Voici des questions sans préparation de l'oral ESCP 2009 obtenues auprès des élèves. Les énoncés ne sont pas garantis. Suivent quelques bribes de correction à usage interne. En fait ce ne sont pas des corrections mais des pistes. Les solutions ne sont pas optimales. Il doit aussi rester quelques erreurs mais c'est la loi du genre non ?

QUESTIONS COURTES ESCP 2009 (suite)

F 1 Assez simple ou proche du cours.

F 2 Demande du travail.

F 3 Délicat.

Question 12 ESCP 2009 F 1 ANGLADE

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'quation $\left(z^2+\dfrac{1}{z^2}\right)^2+\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2=4$.

Question 13 ESCP 2009 F 1 SITBON

X est Y sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre p.

Trouver la probabilité pour que les deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & Y \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} X & X \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soient semblables.

Question 14 ESCP 2009 F 1 SALS

Soient X_1, ..., X_n, n variables aléatoires réelles indépendantes, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suivent la loi exponentielle de paramètre λ.

Q1. Déterminer la loi de $Y_n = \text{Max}(X_1, ..., X_n)$.

Q2. Déterminer un équivalent de $P(Y_n \geqslant a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Question 15 ESCP 2009 F 1 PELLEGRINI

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E telle que pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $||e_i|| = 1$ et $||e_i||^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} < e_i, e_j >^2$.

Montrer que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Variante JF $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une famille de vecteurs $\boxed{\text{unitaires}}$ d'un espace vectoriel euclidien E (dont on ne précise pas la dimension...) telle que :

$$\forall x \in E,\ ||x||^2 = \sum_{k=1}^{n} (< x, u_k >)^2$$

Montrer que $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une base orthonormée de E.

Question 16 ESCP 2009 F 1 BUCCARI

M et X sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui prennent leurs valeurs dans N. Pour tout n dans $\mathbb{N}$ la loi de X sachant $\{M = n\}$ est la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

Trouver la loi de X en fonction de la loi de M. Comparer les lois de X et de $M - X$.

On suppose que M possède une espérance. Montrer que $E(X)$ existe et l'exprimer en fonction de $E(N)$.

Trouver la loi de X lorsque M suit la loi géométrique de paramètre p.

JF On entendra que M suit la loi géométrique "sur $\mathbb{N}$" de paramètre p ; autrement dit que $M + 1$ suit notre loi géométrique de paramètre 1.

Question 17 ESCP 2009 $\boxed{\textbf{F 1}}$ GARBE et HELD

Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x - 1 = 0$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}^+$ que nous noterons a_n.

Étudier la suite (a_n).

Question 18 ESCP 2009 $\boxed{\textbf{F 1}}$ BLOCK

Soit X une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}^*$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $P(X = n) = P(X = -n) = \dfrac{1}{2n(n+1)}$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, A_n est l'événement : $\{X = n\} \cup \{X = -n\}$.

Montrer que l'espérance de X sachant A_n existe et la calculer.

Question 19 ESCP 2009 $\boxed{\textbf{F 1}}$ DUTEIL

A et B sont deux événements. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B)\, P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A} \cap B)\, P(A \cap \overline{B}).$$

Question 20 ESCP 2009 $\boxed{\textbf{F 2}^+}$ BILLETTE

f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, telle qu'il existe un polynôme de degré impair P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f^{(n)}(x)| \leqslant |P(x)|.$$

Montrer que f est nulle sur $\mathbb{R}$.

R.

Question 12 **ESCP 2009** $\boxed{\textbf{F 1}}$ ANGLADE

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'quation $\left(z^2+\dfrac{1}{z^2}\right)^2+\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2=4$.

Soit $z\in\mathbb{C}^*$. Posons $u=z+\frac{1}{z}$ et $v=u^2$.

$\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2=\left(\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2=(v-2)^2+v=v^2-3v+4.$

$\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2=4 \iff v^2-3v+4=4 \iff v^2-3v=0 \iff v=0$ ou $v=3 \iff u^2=0$ ou $u^2=3$.

