

F 1 Assez simple ou proche du cours.

F 2 Demande du travail.

F 3 Délicat.

Question 1 ESCP 2011 **F1**

Q1. Montrer que la fonction $F : x \rightarrow \frac{1}{1 + e^{-x}}$ vérifie les propriétés d'une fonction de répartition.

Q2. Déterminer la loi de la borne supérieure M_n de n variables aléatoires indépendantes de même loi de fonction de répartition F .

Q3. Étudier la convergence en loi de la suite $(M_n - \ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Question 2 ESCP 2011 **F1⁻**

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} .

Q1. Montrer que pour tout réel u tel que $|u| \leq 1$, $E(u^X)$ existe.

Q2. Montrer que pour tout réel u tel que $|u| < 1$: $\frac{1 - E(u^X)}{1 - u} = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) u^k$.

Question 3 ESCP 2011 **F1⁺**

Soit N une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{A}, P) à valeurs dans \mathbb{N} . On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(N = n)$.

Soit X une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{A}, P) à valeurs dans \mathbb{N} telle que, pour tout n dans \mathbb{N} , la loi conditionnelle de X sachant que $[N = n]$ est la loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, n\}$.

Q1. Comparer la loi de X et celle de $N - X$.

Q2. Si N suit la loi géométrique de paramètre p , calculer $E(X)$.

Question 4 ESCP 2011 **F1⁻**

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{Z}^* , telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = -n) = P(X = n) = \frac{1}{2n(n+1)}$.

Pour tout n dans \mathbb{N}^* , on note A_n l'événement $[(X = -n) \cup (X = n)]$.

Montrer que, pour tout n dans \mathbb{N}^* , la variable aléatoire X admet une espérance conditionnelle relatives à A_n .

Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} E_{A_n}(X) P(A_n)$ ou $\sum_{n \geq 1} E(X | A_n) P(A_n)$.

La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

Déjà donné en 2009

Question 5 ESCP 2011 **F2**

Soient trois nombres complexes a, b, c . Calculer A^7 avec : $A = \begin{pmatrix} 1 + i\sqrt{3} & a & b \\ 0 & 1 - i\sqrt{3} & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Question 6 ESCP 2011 **F1**

$A = (a_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 1$ et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{i,i} > 1$.

Montrer que A est matrice définie positive, c'est à dire que A est symétrique réelle telle que pour tout élément non nul X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX > 0$.

Question 7 ESCP 2011 F1-

Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ ne sont pas supplémentaires.

A-t-on : $\text{Ker } f \subset \text{Im } f$ ou $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$?

Question 8 ESCP 2011 F2

Soient a et b deux réels et f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b + |x|$.

Q1. A quelle condition sur a et b la fonction f est-elle bijective ?

Q2. On suppose cette condition remplie. Calculer $f^{-1}(y)$ en fonction de y .

Question 9 ESCP 2011 F1

f est une application continue de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} telle que $\forall x \in [0, +\infty[$, $0 \leq f(x) \leq \int_0^x f(t) dt$.

On pose : $\forall x \in [0, +\infty[$, $h(x) = e^{-x} \int_0^x f(t) dt$.

Q1. Montrer que la fonction h est décroissante.

Q2. En déduire que la fonction f est identiquement nulle.

Question 10 ESCP 2011 F1

a est un réel et f est une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^2 telle que $\text{Sup}_{t \in \mathbb{R}} |f''(t)|$ existe. On pose $M = \text{Sup}_{t \in \mathbb{R}} |f''(t)|$.

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \int_a^{a+x} f(u) du - x f\left(a + \frac{x}{2}\right)$.

Q1. Interpréter géométriquement le nombre $G(x)$, pour f positive et $x > 0$.

Q2. Montrer que G est dérivable sur \mathbb{R} et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|G'(x)| \leq M \frac{x^2}{4}$... ou $\forall x \in \mathbb{R}$, $|G'(x)| \leq M \frac{x^2}{8}$.

Q3. En déduire que pour tout x dans \mathbb{R} , $|G(x)| \leq M \frac{|x|^3}{12}$.

Question 1 ESCP 2011

Q1. Montrer que la fonction $F: x \rightarrow \frac{1}{1+e^{-x}}$ vérifie les propriétés d'une fonction de répartition.

Q2. Déterminer la loi de la borne supérieure M_n de n variables aléatoires indépendantes de même loi de fonction de répartition F .

