boule rouge, on remet dans l'urne $r > 0$ boules rouges avant le tirage suivant.
- si on tire une boule noire, on remet dans l'urne $s > 0$ boules noires avant le tirage suivant.

On s'arrête lorsque le nombre de boules d'une couleur présente dans l'urne est 10 fois plus grand que le nombre de boules de l'autre couleur.

Écrire une fonction PASCAL permettant de simuler cette expérience.

Question 10 **ESCP 2007** $\boxed{\textbf{F1}}$

Soit A le point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(1, 0)$. Soit θ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$.

À tout $\omega \in \Omega$, on associe le point M_ω du cercle unité d'affixe $e^{i\theta(\omega)}$

Donner l'espérance de la variable aléatoire représentant la distance de A à M_ω.

Question 1 ESCP 2007

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3+A=0$. Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$.

On commencera par montrer que c'est faux !

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Si $A=0$, A ne peut pas être semblable à $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ non ?!

Remarquons que $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ est inversible car $0\times 0-(-1)\times 1=1\neq 0$; 0 n'est pas valeur propre de $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$.

Supposons $A^3+A=0$ et A semblable à $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$. $\mathrm{Sp}\,A=\mathrm{Sp}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ donc 0 n'est pas valeur propre de A. A est inversible. Alors $0=A^{-1}\times 0=A^{-1}(A^3+A)=A^2+I_2$.

$A^2+I_2=0$. L'exercice ne peut être que :

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2+I_2=0$. Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$.

Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice A dans $\mathcal{B}$. Posons $E=\mathbb{R}^2$. Nous avons $u^2+\mathrm{Id}_E=0_{\mathcal{L}(E)}$.

Soit x un élément non nul de E. Montrons que $\tilde{\mathcal{B}}=(x,u(x))$ est une base de E. Il suffit de montrer que la famille est libre.

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $\alpha x+\beta u(x)=0_E$. $0_E=u(0_E)=u(\alpha x+\beta u(x))=\alpha u(x)+\beta\underbrace{u^2(x)}_{-x}$.

Alors $\begin{cases}\alpha x+\beta u(x)=0_E & \leftarrow\times\alpha\\ -\beta x+\alpha u(x)=0_E & \leftarrow\times(-\beta)\end{cases}$

$0_E=\alpha(\alpha x+\beta u(x))-\beta(-\beta x+\alpha u(x))=(\alpha^2+\beta^2)x$. Or $x\neq 0_E$, donc $\alpha^2+\beta^2=0$.

Ainsi $\alpha=\beta=0$.

$\tilde{\mathcal{B}}$ est une base de E et $M_{\tilde{\mathcal{B}}}(u)=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} \leftarrow \begin{cases}u(x)=0.x+1.u(x)\\ u^2(x)=(-1).x+0.u(x)\end{cases}$

$M_{\mathcal{B}}(u)=A$ et $M_{\tilde{\mathcal{B}}}(u)=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$. A est semblable à $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$.

R

Question 2 **ESCP 2007**

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres non nulles (s'il y en a).

Montrer que, lorsque $n = p$, $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Soit $\lambda \in Sp\, f\circ g$. $\exists x \in \mathbb{R}^p$, $x \neq 0_{\mathbb{R}^p}$ et $f(g(x)) = \lambda x$.

Supposons $\lambda \neq 0$.

$g(f(g(x))) = \lambda g(x)$.

Si $g(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ alors $\lambda x = f(g(x)) = f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^p}$ et $x \neq 0_{\mathbb{R}^p}$ donc $\lambda = 0$!

Alors $(g \circ f)(g(x)) = \lambda g(x)$ et $g(x) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$; λ est valeur propre de $g \circ f$.

<u>Si λ est une valeur propre non nulle de</u> $f\circ g$, <u>λ est valeur propre de $g \circ f$.</u>

On montre de même que <u>si λ est une valeur propre non nulle de $g \circ f$ alors λ est valeur propre de $f \circ g$.</u>

Supposons $n = p$. Montrons que $Sp\, f\circ g = Sp\, g\circ f$. Il suffit de montrer que $Sp\, f \circ g \subset Sp\, g\circ f$!!

Soit $\lambda \in Sp(f\circ g)$. Si λ n'est pas nul, d'après ce qui précède, $\lambda \in Sp\, g\circ f$.

