QUESTIONS COURTES 2010

F 1 Assez simple ou proche du cours.

F 2 Demande du travail.

F 3 Délicat.

Question 11 **ESCP 2010** S. ARSALANE et J.D. FOATA **F1**

Existence et valeur de $\displaystyle \operatorname*{Min}_{(a,b)\in(]0,+\infty[)^2}\left(\sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\right)$.

Question 12 **ESCP 2010** O. GUESNÉ **F 1**

u_1, u_2, ..., u_n sont n réels tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^2 = 1$. A est la matrice $(u_i\,u_j)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = 2\,A - I_n$.

Montrer que B est orthogonale. Quelles-sont les valeurs propres de A ?

Question 13 **ESCP 2010** G. FOUBART **F 1**

André, Jacques et Maurice se donnent rendez-vous et se déplacent de façon indépendante.

La probabilité pour que André (resp. Jacques et Maurice) arrive à l'heure est 1/2 (resp. 1/3 et 1/4).

Quelle est la probabilité pour que au moins 2 personnes soient à l'heure ?

Question 14 **ESCP 2010** X. MARTUCCI **F1**

X est une variable aléatoire de densité f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln 2}\,\dfrac{1}{x+1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On pose $Y = \dfrac{1}{X} - \operatorname{Ent}\left(\dfrac{1}{X}\right)$ Montrer que Y suit la même loi que X.

Question 15 **ESCP 2010** E. JARDIN **F1**

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $P(X_n = 1) = p$ et $P(X_n = -1) = q = 1 - p$ $(0 < p < 1)$.

Trouver la loi de $Y_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} X_k$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que la suite Y_n converge en loi.

Question 16 **ESCP 2010** Obtenue par E. JARDIN **F1**

A est une matrice carrée d'ordre n. Pour tout (i,j) appartenant à $[\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = 1$ si $i + j = n + 1$ et 0 sinon.

Déterminer le spectre de A

Question 17 **ESCP 2010** F. HUA **F 1**

Étudier la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-1} - \sqrt{x^2-1}\right)\mathrm{d}x$.

Question 18 **ESCP 2010** T. VERGER $\boxed{\textbf{F1}}$

f est une application continue de $[a, b]$ $(a < b)$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ si et seulement si f garde un signe constant sur $[a, b]$.

Question 19 **ESCP 2010** K. AFRIAT $\boxed{\textbf{F1}}$

Q1. Montrer que $F : x \to \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Q2. $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant pour fonction de répartition F.

Montrer que $(\mathrm{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n) - \ln n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi.

Question 20 **ESCP 2010** J. DIAZ $\boxed{\textbf{F1}}$

Donner les conditions pour que $x \to a\, e^{-|x|}\ \ln(1 + e^{|x|})$ soit une densité de probabilité.

Question 21 **ESCP 2010** S. ALLAIN $\boxed{\textbf{F1}}$

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a p valeurs propres distinctes et est diagonalisable. Donnez le degré minimal pour un polynôme annulateur non nul de cette matrice.

Question 22 **ESCP 2010** J. MESNILDREY et M. PARIN $\boxed{\textbf{F2}}$

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de densité f continue sur $[a, b]$ et nulle en dehors de $[a, b]$.

Justifier l'existence d'un réel α tel que $E(|X - \alpha|)$ soit minimale. Que représente α ?

Question 23 **ESCP 2010** L. VIE $\boxed{\textbf{F2}}$

n et p sont deux éléments de $[\![2, +\infty[\![$. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $A^{p-1} \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

On pose $E = \{P(A)\,;\, P \in \mathbb{R}[X]\}$.

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et trouver sa dimension.

Question 24 **ESCP 2010** D. ATTIAS $\boxed{\textbf{F1}}$

On lance une pièce qui donne face avec la probabilité p (où p appartient $]0, 1[$). n est entier supérieur ou égal 1. On note : P_n (resp. F_n) la variable aléatoire égale au nombre de piles (resp. faces) obtenus au cours des n premiers lancers. ε est un réel strictement positif.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P\Big(\left|\dfrac{F_n - P_n}{n} - (1 - 2p)\right| \leqslant \varepsilon\Big) = 1$.

Question 25 **ESCP 2010** G. PECORARI $\boxed{\textbf{F1}}$

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. Les boules numérotées de 1 à k sont rouges et les autres blanches $(1 < k < n)$.

On effectue n tirages successifs et sans remise d'une boule dans l'urne. Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, X_i est la variable aléatoire égale à 1 si on tire une boule rouge au $i^{\text{ème}}$ tirage et 0 sinon.

Trouver la loi de X_i, $E(X_i)$, $V(X_i)$.

Écrire une fonction en Turbo-Pascal qui simule la variable aléaoire X_i.

Question 26 **ESCP 2010** J. HÉRY $\boxed{\textbf{F2}}$

n appartient à $[\![2, +\infty[\![$. Soit P un polynôme réel de degré n, admettant n racines réelles distinctes.

a) Combien P' admet-il de racines réelles ?

b) Comparer la moyenne arithmétique des racines de P à la moyenne arithmétique des racines de P'.

Question déjà donnée en 2009.

Question 27 **ESCP 2010** PROST et ROUX

Une urne contient $4n + 2$ boules numérotées de 1 à $4n + 2$. On tire $2n + 1$ boules sans remise, quelle est la probabilité que la somme des numéros des boules tirées soit strictement supérieure à la somme des numéros des boules restantes ?

Question déjà donnée en 2009.

Question 11 **ESCP 2010** S. ARSALANE et J.D. FOATA $\boxed{\textbf{F1}}$

Existence et valeur de $\displaystyle\operatorname*{Min}_{(a,b)\in(]0,+\infty[)^2}\left(\sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\right)$.

Posons $\forall (a,b)\in(]0,+\infty[)^2$, $f(a,b)=\sqrt{a+b}\,\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)$.