$\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2=4 \iff u=0$ ou $u=\sqrt{3}$ ou $u=-\sqrt{3} \iff z+\frac{1}{z}=0$ ou $z+\frac{1}{z}=\sqrt{3}$ ou $z+\frac{1}{z}=-\sqrt{3}$

$\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2=4 \iff z^2+1=0$ ou $z^2-\sqrt{3}z+1=0$ ou $z^2+\sqrt{3}z+1=0$.

$z^2+1=0 \iff z=i$ ou $-i$

$z^2-\sqrt{3}z+1=0 \iff \left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{3}{4}+1=0 \iff \left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}=\left(\frac{i}{2}\right)^2 \iff \begin{cases} z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2} \\ \text{ou} \\ z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2} \end{cases}$.

$z^2+\sqrt{3}z+1=0 \iff \cdots \iff \begin{cases} z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2} \\ z=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2} \end{cases}$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{i,-i,\ \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right\}$

ou $\left\{i,-i,e^{i\pi/6},e^{-i\pi/6},e^{i5\pi/6},e^{-i5\pi/6}\right\}$

ou $\left\{i,-i,e^{i\pi/6},e^{-i\pi/6},-e^{-i\pi/6},-e^{i\pi/6}\right\}$.

Question 13 **ESCP 2009** $\boxed{\textbf{F 1}}$ SITBON

X est Y sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre p.

Trouver la probabilité pour que les deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & Y \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} X & X \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soient semblables.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

* Supposons que A et B sont ~~semblables~~. Alors $\mathrm{Sp}\, A = \mathrm{Sp}\, B$.

A et B sont triangulaires supérieures donc $\mathrm{Sp}\, A = \{1, 2\}$ et $\mathrm{Sp}\, B = \{\alpha, \beta\}$

Ainsi $\{\alpha, \beta\} = \{1, 2\}$ ce qui signifie que ($\alpha = 1$ et $\beta = 2$) ou ($\alpha = 2$ et $\beta = 1$).

* Réciproquement supposons que $\{\alpha, \beta\} = \{1, 2\}$.

Alors $\mathrm{Sp}\, A = \mathrm{Sp}\, B = \{1, 2\}$. A et B ont deux valeurs propres distinctes 1 et 2

et appartiennent à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. A et B sont diagonalisables.

Mieux : $\exists Q \in GL_2(\mathbb{R})$, $Q^{-1} A Q = \mathrm{Diag}(1, 2)$.

$\exists Q' \in GL_2(\mathbb{R})$, $Q'^{-1} B Q' = \mathrm{Diag}(1, 2)$. Posons $D = \mathrm{Diag}(1, 2)$.

Alors $A = Q D Q^{-1} = Q Q'^{-1} B Q' Q^{-1} = (Q' Q^{-1})^{-1} B Q' Q^{-1}$; A et B sont ~~semblables~~.

Ainsi A et B sont semblables si et seulement si $\{\alpha, \beta\} = \{1, 2\}$.

Notons $\hat{p}$ la probabilité pour que $\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} X & X \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soient semblables.

D'après ce qui précède $\hat{p} = P\big((\{X=1\} \cap \{Y=2\}) \cup (\{X=2\} \cap \{Y=1\})\big)$.

Par incompatibilité et indépendance on a $\hat{p} = P(X=1)P(Y=2) + P(X=2)P(Y=1)$.

$\hat{p} = p \times p(1-p) + p(1-p) \times p = 2p^2(1-p)$.

<u>La probabilité cherchée est $2p^2(1-p)$.</u>

R

Question 14 ESCP 2009 $\boxed{\text{F 1}}$ SALS

Soient X_1, ..., X_n, n variables aléatoires réelles indépendantes, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suivent la loi exponentielle de paramètre λ.

Q1. Déterminer la loi de $Y_n = \text{Max}(X_1, ..., X_n)$.

Q2. Déterminer un équivalent de $P(Y_n \geqslant a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Q1 Notons F_n la fonction de répartition de Y_n. Rappelons que la fonction de répartition des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ est la fonction F définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = P(\text{Max}(X_1, \dots, X_n) \leqslant x) = P(\{X_1 \leqslant x\} \cap \{X_2 \leqslant x\} \cap \dots \cap \{X_n \leqslant x\})$.