Q3. Étudier la convergence en loi de la suite $(M_n - \ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Q1) F est une fonction de répartition si et seulement si

1) F est croissante sur \mathbb{R} .

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$

3) F est continue à droite en tout point de \mathbb{R} .

Notons que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = - \frac{(-e^{-x})}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0.$$

F est croissante sur \mathbb{R} .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0.$$

F est continue à droite en tout point de \mathbb{R} .

Remarques. - 1) - Il est inutile de vérifier que F prend ses valeurs dans $[0, 1]$ car cela résulte de deux premiers points.

2) F est continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} donc sur \mathbb{R} privé d'un ensemble fini de points ! Alors F est la fonction de répartition d'une variable

aléatoire à densité. $f: x \mapsto \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ est une densité définie sur \mathbb{R} .

Q2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient X_1, X_2, \dots, X_n n variables aléatoires sur (Ω, \mathcal{G}, P) indépendantes et de fonction de répartition F . Posons $M_n = \sup(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\pi_n^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid M_n(\omega) \leq x\} = \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in \{1, n\} X_i(\omega) \leq x\}$

$$\pi_n^{-1}((-\infty, x]) = \bigcap_{i=1}^n X_i^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{G}.$$

↑ Pour tout $i \in \{1, n\}$, X_i est une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{G}) et \mathcal{G} est stable pour l'intersection.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \pi_n^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{G}.$$

M_n est une variable aléatoire réelle sur (Ω, \mathcal{G}) ... et sur (Ω, \mathcal{G}, P) .

Notons F_n la fonction de répartition de Π_n .

X_1, X_2, \dots, X_n i.i.d. de Poisson

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = P(\Pi_n^{-1}(-\infty, x]) = P\left(\prod_{i=1}^n X_i^{-1}(-\infty, x]\right) \stackrel{\downarrow}{=} \prod_{i=1}^n P(X_i^{-1}(-\infty, x]) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = \prod_{i=1}^n F(x) = (F(x))^n = \frac{1}{(1+e^{-x})^n}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = \frac{1}{(1+e^{-x})^n}$$

F_n est de classe \mathcal{B}' sur \mathbb{R} dacs Π_n est une variable aléatoire à densité et

$$F_n' \text{ est une densité définie sur } \mathbb{R}. \text{ Notons que } \forall x \in \mathbb{R}, F_n'(x) = \frac{ne^{-x}}{(1+e^{-x})^{n+1}}$$

Q3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\Pi_n - h_n$ est une variable aléatoire à densité. Notons G_n la fonction de répartition. $\forall x \in \mathbb{R}, G_n(x) = P(\Pi_n - h_n \leq x) = P(\Pi_n \leq x + h_n) = F_n(x + h_n)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, G_n(x) = \frac{1}{(1+e^{-(x+h_n)})^n} = \frac{1}{(1+e^{x/n})^n} = \frac{1}{e^{nh} (1+e^{x/n})^n}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} = 0; \quad nh(1+e^{x/n})^n \sim n \frac{e^{-x}}{n} = e^{-x}. \text{ Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} (nh(1+e^{x/n})^n) = e^{-x}.$$

$$\text{dacs } \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \frac{1}{e^{-x}} = e^{-e^{-x}}. \text{ Posons } \forall x \in \mathbb{R}, G(x) = e^{-e^{-x}}.$$

$x \mapsto e^{-x}$ est décroissant sur \mathbb{R} . Alors $x \mapsto -e^{-x}$ est croissant sur \mathbb{R} .

dacs $x \mapsto e^{-e^{-x}}$ est croissant sur \mathbb{R} . G est croissant sur \mathbb{R} .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-e^{-x}}) = 0 \text{ dacs } \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 1. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^{-x}) = -\infty \text{ dacs } \lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = 0.$$

G est de classe \mathcal{B}' sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = e^{-x} e^{-e^{-x}}$.

Ceci suffit pour dire que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité $x \mapsto e^{-x} e^{-e^{-x}}$.

Alors $(\Pi_n - h_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité de densité $x \mapsto e^{-x} e^{-e^{-x}}$.

Question 2 ESCP 2011

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} .

Q1. Montrer que pour tout réel u tel que $|u| \leq 1$, $E(u^X)$ existe.

Q2. Montrer que pour tout réel u tel que $|u| < 1$: $\frac{1 - E(u^X)}{1 - u} = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) u^k$.

Q1) Soit u un réel tel que $|u| \leq 1$.