$\forall (a,b)\in(]0,+\infty[)^2$, $f(a,b)=\sqrt{\frac{a+b}{a}}+\sqrt{\frac{a+b}{b}}=\sqrt{1+b/a}+\sqrt{1+a/b}$.

Posons $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x)=\sqrt{1+x}+\sqrt{1+1/x}$.

Alors $\forall (a,b)\in(]0,+\infty[)^2$, $f(a,b)=\varphi\left(\frac{b}{a}\right)$. Étudions φ sur $]0,+\infty[$.

φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x\in]0,+\infty[$, $\varphi'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{-1/x^2}{2\sqrt{1+1/x}}=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{x^2}\,\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{1+x}}$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x)=\frac{1}{2x^2\sqrt{1+x}}\left[x^2-\sqrt{x}\right]=\frac{\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{1+x}}\,(x\sqrt{x}-1)$

$\varphi'(1)=0$, $\forall x\in]0,1[$, $\varphi'(x)<0$ et $\forall x\in]1,+\infty[$, $\varphi'(x)>0$.

φ est strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

Ainsi $\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $\varphi(x)>\varphi(1)=2\sqrt{2}$.

Donc 1) φ admet un minimum sur $]0,+\infty[$ qui vaut $2\sqrt{2}$.

2) 1 est le seul élément de $]0,+\infty[$ qui réalise ce minimum.

Soit $(a,b)\in(]0,+\infty[)^2$. $f(a,b)=\varphi\left(\frac{b}{a}\right)\geqslant 2\sqrt{2}=\varphi(1)=\varphi\left(\frac{1}{1}\right)=f(1,1)$.

Donc $\displaystyle\operatorname*{Min}_{(a,b)\in(]0,+\infty[)^2}\left(\sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\right)$ existe et vaut $2\sqrt{2}$.

Soit $(a,b)\in(]0,+\infty[)^2$.

$f(a,b)=2\sqrt{2}\iff\varphi\left(\frac{b}{a}\right)=2\sqrt{2}\iff\frac{b}{a}=1\iff a=b$.

<u>L'ensemble des points de $(]0,+\infty[)^2$ qui réalisent le minimum de f est</u>

<u>$\{(a,a)\,;\,a\in]0,+\infty[\}$.</u>

Question 12 **ESCP 2010** O. GUESNÉ **F1**

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont n réels tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^2 = 1$. A est la matrice $(u_i u_j)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = 2A - I_n$.

Montrer que B est orthogonale. Quelles-sont les valeurs propres de A ?

Nous notons $\langle \cdot , \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\| . \|$ la norme associée. Nous posons $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$. $\|U\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^2 = 1$.

Observons que $\underline{\underline{A = U\,{}^tU}}$

${}^tA = {}^t(U\,{}^tU) = {}^t({}^tU)\,{}^tU = U\,{}^tU = A$. <u>$A$ est symétrique</u>. B également ! $\underline{{}^tB = B}$

$A^2 = U\underbrace{{}^tU\,U}_{\|U\|^2}{}^tU = \|U\|^2\, U\,{}^tU = U\,{}^tU = A$; $\underline{\underline{A^2 = A}}$

Remarque.. A est la matrice d'une projection orthogonale car $A^2 = A$ et A est symétrique

Alors $B = 2A - I_n$ est la matrice d'une symétrie orthogonale...

Ainsi ${}^tB = B$ et $B^2 = I_n$ donc ${}^tBB = I_n$ et B est orthogonale !!

Oublions la remarque.. ${}^tB\,B = B^2 = (2A - I_n)^2 \underset{AI_n = I_nA}{=} 4A^2 - 4A + I_n \underset{A^2 = A}{=} I_n$.

B est une matrice orthogonale.

$A^2 - A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de A ayant pour zéros 0 et 1.

$\operatorname{Sp} A \subset \{0, 1\}$.

$AU = U\underbrace{{}^tU\,U}_{\|U\|^2} = \|U\|^2 U = U$ et $U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. $1 \in \operatorname{Sp} A$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff U\,{}^tU X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff \langle U, X\rangle U = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \underset{U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}}{\iff} \langle U, X \rangle = 0$

$AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff X \in (\operatorname{Vect}(U))^{\perp}$.

1er cas $n = 1$ Alors $\underline{\underline{\operatorname{Sp} A = \{1\}}}$

2e cas $n \geqslant 2$ $(\operatorname{Vect}(U))^{\perp}$ est non réduit à $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ car sa dimension est $n-1$;

alors $0 \in \operatorname{Sp} A$. Finalement $\underline{\underline{\operatorname{Sp} A = \{0, 1\}}}$.

Remarque.. $\operatorname{SEP}(A, 0) = (\operatorname{Vect}(U))^{\perp}$ et $\operatorname{SEP}(A, 1) = \operatorname{Vect}(U)$.

Question 13 ESCP 2010 G. FOUBART $\boxed{\text{F 1}}$ ou F0

André, Jacques et Maurice se donnent rendez-vous et se déplacent de façon indépendante.

La probabilité pour que André (resp. Jacques et Maurice) arrive à l'heure est 1/2 (resp. 1/3 et 1/4).

Quelle est la probabilité pour que au moins 2 personnes soient à l'heure ?

Notons S l'événement dont on cherche la probabilité.

Notons A (resp. J ; resp. M) l'événement André (resp. Jacques ; resp. Maurice) arrive à l'heure. $P(A)=1/2$, $P(J)=1/3$, $P(M)=1/4$.

S est la réunion des événements incompatibles : $A\cap J\cap \bar{M}$, $A\cap \bar{J}\cap M$, $\bar{A}\cap J\cap M$, $A\cap J\cap M$.

Donc $P(S)=P(A\cap J\cap \bar{M})+P(A\cap \bar{J}\cap M)+P(\bar{A}\cap J\cap M)+P(A\cap J\cap M)$.