Supposons $\lambda = 0$. Supposons que 0 n'est pas valeur propre de $g\circ f$. Alors $g \circ f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ ($\dim \mathbb{R}^n < +\infty$).

Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. $f(x) = 0_E$; $g(f(x)) = 0_E$; $x \in \operatorname{Ker}(g\circ f) = \{0_E\}$.

Donc f est injectif et même bijectif ! $g = (g\circ f)\circ f^{-1}$. g est alors la composée de deux automorphismes de $\mathbb{R}^n$; g est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Alors $f \circ g$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ comme composée de deux automorphismes de $\mathbb{R}^n$ et ainsi $0 \notin Sp(f\circ g)$!! Finalement $\lambda = 0$ appartient à $Sp(g\circ f)$.

Ceci achève de montrer que $Sp(f\circ g) \subset Sp(g \circ f)$. La symétrie du problème donne l'égalité.

Question 3 ESCP 2007

Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'équation $X^n = A$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, admet-elle au moins une solution ?

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Un calcul simple montre que $\mathrm{Sp}\, A = \{-8, 1\}$. A est donc diagonalisable car $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et A possède deux valeurs propres distinctes.

$\exists P \in GL_2(\mathbb{R})$, $P^{-1}AP = D$ où $D = \mathrm{Diag}(-8, 1)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), X^n = A \Leftrightarrow P^{-1}X^nP = P^{-1}AP = D \Leftrightarrow (P^{-1}XP)^n = D$.

Ceci suffit pour dire que, si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{S}_n = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid X^n = A\}$ est équipotent à $\mathcal{S}'_n = \{Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid Y^n = D\}$. card $\mathcal{S}_n$ = card $\mathcal{S}'_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Cherchons card $\mathcal{S}'_n$. Soit $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{S}'_n$. $YD = YY^n = Y^{n+1} = Y^nY = DY$.

Alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $\begin{cases} -8a = -8a \\ -8c = c \\ b = -8b \\ d = d \end{cases}$, $b = c = 0$. Y est diagonale.

Soit $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ une matrice diagonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{S}'_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^n = -8 \\ \beta^n = 1 \end{cases}$.

$\mathcal{S}'_n = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \alpha^n = -8 \text{ et } \beta^n = 1 \right\}$.

1er cas... n est pair. $\mathcal{S}'_n = \emptyset$. $\mathcal{S}_n = \emptyset$. L'équation initiale n'a pas de solution.

2e cas... n est impair. $\begin{cases} \alpha^n = -8 \\ \beta^n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -8^{1/n} \\ \beta = 1 \end{cases}$. card $\mathcal{S}_n$ = card $\mathcal{S}'_n = 1$.

L'équation initiale admet une solution et une seule.

Question 4 **ESCP 2007**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \dfrac{1}{2^{n+1}n!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\, e^{t/2}dt$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. En déduire la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n\, n!}$.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Soit $n\in\mathbb{N}$. $\forall t\in[0,1]$, $0\leq (1-t)^n e^{t/2} \leq e^{t/2} \leq e^{1/2}$ et $\dfrac{1}{2^{n+1}n!}\geq 0$.

Alors $\forall t\in[0,1]$, $0\leq \dfrac{1}{2^{n+1}n!}(1-t)^n e^{t/2} \leq \dfrac{1}{2^{n+1}n!}e^{1/2}$.

En intégrant il vient $0\leq I_n \leq \dfrac{1}{2^{n+1}n!}e^{1/2}$ car $0\leq 1$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2^{n+1}n!}e^{1/2}\right)=0$. Par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Posons $\forall t\in[0,1]$, $\varphi(t)=e^{t/2}$. φ est de classe C^∞ sur $[0,1]$. $\forall k\in\mathbb{N}, \forall t\in[0,1]$, $\varphi^{(k)}(t)=\dfrac{1}{2^k}e^{t/2}$.

La formule de Taylor avec reste intégral donne :

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\varphi(1)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(1-0)^k}{k!}\varphi^{(k)}(0)+\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}\varphi^{(n+1)}(t)\,dt$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $e^{1/2}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2}\right)^k+\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}\frac{1}{2^{n+1}}e^{t/2}dt=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k k!}+I_n$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k k!}=e^{1/2}-I_n$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k k!}=e^{1/2}$

La série de terme général $\dfrac{1}{2^n n!}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n n!}=e^{1/2}$, un vrai scoop !