• $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |u^n P(X=n)| = |u|^n P(X=n) \leq P(X=n)$.

• la série de terme général $P(X=n)$ converge

La règle de comparaison des séries à termes positifs montre que la série de terme général $|u^n P(X=n)|$ converge.

Alors la série de terme général $u^n P(X=n)$ est absolument convergente.

Le théorème de transfert permet alors de dire que $E(u^X)$ existe.

Q2) Soit u un réel tel que $|u| < 1$.

• $\forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq |P(X > k) u^k| = P(X > k) |u|^k \leq |u|^k$.

• La série de terme général $|u|^k$ converge car $|u| < 1$.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $P(X > k) u^k$ est absolument convergente donc convergente.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=0}^r P(X=k) u^k = \sum_{k=0}^r [P(X > k-1) - P(X > k)] u^k = \sum_{k=0}^r P(X > k-1) u^k - \sum_{k=0}^r P(X > k) u^k$$

$$\sum_{k=0}^r P(X=k) u^k = \sum_{k=-1}^{r-1} P(X > k) u^{k+1} - \sum_{k=0}^r P(X > k) u^k = \underbrace{P(X > -1)}_{=1} + u \sum_{k=0}^{r-1} P(X > k) u^k - \sum_{k=0}^r P(X > k) u^k$$

En faisant tendre r vers $+\infty$ (voir) :

$$E(u^X) = 1 + u \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) u^k - \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) u^k = 1 - (1-u) \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) u^k$$

Alors $\frac{1 - E(u^X)}{1 - u} = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) u^k$.

Question 3 ESCP 2011

Soit N une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{A}, P) à valeurs dans \mathbb{N} . On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = P(N = n)$.

Soit X une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{A}, P) à valeurs dans \mathbb{N} telle que, pour tout n dans $N(\Omega)$, la loi conditionnelle de X sachant que $[N = n]$ est la loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, n\}$.

Q1. Comparer la loi de X et celle de $N - X$.

Q2. Si N suit la loi géométrique de paramètre p , calculer $E(X)$.

Q1 Soit $k \in \mathbb{N}$. $([N = n])_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements
 donc $P(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{X = k\} \cap \{N = n\})$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1^{er} cas... $P(N = n) \neq 0$.

$$\text{Alors } P(\{X = k\} \cap \{N = n\}) = P(N = n) P_{\{N = n\}}(X = k) = p_n P_{\{N = n\}}(X = k).$$

$$P(\{X = k\} \cap \{N = n\}) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} p_n & k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2nd cas... $P(N = n) = 0$. $p_n = 0$.

$$\text{Alors } 0 \leq P(\{X = k\} \cap \{N = n\}) \leq P(N = n) = 0 \\ \{X = k\} \cap \{N = n\} \subset \{N = n\}$$

$$\text{donc } P(\{X = k\} \cap \{N = n\}) = 0.$$

$$\text{Rien n'empêche d'écrire : } P(\{X = k\} \cap \{N = n\}) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} p_n & k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} !!$$

$$\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}, P(\{X = k\} \cap \{N = n\}) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} p_n & k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{donc } P(X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} p_n \text{ et ceci pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Noter que $N - X$ prend ses valeurs dans \mathbb{N} car X ne peut pas prendre une valeur supérieure à celle prise par N .

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(N-X=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{N-X=k\} \cap \{N=n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{X=n-k\} \cap \{N=n\})$$

Soit $k \in \mathbb{N}$.

D'après ce qui précède $P(\{X=n-k\} \cap \{N=n\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n-k \notin \llbracket 0, n \rrbracket \\ \frac{1}{n+1} P_n & \text{si } n-k \in \llbracket 0, n \rrbracket \end{cases}$ et ceci pour tout n dans \mathbb{N} .

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(\{X=n-k\} \cap \{N=n\}) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} P_n & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \forall k \in \mathbb{N}, P(N-X=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P_n.$$

X et N-X ont même loi.

Q2) montrons que $E(X)$ existe. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = p q^{n-1}$ et $P_0 = 0$. $q = 1-p$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} P_n \leq P_n \quad \text{soit } k \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Alors } \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P_n \leq \sum_{n=k}^{+\infty} P_n \quad \text{car les deux séries convergent.}$$

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P_n \leq \sum_{n=k}^{+\infty} P q^{n-1} = P q^{k-1} \times \frac{1}{1-p} = q^{k-1}$$

$$\text{Donc } 0 \leq k P(X=k) = k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P_n \leq k q^{k-1}$$

Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq |k P(X=k)| \leq k q^{k-1}$ La convergence de la

série de terme général $k q^{k-1}$ et les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $|k P(X=k)|$ converge.