Par indépendance on obtient :

$P(S)=P(A)P(J)P(\bar{M})+P(A)P(\bar{J})P(M)+P(\bar{A})P(J)P(M)+P(A)P(J)P(M)$

$P(S)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$

$P(S)=\frac{1}{24}(3+2+1+1)=\frac{7}{24}$. $\qquad \underline{\underline{P(S)=\frac{7}{24}.}}$

Question 14 ESCP 2010 X. MARTUCCI $\boxed{\text{F1}}$

X est une variable aléatoire de densité f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln 2}\dfrac{1}{x+1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On pose $Y = \dfrac{1}{X} - \mathrm{Ent}\left(\dfrac{1}{X}\right)$ Montrer que Y suit la même loi que X.

Posons $Z = \dfrac{1}{X}$. Notons F_Z sa fonction de répartition.

Z prend ses valeurs dans $[1,+\infty[$. $\forall x \in]-\infty,1[,\ F_Z(x) = 0$.

Soit $x \in [1,+\infty[$. $F_Z(x) = P\left(\dfrac{1}{X} \leqslant x\right) = P\left(\dfrac{1}{x} \leqslant X\right) = 1 - P\left(X < \dfrac{1}{x}\right) = 1 - \displaystyle\int_0^{1/x} \frac{dt}{(\ln 2)(t+1)}$.

$\begin{cases} X \text{ prend ses valeurs positives...} \\ x > 0 \end{cases}$ $\qquad \dfrac{1}{x} \in [0,1]$

$F_Z(x) = 1 - \dfrac{1}{\ln 2}\Big[\ln|t+1|\Big]_0^{1/x} = 1 - \dfrac{1}{\ln 2}\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right) = 1 - \dfrac{1}{\ln 2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{\ln 2}\ln\dfrac{x+1}{x} & \text{si } x \in [1,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

<u>Exercice</u>.. Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et en trouver une densité.

Posons $T = \mathrm{Ent}(Z)$. $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$. $(\{T=k\})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements...

$Y = \dfrac{1}{X} - \mathrm{Ent}\left(\dfrac{1}{X}\right) = Z - \mathrm{Ent}(Z) = Z - T$ prend ses valeurs dans $[0,1[$.

Notons F_Y la fonction de répartition de Y. $\forall x \in]-\infty,0[,\ F_Y(x) = 0$ et $\forall x \in [1,+\infty[,\ F_Y(x) = 1$. Soit $x \in [0,1[$.

$F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(Z - T \leqslant x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(\{T=k\} \cap \{Z - T \leqslant x\})$

$F_Y(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(\{\mathrm{Ent}(Z)=k\} \cap \{Z \leqslant x+k\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{k \leqslant Z < k+1\} \cap \{Z \leqslant x+k\})$.

Or $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ x+k < k+1$ car $x \in [0,1[$

Alors $F_Y(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(k \leqslant Z \leqslant x+k) = \sum_{k=1}^{+\infty}\big(F_Z(x+k) - F_Z(k)\big)$

Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{\ell=1}^{r} (F_2(x+\ell) - F_2(\ell)) = \sum_{\ell=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{x+\ell+1}{x+\ell}\right) - 1 + \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{\ell+1}{\ell}\right)\right)$$

$$\sum_{\ell=1}^{r} (F_2(x+\ell) - F_2(\ell)) = \left[\sum_{\ell=1}^{r} (\ln(x+\ell) - \ln(x+\ell+1)) + \sum_{\ell=1}^{r} (\ln(\ell+1) - \ln \ell)\right] \times \frac{1}{\ln 2}$$

$$\sum_{\ell=1}^{r} (F_2(x+\ell) - F_2(\ell)) = \left[\ln(x+1) - \ln(x+r+1) + \ln(r+1) - \ln 1\right] \times \frac{1}{\ln 2}.$$

$$\sum_{\ell=1}^{r} (F_2(x+\ell) - F_2(\ell)) = \frac{1}{\ln 2} \ln(x+1) - \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{x+r+1}{r+1}\right)$$

Or $\lim\limits_{r \to +\infty} \left(\ln\left(\frac{x+r+1}{r+1}\right)\right) = \ln 1 = 0$.

Alors $F_Y(x) = \sum\limits_{\ell=1}^{+\infty} (F_2(x+\ell) - F_2(\ell)) = \frac{1}{\ln 2} (x+1)$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \frac{1}{\ln 2} \ln(x+1) & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}.$$

Notons F_X la fonction de répartition de X.

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0 = F_Y(x)$

$\forall x \in [0, 1[,\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{1+t}\,dt = \frac{1}{\ln 2} \left[\ln|1+t|\right]_0^x = \frac{1}{\ln 2} \ln(x+1) = F_Y(x).$

$\forall x \in [1, +\infty[\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = F_X(1) + \int_1^x f(t)\,dt = 1 + 0 = 1 = F_Y(x).$

Donc $F_Y = F_X$. <u>Y suit la même loi que X.</u>

Question 15 ESCP 2010 E. JARDIN $\boxed{\text{F1}}$

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $P(X_n = 1) = p$ et $P(X_n = -1) = q = 1 - p$ $(0 < p < 1)$.

Trouver la loi de $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que la suite Y_n converge en loi.

$\boxed{\text{V1}}$ $Y_n(\Omega) = \{-1, 1\}$. $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathcal{S}_k$ est l'ensemble des parties de $[\![1, n]\!]$ ayant k éléments.

$$\{Y_n = 1\} = \bigcup_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \bigcup_{J \in \mathcal{S}_{2k}} \left[\left(\bigcap_{j\in J} \{X_j = -1\}\right) \cap \left(\bigcap_{j \in \overline{J}} \{X_j = 1\}\right)\right] \ !!!$$

En effet $\{Y_n = 1\}$ se réalise si et seulement si un nombre pair de variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ prennent la valeur -1.