Par indépendance on obtient :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = P(X_1 \leqslant x) P(X_2 \leqslant x) \dots P(X_n \leqslant x) = (F(x))^n$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \begin{cases} (1 - e^{-\lambda x})^n & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Remarquons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \begin{cases} (1 - e^{-\lambda x})^n & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \end{cases}$

$x \mapsto 0$ et $x \mapsto (1 - e^{-\lambda x})^n$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Alors F_n est de classe C^1 sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$.

Cela suffit pour dire que F_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R} - \{0\}$ et qu'ainsi Y_n est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F'_n(x) = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $F'_n(x) = n \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1}$

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} n \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

f_n est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_n sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. <u>f_n est une densité de Y_n</u>

Q2 $P(Y_n \geq a) = 1 - P(Y_n < a) = 1 - P(Y_n \leq a) = 1 - (1 - e^{-\lambda a})^n$.

$(1+x)^n - 1 \underset{x \mapsto 0}{\sim} nx$; $1 - (1+x)^n \underset{x \mapsto 0}{\sim} -nx$; $1 - (1-x)^n \underset{x \mapsto 0}{\sim} nx$

$\lim\limits_{a \mapsto +\infty} e^{-\lambda a} = 0$ car $\lambda > 0$ donc $\underline{\underline{P(Y_n \geq a) \underset{a \mapsto +\infty}{\sim} n e^{-\lambda a}}}$.

Question 15 **ESCP 2009** $\boxed{\textbf{F 1}}$ PELLEGRINI

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E telle que pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $\|e_i\| = 1$ et $\|e_i\|^2 = \sum_{j=1}^{n} < e_i, e_j >^2$.

Montrer que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Variante JF $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une famille de vecteurs $\boxed{\text{unitaires}}$ d'un espace vectoriel euclidien E (dont on ne précise pas la dimension...) telle que :

$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (< x, u_k >)^2$$

Montrer que $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une base orthonormée de E.

---

1) $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E.

2) $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\|e_i\| = 1$

3) Soit $i \in [\![1,n]\!]$, $\|e_i\|^2 = \sum_{j=1}^{n} <e_i, e_j>^2 = \|e_i\|^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} <e_i, e_j>^2$

Alors $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} <e_i, e_j>^2 = 0$ et $\forall j \in [\![1,n]\!] - \{i\}$, $<e_i, e_j>^2 \geqslant 0$.

Donc $\forall j \in [\![1,n]\!] - \{i\}$, $<e_i, e_j>^2 = 0$. $\forall j \in [\![1,n]\!] - \{i\}$, $<e_i, e_j> = 0$ et

ceci pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Donc $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une famille orthogonale de E.

1), 2) et 3) montrent que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

<u>Variante</u> On montre comme plus haut que la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est orthonormée en

partant de $\|u_i\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (<u_i, u_k>)^2$ pour $i \in [\![1,n]\!]$.

$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est alors une famille orthonormée donc libre de E. <u>Soit $x \in E$</u>

$\|x - \sum_{k=1}^{n} <x, u_k> u_k\|^2 = \|x\|^2 - 2 <x, \sum_{k=1}^{n} <x, u_k> u_k> + \|\sum_{k=1}^{n} <x, u_k> u_k\|^2$

$\|x - \sum_{k=1}^{n} <x, u_k> u_k\|^2 = \|x\|^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} <x, u_k> <x, u_k> + <\sum_{k=1}^{n} <x, u_k> u_k, \sum_{i=1}^{n} <x, u_i> u_i>$

$\|x - \sum_{k=1}^{n} <x, u_k> u_k\|^2 = \|x\|^2 - 2\|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} <x, u_k> <x, u_i> \underbrace{<u_k, u_i>}_{=\begin{cases} 1 \text{ si } k=i \\ 0 \text{ si } k\neq i\end{cases}}$

$\|x - \sum_{k=1}^{n} <x, u_k> u_k\|^2 = \|x\|^2 - 2\|x\|^2 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} <x, u_k>^2}_{\|x\|^2} = 0$. $\underline{x = \sum_{k=1}^{n} <x, u_k> u_k}$.