R

Question 5 ESCP 2007 $\boxed{\text{F3}}$

Soit $f(x) = \ln\left(x + \dfrac{1}{1+x}\right)$. Donner le domaine de définition de f.

Démontrer que les dérivées $f^{(n)}(0)$ d'ordre impair sont nulles, lorsque n est un multiple de 3.

▶ **C'est faux. On donnera une condition nécessaire et suffisant sur n pour que $f^{(n)} = 0$.**

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 1+x \neq 0$ et $x + \frac{1}{1+x} > 0\}$. Soit $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

$$x + \frac{1}{x+1} > 0 \iff \frac{x^2+x+1}{x+1} > 0 \iff \frac{(x+1/2)^2 + 3/4}{x+1} > 0 \iff x+1 > 0.$$

Ainsi $\underline{D_f =]-1, +\infty[}$. f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et sa dérivée coïncide avec une fraction rationnelle. Donc f est de classe C^∞ sur $]-1, +\infty[$.

Rappel.. $j = e^{i2\pi/3}$ et $j^2 = e^{i4\pi/3}$. $1+j+j^2 = 0$ et $j^3 = 1$. $j^2 = \bar{j}$.

Soit $x \in]-1, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1 - \frac{1}{(x+1)^2}}{x + \frac{1}{x+1}} = \frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{(x+1)^2 - 1}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{x^2+2x}{(x+1)(x^2+x+1)}.$$

$$f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)(x-j)(x-j^2)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-j} + \frac{1}{x-j^2}$$

Petite décomposition en éléments simples à l'aide.

Une récurrence simple donne alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-1, +\infty[, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n (n-1)!}{(x+1)^n} + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-j)^n} + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-j^2)^n}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$f^{(n)}(0) = (n-1)!\left[(-1)^n - \frac{1}{j^n} - \frac{1}{j^{2n}}\right] = (n-1)!\left[(-1)^n - \frac{j^{2n} + j^n}{j^{3n}}\right] = (n-1)!\left[(-1)^n - j^n - j^{2n}\right]$$

$$\text{Alors } f^{(n)}(0) = \begin{cases} -(n-1)! & \text{si } n \equiv 0\ [6] \\ 0 & \text{si } n \equiv 1\ [6] \\ 2(n-1)! & \text{si } n \equiv 2\ [6] \\ -3(n-1)! & \text{si } n \equiv 3\ [6] \\ 2(n-1)! & \text{si } n \equiv 4\ [6] \\ 0 & \text{si } n \equiv 5\ [6] \end{cases}$$

$\underline{f^{(n)}(0) = 0 \iff n \equiv 1\ [6] \text{ ou } n \equiv 5\ [6]}$.

R

Question 6 ESCP 2007

Soit (u_n) une suite réelle positive et λ un réel strictement positif. L'équivalence suivante est-elle vérifiée ?

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lambda \Longleftrightarrow (u_n)^n \sim \lambda^n.$$

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

$*$ Supposons que : $(u_n)^n \sim \lambda^n$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{\lambda}\right)^n = 1$.

$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $\left(\frac{u_n}{\lambda}\right)^n > 0$.

Nécessairement $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $\frac{u_n}{\lambda} > 0$ ((u_n) est une suite réelle positive (au sens large !) et $\lambda > 0$).

Alors $\lim_{n\to+\infty} \left(n \ln\left(\frac{u_n}{\lambda}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\ln\left(\frac{u_n}{\lambda}\right)^n\right) = 0$. De plus $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Par produit $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{u_n}{\lambda}\right) = 0$; $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\lambda} = 1$; $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lambda$.

$(u_n)^n \sim \lambda^n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \lambda$. (1)

$*$ Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ et $\lambda = 1$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 = \lambda$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\frac{u_n}{\lambda}\right)^n = (u_n)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.

$n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \frac{1}{n} = 1$. $\lim_{n\to+\infty} \left(n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = 1$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{\lambda}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e$. $\left(\frac{u_n}{\lambda}\right)^n \sim e$.