Par incompatibilité :

$$P(Y_n = 1) = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \sum_{J \in \mathcal{S}_{2k}} P\left(\left(\bigcap_{j\in J} \{X_j = -1\}\right) \cap \left(\bigcap_{j\in \overline{J}} \{X_j = 1\}\right)\right)$$

par indépendance

$$P(Y_n = 1) = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \sum_{J \in \mathcal{S}_{2k}} \left(\prod_{j\in J} P(X_j = -1)\right)\left(\prod_{j\in\overline{J}} P(X_j = 1)\right)$$

$$P(Y_n = 1) = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \sum_{J \in \mathcal{S}_{2k}} q^{\operatorname{card} J} \times p^{\operatorname{card} \overline{J}} = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \sum_{J \in \mathcal{S}_{2k}} q^{2k} p^{n-2k}.$$

$\forall k' \in [\![0, n]\!]$, $\operatorname{card} \mathcal{S}_{k'} = \binom{n}{k'}$.

$$P(Y_n = 1) = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} q^{2k} p^{n-2k}$$

$$1 = (p+q)^n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} q^{\ell} p^{n-\ell} = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} q^{2k} p^{n-2k} + \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1} q^{2k+1} p^{n-(2k+1)}$$

$$(p-q)^n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} (-q)^{\ell} p^{n-\ell} = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} q^{2k} p^{n-2k} - \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1} q^{2k+1} p^{n-(2k+1)}$$

En ajoutant il vient : $1 + (p-q)^n = 2\,P(Y_n = 1)$. $\underline{\underline{P(Y_n = 1) = \frac{1}{2}\left(1 + (p-q)^n\right)}}$.

$P(Y_n = -1) = 1 - P(Y_n = 1) = 1 - \frac{1}{2}\left(1 + (p-q)^n\right)$. $\underline{\underline{P(Y_n = -1) = \frac{1}{2}\left(1 - (p-q)^n\right)}}$.

$\boxed{V2}$ Même chose en plus simple. Soit N la variable aléatoire qui compte le nombre de variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ prenant -1. $X_1, X_2, \dots, X_n$ étant indépendantes, N suit la loi binomiale de paramètres n et q.

$\{Y_n = 1\}$ se réalise si et seulement si N prend pour valeur un entier pair de l'intervalle $[\![0, n]\!]$.

Alors $P(Y_n = 1) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} P(N = 2k) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} q^{2k} p^{n-2k} = \dots = \frac{1}{2}\left(1 + (p-q)^n\right)$.

$\uparrow$ voir V1.

$\boxed{V3}$ $Y_n(\Omega) = \{-1, 1\}$. Posons $\alpha = P(Y_n = 1)$.

$E(Y_n) = 1 \times \alpha + (-1)(1-\alpha) = 2\alpha - 1$.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $E(X_i) = 1 \times p + (-1) \times q = p - q$.

Alors $2\alpha - 1 = E(Y_n) = E(X_1 X_2 \cdots X_n) = E(X_1) E(X_2) \cdots E(X_n) = (p-q)^n$.

Ainsi $P(Y_n = 1) = \alpha = \frac{1}{2}\left(1 + (p-q)^n\right)$.

$p \in]0, 1[$. $q = 1 - p \in]0, 1[$. $p - q \in]-1, 1[$. $|p-q| < 1$.

Alors $\lim_{n \to +\infty} (p-q)^n = 0$

Donc $\lim_{n \to +\infty} P(Y_n = 1) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n \to +\infty} P(Y_n = -1) = \frac{1}{2}$.

Alors $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

Question 16 **ESCP 2010** Obtenue par E. JARDIN $\boxed{\textbf{F1}}$

A est une matrice carrée d'ordre n. Pour tout (i,j) appartenant à $[\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = 1$ si $i + j = n + 1$ et 0 sinon.

Déterminer le spectre de A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \unicode{x22F0} & 0 \\ 0 & \unicode{x22F0} & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et f l'endomorphisme de matrice A dans $\mathcal{B}$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f(e_i) = e_{n+1-i}$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f^2(e_i) = f(e_{n+1-i}) = e_{n+1-(n+1-i)} = e_i$.

$f^2 = Id_E$. $A^2 = I_n$. Ainsi $Sp\, A \subset \{-1, 1\}$.

$f\left(\sum_{i=1}^n e_i\right) = \sum_{i=1}^n f(e_i) = \sum_{i=1}^n e_{n+1-i} = \sum_{i=1}^n e_i$ et $\sum_{i=1}^n e_i \neq 0_E$. Donc $1 \in Sp f = Sp A$.

1er cas.. $n = 1$. Alors $\underline{\underline{Sp A = \{1\}}}$.

2e cas.. $n \geqslant 2$ A est symétrique à coefficients réels donc A est diagonalisable.

Ainsi f est diagonalisable. Supposons que $Sp f = Sp A = \{1\}$.

Alors $\mathbb{R}^n = SEP(f, 1) = Ker(f - Id_{\mathbb{R}^n})$. $f = Id_{\mathbb{R}^n}$. $A = I_n$!!

donc $Sp A = Sp f \subset \{-1, 1\}$ et $Sp A = Sp f \neq \{1\}$.

Alors $Sp A = Sp f = \{-1, 1\}$. $\underline{Sp A = \{-1, 1\}}$

Exercice.. Trouver les sous-espaces propres de A (faire deux cas : n pair, n impair).

Question 17 ESCP 2010 F. HUA $\boxed{\text{F 1}}$

Étudier la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-1}-\sqrt{x^2-1}\right)\mathrm{d}x$.

$f : x \mapsto \sqrt[3]{x^3-1} - \sqrt[3]{x^2-1}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

$\forall x \in [1,+\infty[,\quad f(x) = x\left[\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}} - \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right]$.