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k \rangle u_k .$$

$(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une famille génératrice de E.

Comme $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une famille libre et orthonormée de E :

$(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base orthonormée de E.

Question 16 ESCP 2009 $\boxed{\text{F 2}}$ BUCCARI

M et X sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui prennent leurs valeurs dans N. Pour tout n dans $\mathbb{N}$ la loi de X sachant $\{M = n\}$ est la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

Trouver la loi de X en fonction de la loi de M. Comparer les lois de X et de $M - X$.

On suppose que M possède une espérance. Montrer que $E(X)$ existe et l'exprimer en fonction de $E(N)$.

Trouver la loi de X lorsque M suit la loi géométrique de paramètre p.

JF On entendra que M suit la loi géométrique "sur $\mathbb{N}$" de paramètre p ; autrement dit que $M+1$ suit notre loi géométrique de paramètre 1.

Soit $k \in \mathbb{N}$. $(\{M=n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

$P(X=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(M=n)\, P_{\{M=n\}}(X=k)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{\{M=n\}}(X=k) = \begin{cases} 1/(n+1) & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors $P(X=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(M=n)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. $P(M-X=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{M=n\} \cap \{M-X=k\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{M=n\} \cap \{X=n-k\})$.

$P(M-X=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(M=n)\, P_{\{M=n\}}(X=n-k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(M=n)$

$P_{\{M=n\}}(X=n-k) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } 0 \leq n-k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Ainsi <u>X et $M-X$ ont même loi.</u>

Supposons que M possède une espérance. Montrons alors que $E(X)$ existe en utilisant le théorème sur les espérances conditionnelles.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(|X| \mid M=n) = E(X \mid M=n)$ existe et vaut $\frac{n}{2}$ car la loi de X sachant que $\{M=n\}$ est la loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(|X| \mid M=n) \times P(M=n) = \frac{n}{2} P(M=n)$. $E(M)$ existe donc la série de terme général $\frac{n}{2} P(M=n)$ converge.

Alors la série de terme général $E(|X| \mid M=n)\, P(M=n)$ converge.

Le texte suffit pour dire que :

1) X possède une espérance. $\underline{\underline{E(X) \text{ existe.}}}$

2) $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} E(X|N=n)\,P(N=n)$.

Alors $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2}\, P(N=n)$; $\underline{\underline{E(X) = \frac{1}{2} E(N)}}$ ... ce que l'on peut retrouver en se rappelant que X et $N-X$ ont même loi.

Supposons que $N+1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Posons $q = 1-p$.

Alors $N(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(N=n) = P(N+1=n+1) = p\, q^{(n+1)-1} = p q^n$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} p q^n = \frac{p}{q} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{q^{n+1}}{n+1}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $r \in [\![k, +\infty[\![$.

$$\sum_{n=k}^{r} \frac{q^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=k}^{r} \int_0^q t^n\, dt = \int_0^q \sum_{n=k}^{r} t^n\, dt = \int_0^q t^k\, \frac{1-t^{r-k+1}}{1-t}\, dt.$$

$$\sum_{n=k}^{r} \frac{q^{n+1}}{n+1} = \int_0^q \frac{t^k}{1-t}\, dt - \int_0^q \frac{t^{r+1}}{1-t}\, dt.$$

$$\text{Or } 0 \leq \int_0^q \frac{t^{r+1}}{1-t}\, dt \leq \int_0^q \frac{t^{r+1}}{1-q}\, dt = \frac{1}{1-q} \int_0^q t^{r+1}\, dt = \frac{1}{1-q} \frac{q^{r+2}}{r+2} \leq \frac{1}{1-q} \frac{1}{r+2}$$

$t \mapsto \frac{1}{1-t}$ est croissante sur $[0,q]$

$\lim_{r \to +\infty} \left(\frac{1}{1-q} \frac{1}{r+2} \right) = 0$ donc $\lim_{r \to +\infty} \int_0^q \frac{t^{r+1}}{1-t}\, dt = 0$.