$(u_n)^n \sim e\,\lambda^n$ donc on n'a pas $(u_n)^n \sim \lambda^n$.

La réciproque de (1) est fausse.

R

Question 7 **ESCP 2007**

Soit X une variable aléatoire strictement positive de densité f. On suppose que X et $1/X$ admettent une espérance.

Comparer $E\left(\dfrac{1}{X}\right)$ et $\dfrac{1}{E(X)}$.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Il n'est pas restrictif de supposer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]-\infty, 0]$.

D'après le théorème de transfert $E\left(\frac{1}{X}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f(t)\,dt$.

$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\sqrt{f(t)}\right)\left(\sqrt{t}\sqrt{f(t)}\right)dt$, $\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f(t)\,dt$ convergent.

Dans ces conditions "le prolongement de Cauchy-Schwarz" donne :

$$\left(\int_0^{+\infty} f(t)\,dt\right)^2 \leq \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\sqrt{f(t)}\right)^2 dt \int_0^{+\infty}\left(\sqrt{t}\sqrt{f(t)}\right)^2 dt.$$

Alors $1 = 1^2 \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f(t)\,dt \int_0^{+\infty} t f(t)\,dt = E\left(\frac{1}{X}\right) E(X)$.

donc $E\left(\frac{1}{X}\right) \geq E(X)$.

Exercice.. Reprendre le problème pour une variable aléatoire discrète X prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et telle que $E(X)$ et $E\left(\frac{1}{X}\right)$ existent.

R

Question 8 ESCP 2007

Soit $n \geqslant 1$ et $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon identiquement distribué indépendant de loi de Poisson de paramètre inconnu $\lambda > 0$

On pose $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, $\quad T_n = \sqrt{n}\, \dfrac{\overline{X_n} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$

À l'aide de T_n, déterminer, pour n grand, un intervalle de confiance de λ au risque α donné.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

$E(\overline{X_n}) = \lambda$ et $V(\overline{X_n}) = \dfrac{1}{n^2} \times n \times \lambda = \dfrac{\lambda}{n}$.

Alors $T_n = \dfrac{\overline{X_n} - E(\overline{X_n})}{\sqrt{V(\overline{X_n})}}$. Le théorème de la limite centrée indique que (T_n) converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite dont nous notons ϕ la fonction de répartition.

ϕ définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$ donc $\exists !\, t_\alpha \in \mathbb{R}$, $\phi(t_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.

$t_\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ car $1 - \dfrac{\alpha}{2} > \dfrac{1}{2}$ ($\alpha \in]0,1[$!)

Nous supposerons, dans la suite, n assez grand (sic) et nous supposerons alors que T_n suit la loi normale centrée réduite.

$P(|T_n| \leqslant t_\alpha) = 2\phi(t_\alpha) - 1 = 2\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right) - 1 = 1 - \alpha$.

Alors $1 - \alpha = P(|T_n| \leqslant t_\alpha) = P\left(-t_\alpha \leqslant \sqrt{n}\, \dfrac{\overline{X_n} - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leqslant t_\alpha\right) = P\left(\lambda - \dfrac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{\lambda} \leqslant \overline{X_n} \leqslant \lambda + \dfrac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{\lambda}\right)$

$1 - \alpha = P\left(\left(\sqrt{\lambda} - \dfrac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\right)^2 - \dfrac{t_\alpha^2}{4n} \leqslant \overline{X_n} \leqslant \left(\sqrt{\lambda} + \dfrac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\right)^2 - \dfrac{t_\alpha^2}{4n}\right)$

$1 - \alpha \overset{(*)}{=} P\left(\left\{\sqrt{\lambda} - \dfrac{t_\alpha}{2\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{\overline{X_n} + \dfrac{t_\alpha^2}{4n}}\right\} \cap \left\{\sqrt{\lambda} + \dfrac{t_\alpha}{2\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{\overline{X_n} + \dfrac{t_\alpha^2}{4n}}\right\}\right)$

(*) Pour n assez grand on a $\sqrt{\lambda} - \dfrac{t_\alpha}{2\sqrt{n}} \geqslant 0$!