$\sqrt[3]{1+t} \underset{t\mapsto 0}{=} 1+\frac{1}{3}t+o(t)$; $\sqrt[3]{1-t} \underset{t\mapsto 0}{=} 1-\frac{1}{3}t+o(t)$, $\sqrt[3]{1-z^3} \underset{z\mapsto 0}{=} 1-\frac{1}{3}z^3+o(z^3)$.

$\sqrt{1+t} \underset{t\mapsto 0}{=} 1+\frac{1}{2}t+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}t^2+o(t^2)$; $\sqrt{1-t} \underset{t\mapsto 0}{=} 1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+o(t^2)$.

$\sqrt{1-z^2} \underset{z\mapsto 0}{=} 1-\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{8}z^4+o(z^4)$; $\sqrt[3]{1-z^2} \underset{z\mapsto 0}{=} 1-\frac{1}{2}z^2+o(z^3)$.

Donc $\sqrt[3]{1-z^3} - \sqrt{1-z^2} \underset{z\mapsto 0}{=} +\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^3+o(z^3)$; $\sqrt[3]{1-z^3} - \sqrt{1-z^2} \underset{z\mapsto 0}{\sim} \frac{1}{2}z^2$

Alors $f(x) \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} x \times \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x}$. De plus $\forall x \in [1,+\infty[$, $\frac{1}{2}\,\frac{1}{x} \geqslant 0$ et

$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{2x}$ diverge. Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées

de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

$\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-1} - \sqrt{x^2-1}\right)dx$ diverge.

Question 18 **ESCP 2010** T. VERGER $\boxed{\textbf{F1}}$

f est une application continue de $[a,b]$ $(a<b)$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ si et seulement si f garde un signe constant sur $[a,b]$.

$\ast$ Supposons que f garde un signe constant sur $[a,b]$. Alors $\exists\, \varepsilon \in \{-1,1\}$, $|f| = \varepsilon f$.

$\varepsilon|f| = \varepsilon^2 f = f$. Ainsi $f = \varepsilon|f|$.

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| = \left|\int_a^b \varepsilon|f(t)|dt\right| = |\varepsilon|\left|\int_a^b |f(t)|dt\right| = \left|\int_a^b |f(t)|dt\right| = \int_a^b |f(t)|dt$$

$\uparrow$ $|f|$ est positive et $a<b$.

donc $\left|\int_a^b f(t)dt\right| = \int_a^b |f(t)|dt$.

$\ast$ Supposons que $\left|\int_a^b f(t)dt\right| = \int_a^b |f(t)|dt$. Alors $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b |f(t)|dt$ ou $-\int_a^b |f(t)|dt$

donc $\int_a^b f(t)dt = \varepsilon \int_a^b |f(t)|dt$ avec $\varepsilon \in \{-1,1\}$ ou $\int_a^b |f(t)|dt = \varepsilon\int_a^b f(t)dt$.

Alors $\int_a^b (|f|-\varepsilon f)(t)dt = 0$.

1) $\int_a^b (|f|-\varepsilon f)(t)dt = 0$

2) $a \neq b$

3) $|f|-\varepsilon f$ est continue sur $[a,b]$

4) $|f|-\varepsilon f \geq 0$ car $f \leq |f|$ et $-f \leq |f|$.

Dans ces conditions $|f|-\varepsilon f$ est nulle sur $[a,b]$. $\varepsilon f = |f|$. donc $f = \varepsilon|f|$.

Alors $f \geq 0$ ou $f \leq 0$. f garde un signe constant sur $[a,b]$.

Question 19 **ESCP 2010** K. AFRIAT $\boxed{\textbf{F1}}$

Q1. Montrer que $F : x \to \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Q2. $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant pour fonction de répartition F. Montrer que $(\text{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n) - \ln n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi.

Q1 1) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} F(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} F(x) = 0$.

2) $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. $x \mapsto 1+e^{-x}$ est décroissante et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.

3) F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Cela suffit très largement pour dire que <u>F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.</u>

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $Y_n = \text{Max}(X_1, \ldots, X_n) - \ln n$ et notons F_n la fonction de répartition de Y_n. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$F_{Y_n}(x) = P(\text{Max}(X_1, \ldots X_n) \leqslant x + \ln n) = P(\{X_1 \leqslant x + \ln n\} \cap \ldots \cap \{X_n \leqslant x + \ln n\})$

Par indépendance $F_{Y_n}(x) = P(X_1 \leqslant x + \ln n) \times \cdots \times P(X_n \leqslant x + \ln n)$.

Donc $F_{Y_n}(x) = (F(x+\ln n))^n = \left(\dfrac{1}{1+e^{-x-\ln n}}\right)^n = \dfrac{1}{(1+\frac{1}{n}e^{-x})^n} = e^{-n\ln(1+\frac{1}{n}e^{-x})}$

$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{n} e^{-x} = 0$. $-n\ln(1+\frac{1}{n}e^{-x}) \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} -n\left(\frac{1}{n}e^{-x}\right) = -e^{-x}$

Alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(-n\ln(1+\frac{1}{n}e^{-x})\right) = -e^{-x}$. Par continuité de la fonction exponentielle on obtient : <u>$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} F_{Y_n}(x) = e^{-e^{-x}}$ et ceci pour tout réel x.</u>

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = e^{-e^{-x}}$. Notons que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire ... à densité !

1) $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto -e^{-x}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $G : x \mapsto e^{-e^{-x}}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-e^{-x}) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = 1$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-e^{-x}) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} G(x) = 0$

3) $x \mapsto e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $t \mapsto e^{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Par composition G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Ceci suffit pour dire que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Ainsi la suite de terme général $\max(X_1, X_2, \dots, X_n) - \ln n$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité de fonction de répartition G.

Question 20 **ESCP 2010** J. DIAZ $\boxed{\textbf{F1}}$

Donner les conditions pour que $x \to a\,e^{-|x|}\ln(1+e^{|x|})$ soit une densité de probabilité.