Alors $\lim_{r \to +\infty} \sum_{n=k}^{r} \frac{q^{n+1}}{n+1} = \int_0^q \frac{t^k}{1-t}\, dt$; $\underline{\underline{P(X=k) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^k}{1-t}\, dt}}$

$$P(X=k) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{t^k - 1}{1-t}\, dt + \int_0^q \frac{1}{1-t}\, dt \right) = \frac{p}{q}\left(-\int_0^q \sum_{i=0}^{k-1} t^i\, dt - [\ln|1-t|]_0^q \right)$$

$$P(X=k) = \frac{p}{q}\left(-\sum_{i=0}^{k-1} \frac{q^{i+1}}{i+1} - \ln(1-q) \right) = -\frac{p}{q}\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{q^i}{i} + \ln p \right)$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X=k) = -\frac{p}{q}\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{q^i}{i} + \ln p \right).$$

R

Question 17 ESCP 2009 $\boxed{\text{F 1}}$ GARBE et HELD

Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, l'équation $x^n+x-1=0$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}^+$ que nous noterons a_n.

Étudier la suite (a_n).

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $f_n(x)=x^n+x-1$

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $f_n'(x)=nx^{n-1}+1>0$.

f_n est continue sur $[0,+\infty[$, f_n est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, $f_n(0)=-1$

et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f_n(x)=+\infty$. Alors f_n est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[-1,+\infty[$.

$0\in[-1,+\infty[$ donc $\exists!\, a_n\in\mathbb{R}^+$, $f_n(a_n)=0$.

$\exists!\, a_n\in\mathbb{R}^+$, $a_n^n+a_n-1=0$.

<u>L'équation $x\in\mathbb{R}^+$ et $x^n+x-1=0$ admet une solution et une seule.</u>

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$f_n(1)=1$ donc $a_n<1$. $f_n(0)=-1$ donc $0<a_n$. <u>$a_n\in]0,1[$.</u>

$$f_{n+1}(a_n)=a_n^{n+1}+a_n-1\overset{a_n-1=-a_n^n}{=}a_n^{n+1}-a_n^n=a_n^n(a_n-1)<0$$

$f_{n+1}(a_n)<0=f_{n+1}(a_{n+1})$ et f_{n+1} est strictement croissante. $a_n<a_{n+1}$.

$(a_n)_{n\geq1}$ est strictement croissante et majorée par 1 donc elle converge.

Notons ℓ sa limite. $\ell\in[0,1]$. <u>Supposons que $\ell<1$.</u>

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_n\leq\ell$ (car la suite est croissante). $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0<a_n^n\leq\ell^n$

et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\ell^n=0$ car $|\ell|<1$. Par encadrement $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}a_n^n=0$.

Alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}(1-a_n)=\lim\limits_{n\mapsto+\infty}a_n^n=0$; $1-\ell=0$; <u>$\ell=1$!!</u>

Ainsi la suite <u>$(a_n)_{n\geq1}$ converge vers 1.</u>

R

Question 18 **ESCP 2009** $\boxed{\textbf{F 1}}$ BLOCK

Soit X une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}^*$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $P(X=n) = P(X=-n) = \dfrac{1}{2n(n+1)}$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, A_n est l'événement : $\{X=n\} \cup \{X=-n\}$.

Montrer que l'espérance de X sachant A_n existe et la calculer.