Alors $1 - \alpha = P\left(\left(\sqrt{\overline{X_n} + \dfrac{t_\alpha^2}{4n}} - \dfrac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\right)^2 \leqslant \lambda \leqslant \left(\sqrt{\overline{X_n} + \dfrac{t_\alpha^2}{4n}} + \dfrac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\right)^2\right)$

$\left[\left(\sqrt{\overline{X_n} + \dfrac{t_\alpha^2}{4n}} - \dfrac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\right)^2, \left(\sqrt{\overline{X_n} + \dfrac{t_\alpha^2}{4n}} + \dfrac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\right)^2\right]$ est un intervalle de confiance de λ à la confiance $1 - \alpha$ donc au risque α pour n assez grand...

R

Question 9 ESCP 2007

Une urne contient initialement une boule rouge et une boule noire. On effectue dans cette urne une succession de tirages suivant le protocole suivant :

- si on tire une boule rouge, on remet dans l'urne $r > 0$ boules rouges avant le tirage suivant.
- si on tire une boule noire, on remet dans l'urne $s > 0$ boules noires avant le tirage suivant.

On s'arrête lorsque le nombre de boules d'une couleur présente dans l'urne est 10 fois plus grand que le nombre de boules de l'autre couleur.

Écrire une fonction PASCAL permettant de simuler cette expérience.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

```
Program ESCP;

Function tirage(r,s:integer):integer;

var a,b,t:integer;
begin
a:=1;b:=1;t:=0;
repeat
t:=t+1;
if random <(a/(a+b)) then a:=a+r-1
                      else b:=b+s-1;
until (a>=10*b) or (b>=10*a);
tirage:=t;
end;
```

Ici "dans r" (resp. "dans s") il y a la boule tirée.

```
var r,s:integer;
begin
randomize;

r:=2;s:=3;

Writeln('Nb de tirages : ',tirage(r,s));
readln;
end.
```

R

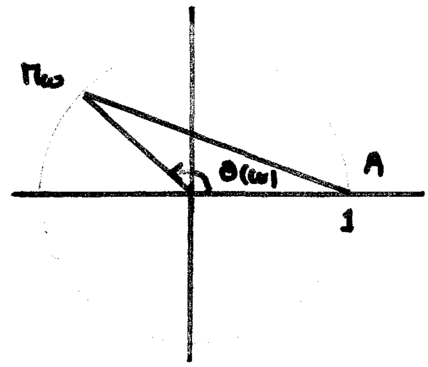
Question 10 ESCP 2007

Soit A le point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(1,0)$. Soit θ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-\pi,\pi]$.

À tout $\omega \in \Omega$, on associe le point M_ω du cercle unité d'affixe $e^{i\theta(\omega)}$

Donner l'espérance de la variable aléatoire représentant la distance de A à M_ω.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.



Notons X la variable aléatoire qui à tout ω dans Ω associe la distance de A à M_ω.

Soit $\omega \in \Omega$. Les coordonnées de M_ω sont $\cos\theta(\omega)$ et $\sin\theta(\omega)$.

$X(\omega) = \sqrt{(\cos(\theta(\omega))-1)^2 + (\sin(\theta(\omega)))^2}$

$X(\omega) = \sqrt{\cos^2\theta(\omega) + \sin^2\theta(\omega) + 1 - 2\cos\theta(\omega)}$

$X(\omega) = \sqrt{2(1-\cos\theta(\omega))} = \sqrt{4\sin^2(\theta(\omega)/2)} = 2\left|\sin\dfrac{\theta(\omega)}{2}\right|$.

$X = 2\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|$. θ prend ses valeurs dans $[-\pi,\pi]$ et admet pour densité la fonction f définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & \text{si } t \in [-\pi,\pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$g : t \mapsto 2\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|$ est continue sur $[-\pi,\pi]$.

Alors X possède une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t)f(t)\,dt$ est absolument convergente. En cas d'existence $E(X) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t)f(t)\,dt$.

$\forall t \in [-\pi,\pi]$, $g(t)f(t) = \dfrac{1}{\pi}\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|$. Donc $t \mapsto g(t)f(t)$ est continue et paire sur $[-\pi,\pi]$. Alors $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t)f(t)\,dt$ est absolument convergente. $E(X)$ existe.

$$E(X) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right| dt \overset{\text{parité}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t/2 = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos t/2}{1/2}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

$\underline{\underline{E(X) = \dfrac{4}{\pi}.}}$

R