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\,e^{-|x|}\ln(1+e^{|x|})$.

1) f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a \geqslant 0$ car

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-|x|}\ln(1+e^{|x|}) > 0$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = a\int_0^x e^{-t}\ln(1+e^t)\,dt$

$t \mapsto e^t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Cela autorise le changement de variable $u = e^t$ dans ce qui suit.

$$\int_0^x f(t)\,dt \underset{\substack{u=e^t\\ t=\ln u\\ dt=\frac{1}{u}du}}{=} a\int_1^{e^x}\frac{1}{u}\ln(1+u)\,\frac{du}{u} = a\int_1^{e^x}\frac{1}{u^2}\ln(1+u)\,du.$$ En intégrant par parties il vient :

$$\int_0^x f(t)\,dt = a\left[-\frac{1}{u}\ln(1+u)\right]_1^{e^x} - a\int_1^{e^x} -\frac{1}{u}\,\frac{1}{1+u}\,du$$

$$\int_0^x f(t)\,dt = a\left(-\frac{\ln(1+e^x)}{e^x} + \ln 2 + \int_1^{e^x}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)du\right) \quad \cdots\ \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} = \frac{1}{u(u+1)}$$

$$\int_0^x f(t)\,dt = a\left(-\frac{\ln(1+e^x)}{e^x} + \ln 2 + \Big[\ln u - \ln(u+1)\Big]_1^{e^x}\right)$$

$$\int_0^x f(t)\,dt = a\left(-\frac{\ln(1+e^x)}{e^x} + \ln 2 + \ln\frac{e^x}{e^x+1} - \ln\frac{1}{1+1}\right)$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{e^x} = 0$ par croissance comparée et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) = \ln 1 = 0$.

Alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt = a\left(\ln 2 - \ln\frac{1}{2}\right) = 2a\ln 2$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut $2a\ln 2$.

f étant paire : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut $4a\ln 2$. $4a\ln 2 = 1 \iff a = \dfrac{1}{4\ln 2}$

notons que $\dfrac{1}{4\ln 2} > 0$. <u>Plus de doute : f est une densité de probabilité si et seulement si $a = \dfrac{1}{4\ln 2}$.</u>

Question 21 **ESCP 2010** S. ALLAIN $\boxed{\text{F1}}$

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a p valeurs propres distinctes et est diagonalisable. Donnez le degré minimal pour un polynôme annulateur non nul de cette matrice.

Soit A une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$.

* Soit Q un polynôme annulateur non nul de A. Le spectre de A est contenu dans l'ensemble des zéros de Q. Ainsi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont p racines distinctes de Q. Comme Q n'est pas nul nécessairement $\underline{\deg Q \geqslant p}$.

<u>Le degré d'un polynôme annulateur non nul de A est supérieur ou égale à p.</u>

* Posons $R = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_p)$. $\deg R = p$. Montrons que R est un polynôme annulateur de A.

A est semblable à une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

$\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$, $D = P^{-1}AP$. $A = PDP^{-1}$.

$\exists (a_0, a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{K}^{p+1}$, $R = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$.

$$R(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k = \sum_{k=0}^{p} a_k (PDP^{-1})^k = \sum_{k=0}^{p} a_k PD^kP^{-1} = P\Big(\sum_{k=0}^{p} a_k D^k\Big)P^{-1} = PR(D)P^{-1}$$

$D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

$$R(D) = \sum_{k=0}^{p} a_k D^k = \sum_{k=0}^{p} a_k (\mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n))^k = \sum_{k=0}^{p} a_k \,\mathrm{Diag}(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_n^k)$$

$$R(D) = \mathrm{Diag}\Big(\sum_{k=0}^{p} a_k \alpha_1^k, \sum_{k=0}^{p} a_k \alpha_2^k, \dots, \sum_{k=0}^{p} a_k \alpha_n^k\Big) = \mathrm{Diag}(R(\alpha_1), R(\alpha_2), \dots, R(\alpha_n)).$$

Or $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\} = \mathrm{Sp}\,A = \mathrm{Sp}\,D = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont les zéros de R.

Alors $R(\alpha_1) = R(\alpha_2) = \dots = R(\alpha_n) = 0$. Donc $R(D) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Alors $R(A) = P\,0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}P^{-1} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

<u>R est un polynôme annulateur non nul de A de degré p.</u>

<u>Le degré minimal d'un polynôme annulateur non nul d'une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant p valeurs propres distinctes est p.</u>

Question 22 **ESCP 2010** J. MESNILDREY et M. PARIN $\boxed{\text{F2}}$

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de densité f continue sur $[a,b]$ et nulle en dehors de $[a,b]$.

Justifier l'existence d'un réel α tel que $E(|X-\alpha|)$ soit minimale. Que représente α ?

Soit α un réel. Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) = |x-\alpha|$.

- X est une variable aléatoire à densité prenant ses valeurs dans $[a,b]$ et f en est une densité.
- g est continue sur $[a,b]$

Alors $E(|X-\alpha|)$ existe si et ~~seulement~~ si $\int_a^b g(t)f(t)\,dt$ est absolument convergente ... ou convergente $(\forall t \in [a,b],\ g(t)f(t) = |t-\alpha| f(t) \geqslant 0)$.

Or $t \mapsto g(t)f(t)$ est continue sur $[a,b]$ donc $\int_a^b g(t)f(t)\,dt$ converge... absolument.

Alors $E(|X-\alpha|)$ existe et vaut $\int_a^b g(t)f(t)\,dt$ soit $\int_a^b |t-\alpha| f(t)\,dt$.