Soit $k \in \mathbb{Z}^*$. $P_{A_n}(X=k) = \dfrac{1}{P(A_n)} P(\{X=k\} \cap A_n)$. <u>n est donné dans $\mathbb{Z}^*$</u>

$$P_{A_n}(X=k) = \frac{1}{P(A_n)} \left[P(\{X=k\} \cap (\{X=n\} \cup \{X=-n\})) \right]$$

$$P_{A_n}(X=k) = \frac{1}{P(A_n)} \left[P(\{X=k\} \cap \{X=n\}) + P(\{X=k\} \cap \{X=-n\}) \right]$$

$$P(\{X=k\} \cap \{X=n\}) = \begin{cases} P(X=n) & \text{si } k=n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases}$$

$$P(\{X=k\} \cap \{X=-n\}) = \begin{cases} P(X=-n) & \text{si } k=-n \\ 0 & \text{si } k \neq -n \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} P(X=n) & \text{si } k=-n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc $P(\{X=k\} \cap \{X=n\}) + P(\{X=k\} \cap \{X=-n\}) = \begin{cases} P(X=n) & \text{si } k \in \{-n,n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors $P_{A_n}(X=k) = \begin{cases} \dfrac{P(X=n)}{P(A_n)} & \text{si } k \in \{-n,n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$$\frac{P(X=n)}{P(A_n)} = \frac{P(X=n)}{P(X=n)+P(X=-n)} = \frac{P(X=n)}{2P(X=n)} = \frac{1}{2}.$$

$\forall k \in \mathbb{Z}^*$, $P_{A_n}(X=k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } k \in \{-n,n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors $E(X \mid A_n)$ existe et vaut $-n \times \frac{1}{2} + n \times \frac{1}{2}$.

<u>$E(X \mid A_n) = 0$.</u>

R

Question 19 **ESCP 2009** $\boxed{\text{F 1}}$ DUTEIL

A et B sont deux événements. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A\cap B)\,P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A}\cap B)\,P(A\cap\overline{B}).$$

$P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap \overline{B})$; $P(A\cap\overline{B}) = P(A) - P(A\cap B)$

$P(B) = P(A\cap B) + P(\overline{A}\cap B)$; $P(\overline{A}\cap B) = P(B) - P(A\cap B)$

$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = 1 - P(\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}) = 1 - P(\overline{\overline{A}}\cup\overline{\overline{B}}) = 1 - P(A\cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A\cap B).$

$P(A\cap B)P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A}\cap B)\,P(A\cap\overline{B})$

$\Updownarrow$

$P(A\cap B)(1 - P(A) - P(B) + P(A\cap B)) = (P(A) - P(A\cap B))(P(B) - P(A\cap B))$

$\Updownarrow$

$P(A\cap B) - P(A\cap B)P(A) - P(A\cap B)P(B) + (P(A\cap B))^2 = P(A)P(B) - P(A)P(A\cap B) - P(A\cap B)P(B) + (P(A\cap B))^2$

$\Updownarrow$

$P(A\cap B) = P(A)P(B)$

$\Updownarrow$

A et B sont indépendants

A et B sont indépendants si et seulement si $P(A\cap B)P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A}\cap B)\,P(A\cap\overline{B})$.

Question 20 ESCP 2009 $\boxed{\text{F } 2^+}$ BILLETTE

f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, telle qu'il existe un polynôme de degré impair P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f^{(n)}(x)| \leqslant |P(x)|.$$

Montrer que f est nulle sur $\mathbb{R}$.

1°/ P est continue sur $\mathbb{R}$

2°/ P est un polynôme de degré impair donc $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty \\ \text{ou} \\ \lim_{x\to+\infty} P(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} P(x) = +\infty. \end{cases}$

Le théorème des valeurs intermédiaires montre alors que P admet au moins un zéro a dans $\mathbb{R}$. $\underline{P(a)=0}$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f^{(n)}(a)| \leq |P(a)| = 0$; $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(a) = 0}$. En particulier $f(a)=0$.

Fixons x dans $\mathbb{R}-\{a\}$ et appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à f à l'ordre n " en a " (f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$).

$$\Big|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} \underbrace{f^{(k)}(a)}_{=0}\Big| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{t\in[a,x]} |f^{(n+1)}(t)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{n+1} \max_{t\in[a,x]} |P(t)|$$

P est continue sur le segment $[a,x]$

$$|f(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{t\in[a,x]} |P(t)| \quad (1)$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ car la série de terme général $\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$ converge.

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans (1) il vient $|f(x)| \leq 0$ donc $f(x)=0$.

$\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=0.\ f \text{ est nulle sur } \mathbb{R}.}}$