<u>1er cas</u>.. $\alpha < a$. $E(|X-\alpha|) = \int_a^b (t-\alpha) f(t)\,dt = \int_a^b t f(t)\,dt - \alpha \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b t f(t)\,dt - \alpha$

<u>2e cas</u>.. $\alpha > b$ $E(|X-\alpha|) = \int_a^b (\alpha - t) f(t)\,dt = \alpha - \int_a^b t f(t)\,dt$

<u>3e cas</u>.. $\alpha \in [a,b]$. $E(|X-\alpha|) = \int_a^\alpha (\alpha - t) f(t)\,dt + \int_\alpha^b (t-\alpha) f(t)\,dt$

$$E(|X-\alpha|) = \alpha \int_a^\alpha f(t)\,dt - \int_a^\alpha t f(t)\,dt + \int_\alpha^b t f(t)\,dt - \alpha \int_\alpha^b f(t)\,dt$$

$$E(|X-\alpha|) = \alpha \int_a^\alpha f(t)\,dt - \int_a^\alpha t f(t)\,dt + \int_a^b t f(t)\,dt - \int_a^\alpha t f(t)\,dt - \alpha\left(1 - \int_a^\alpha f(t)\,dt\right)$$

$$E(|X-\alpha|) = 2\alpha \int_a^\alpha f(t)\,dt - 2\int_a^\alpha t f(t)\,dt - \alpha + \int_a^b t f(t)\,dt$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\quad E(|X-\alpha|) = \begin{cases} \int_a^b t f(t)\,dt - \alpha & \text{si } \alpha \in]-\infty, a[\\ 2\alpha \int_a^\alpha f(t)\,dt - 2\int_a^\alpha t f(t)\,dt - \alpha + \int_a^b t f(t)\,dt & \text{si } \alpha \in [a,b] \\ \alpha - \int_a^b t f(t)\,dt & \text{si } \alpha \in]b, +\infty[. \end{cases}$$

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = E(|X-t|)$.

$\forall t \in]-\infty, a[$, $\varphi(t) > \int_a^b t f(t)\,dt - a = \varphi(a)$ et $\forall t \in]b, +\infty[$, $\varphi(t) > b - \int_a^b t f(t)\,dt = \varphi(b)$

$t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto tf(t)$ sont continues sur $[a,b]$.

Alors $\alpha \mapsto \int_c^\alpha f(t)dt$ et $\alpha \mapsto \int_c^\alpha tf(t)dt$ sont de classe C^1 sur $[a,b]$.

Il est alors clair que $t \mapsto 2\alpha\int_c^\alpha f(t)dt - 2\int_c^\alpha tf(t)dt - \alpha + \int_c^b tf(t)dt$ est de classe C^1 sur $[a,b]$. Ainsi φ est de classe C^1 sur $[a,b]$.

En particulier φ est continue sur le compact $[a,b]$. Alors φ admet un minimum sur $[a,b]$. Soit α_0 un point de $[a,b]$ qui réalise ce minimum.

$\forall t \in [a,b]$, $\varphi(t) \geq \varphi(\alpha_0)$. $\forall t \in]-\infty, a[$, $\varphi(t) \geq \varphi(a) \geq \varphi(\alpha_0)$ et $\forall t \in]b, +\infty[$, $\varphi(t) \geq \varphi(b) \geq \varphi(\alpha_0)$. Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) \geq \varphi(t_0)$.

φ possède un minimum sur $\mathbb{R}$. <u>Il existe un réel α tel que $E(|X-\alpha|)$ soit minimal.</u>

• et montrons que le minimum de φ n'est atteint que par des points de $[a,b]$.

Soit ψ la restriction de φ à $[a,b]$. ψ est de classe C^1 sur $[a,b]$.

$\forall \alpha \in [a,b]$, $\psi(t) = 2\alpha\int_a^\alpha f(t)dt - 2\int_c^\alpha tf(t)dt - \alpha + \int_c^b tf(t)dt$

$\forall \alpha \in [a,b]$, $\psi'(t) = 2\int_a^\alpha f(t)dt + 2\alpha f(\alpha) - 2\alpha f(\alpha) - 1 + 0 = 2\int_a^\alpha f(t)dt - 1$.

Alors ψ' est dérivable sur $[a,b]$ et $\forall \alpha \in [a,b]$, $\psi''(\alpha) = 2f(\alpha) \geq 0$.

ψ' est donc croissante sur $[a,b]$. Alors si ψ' s'annule en deux points α_1 et α_2 de $[a,b]$ tels que $\alpha_1 < \alpha_2$ alors ψ' s'annule sur $[\alpha_1, \alpha_2]$.

Notons également que $\psi'(b) = 1$ et $\psi'(a) = -1$

ψ' étant continue, ψ' est strictement positive au voisinage de b et strictement négative au voisinage de a.

ψ réalise donc son minimum en un point de $]a,b[$ donc en un point qui annule sa dérivée.

<u>Le tout</u> suffit pour dire que si $\alpha \in [a,b]$: ψ réalise son minimum en α si et seulement si $\psi'(\alpha) = 0$. Notons F_X la fonction de répartition.

$\forall \alpha \in [a,b]$, $\psi'(\alpha) = 0 \Rightarrow \int_a^\alpha f(t)dt = \frac{1}{2} \iff F_X(\alpha) = \frac{1}{2}$. Notons que $\forall \alpha \in \mathbb{R} - [a,b]$, $F_X(\alpha) \neq \frac{1}{2}$.

<u>$E(|X-\alpha|)$ est minimum si et seulement si α est une médiane de X.</u>

Question 23 **ESCP 2010** L. VIE $\boxed{\textbf{F2}}$

n et p sont deux éléments de $[\![2, +\infty[\![$. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $A^{p-1} \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

On pose $E = \{P(A)\,;\, P \in \mathbb{R}[X]\}$.

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et trouver sa dimension.

- $E \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- $X \in \mathbb{R}[X]$ donc $A \in E$; $E \neq \emptyset$.
- Soit $(B,C) \in E^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\exists (P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, $B = P(A)$ et $C = Q(A)$

$\lambda B + C = \lambda P(A) + Q(A) = (\lambda P + Q)(A)$ et $\lambda P + Q \in \mathbb{R}[X]$ donc $\lambda B + C \in E$.

Ceci achève de montrer que $\underline{\underline{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}}$.

Posons $F = \mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{p-1})$ et montrons que $E = F$.

$\rightarrow$ $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $X^k \in \mathbb{R}[X]$ donc $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $A^k \in E$.

Comme E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $F = \mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{p-1}) \subset E$.

$\rightarrow$ Soit $B \in E$. $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$, $B = Q(A)$.

$\exists r \in \mathbb{N}$, $\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, $Q = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k X^k$.

$$B = Q(A) = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k A^k \underset{\uparrow}{=} \sum_{k=0}^{\min(r,p-1)} \alpha_k A^k \in \mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{p-1}) = F.$$

$\forall i \in [\![p, +\infty[\![$, $A^i = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

$\forall B \in E$, $B \in F$. $E \subset F$. Finalement $\underline{\underline{E = F = \mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{p-1})}}$.

Montrons par l'absurde que la famille $(I_n, A, \dots, A^{p-1})$ est libre. Supposons cette famille liée.

$\exists (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$, $\sum_{k=0}^{p-1} \beta_k A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{p-1}) \neq 0_{\mathbb{R}^p}$.

$\{i \in [\![0, p-1]\!] \mid \beta_i \neq 0\}$ n'est pas vide. Notons i_0 son plus petit élément. $\beta_{i_0} \neq 0$.

$\sum_{k=i_0}^{p-1} \beta_k A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Multiplions par A^{p-1-i_0} $\qquad A^s = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ si $s \geqslant p$

$$0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = \left(\sum_{k=i_0}^{p-1} \beta_k A^k\right) A^{p-1-i_0} = \sum_{k=i_0}^{p-1} \beta_k A^{k+p-1-i_0} \underset{\downarrow}{=} \beta_{i_0} A^{p-1} \text{ et } A^{p-1} \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

donc $\beta_{i_0} = 0$!! $(I_n, A, \dots, A^{p-1})$ est donc une famille libre et génératrice de E de cardinal p. $\underline{\underline{\dim E = p}}$.

Question 24 **ESCP 2010** D. ATTIAS **F1**

On lance une pièce qui donne face avec la probabilité p (où p appartient $]0,1[$). n est entier supérieur ou égal 1. On note : P_n (resp. F_n) la variable aléatoire égale au nombre de piles (resp. faces) obtenus au cours des n premiers lancers. ε est un réel strictement positif.

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{F_n-P_n}{n}-(1-2p)\right|\leqslant\varepsilon\right)=1$.

- Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $X_n=\dfrac{F_n-P_n}{n}$. $X_n=\dfrac{(n-P_n)-P_n}{n}=1-\dfrac{2P_n}{n}$. Posons $q=1-p$.

$P_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. $E(P_n)$ (resp. $V(P_n)$) existe et vaut np (resp. npq)

Alors $E(X_n)$ existe et vaut $1-\frac{2}{n}\times np$ donc $1-2p$ et $V(X_n)$ existe et vaut $\left(-\frac{2}{n}\right)^2\times npq$ donc $\dfrac{4pq}{n}$.

- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0\leqslant P(|X_n-E(X_n)|>\varepsilon)\leqslant\dfrac{V(X_n)}{\varepsilon^2}$. Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{V(X_n)}{\varepsilon^2}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4pq}{n\varepsilon^2}\right)=0$.

Par encadrement on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(|X_n-E(X_n)|>\varepsilon)=0$.

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(|X_n-E(X_n)|\leqslant\varepsilon)=\lim_{n\to+\infty}\left(1-P(|X_n-E(X_n)|>\varepsilon)\right)=1$.

Finalement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{F_n-P_n}{n}-(1-2p)\right|\leqslant\varepsilon\right)=1$.

Question 25 ESCP 2010 G. PECORARI F1

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. Les boules numérotées de 1 à k sont rouges et les autres blanches ($1 < k < n$).

On effectue n tirages successifs et sans remise d'une boule dans l'urne. Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, X_i est la variable aléatoire égale à 1 si on tire une boule rouge au $i^{\text{ème}}$ tirage et 0 sinon.

Trouver la loi de X_i, $E(X_i)$, $V(X_i)$.

Écrire une fonction en Turbo-Pascal qui simule la variable aléaoire X_i.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $P(X_i=1) = \dfrac{\operatorname{card}(X_i=1)}{n!} = \dfrac{\overset{(1)}{k} \times \overset{(2)}{(n-1)!}}{n!} = \dfrac{k}{n}$.

(1) : choix de la boule rouge au i^{e} tirage ; (2) : choix d'une boule pour les $n-1$ autres tirages

X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{k}{n}$. $E(X_i) = \dfrac{k}{n}$ et $V(X_i) = \dfrac{k}{n}\left(1 - \dfrac{k}{n}\right)$.

```
Function simule(n,i,k:integer):integer;

var j,r,t:integer;

begin

r:=k;t:=n;

For j:=1 to i-1 do

        begin
        If random(t)+1<=r then r:=r-1;
        t:=t-1;
        end;

If random(t)+1<=r then simule:=1 else simule:=0;

end;
```

- r contient le nombre de boules rouges après chaque tirage
- t contient le nombre de boules dans l'urne après chaque tirage.

Si l'urne contient t boules dont r rouges, pour simuler le tirage d'une boule de cette urne on choisit un entier au hasard dans $[\![1,t]\!]$. S'il est inférieur ou égal à r on considère que l'on a obtenu une boule rouge, sinon on a obtenu une boule blanche.

On fait d'abord $i-1$ tirages en retranchant 1 à t à chaque fois et en retranchant 1 à r lorsque l'on obtient une boule rouge.

On fait alors le i^{e} tirage. S'il donne une boule rouge on renvoie la valeur 1 sinon on renvoie la valeur 0.