La série de terme général $k P(X=k)$ est absolument convergente.

Donc X possède une espérance. N-X ayant même loi que X, $E(N-X)$ existe

et vaut $E(X)$. $E(X) = E(N-X) = E(N) - E(X)$ car $E(N)$ et $E(X)$ existent.

$$\text{Alors } \underline{\underline{E(X) = \frac{1}{2} E(N)}} \quad \underline{\underline{E(X) = \frac{1}{2p}}}$$

Question 4 ESCP 2011

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{Z}^* , telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = -n) = P(X = n) = \frac{1}{2n(n+1)}$.

Pour tout n dans \mathbb{N}^* , on note A_n l'événement $[(X = -n) \cup (X = n)]$.

Montrer que, pour tout n dans \mathbb{N}^* , la variable aléatoire X admet une espérance conditionnelle relatives à A_n .

Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} E_{A_n}(X) P(A_n)$

La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

oéjà donné en 2009.

$$\text{Soit } k \in \mathbb{Z}^*. \quad P_{A_n}(X = k) = \frac{P(A_n \cap \{X = k\})}{P(A_n)} = \frac{P(\{X = -n\} \cup \{X = n\} \cap \{X = k\})}{P(A_n)}$$

$$P(A_n) = P(\{X = -n\} \cup \{X = n\}) = P(X = -n) + P(X = n) = 2 \times \frac{1}{2n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$\{X = -n\} \cap \{X = n\} = \emptyset \text{ car } n \in \mathbb{Z}^*$

$$P(\{X = -n\} \cup \{X = n\} \cap \{X = k\}) = \begin{cases} P(X = -n) & \text{si } k = -n \\ P(X = n) & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$P(\{X = -n\} \cup \{X = n\} \cap \{X = k\}) = \begin{cases} \frac{1}{2n(n+1)} & \text{si } k \in \{-n, n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Alors } P_{A_n}(X = k) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } k \in \{-n, n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

la loi de X sachant A_n est la loi uniforme sur $\{-n, n\}$

$$\text{Donc } E(X|A_n) \text{ existe et } E(X|A_n) = -n P_{A_n}(X = -n) + n P_{A_n}(X = n) = -n \times \frac{1}{2} + n \times \frac{1}{2} = 0.$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $E(X|A_n)$ existe et vaut 0.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(X|A_n) P(A_n) = 0$ donc la série de terme général $E(X|A_n) P(A_n)$ converge

$E(X)$ existe soit $\sum_{n=1}^{+\infty} |n P(X = n)|$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} |n P(X = -n)|$ existent.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|n P(X = n)| = \frac{n}{2n(n+1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{n+1}$ et la série de terme général $\frac{1}{2} \frac{1}{n+1}$ diverge.

Alors X n'a pas d'espérance.

Remarque.- Rappel. X est une variable aléatoire discrète sur (Ω, \mathcal{G}, P) et $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements. $I' = \{i \in I \mid P(A_i) \neq 0\}$.

$E(X)$ existe si et seulement si \forall pour tout $i \in I'$, $E(X|A_i)$ (ou $E(X|A_i)$) existe

$$\text{et } \sum_{i \in I'} E(X|A_i) P(A_i) \text{ existe.}$$

si $E(X)$ existe : $E(X) = \sum_{i \in I'} E(X|A_i) P(A_i)$.

d'exercice précédent montre que la valeur absolue est essentielle dans le point 2... qu'on se le dise.

Question 5 ESCP 2011

Soient trois nombres complexes a, b, c . Calculer A^7 avec : $A = \begin{pmatrix} 1+i\sqrt{3} & a & b \\ 0 & 1-i\sqrt{3} & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

V1 Posons $\alpha = 1+i\sqrt{3}$. $\alpha = 2e^{i\pi/3}$. $A = \begin{pmatrix} \alpha & a & b \\ 0 & \bar{\alpha} & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & a & b \\ 0 & \bar{\alpha} & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & a & b \\ 0 & \bar{\alpha} & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & a(\alpha+\bar{\alpha}) & \alpha b + a c + 2b \\ 0 & \bar{\alpha}^2 & \bar{\alpha} c + 2c \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

Notons que $a(\alpha+\bar{\alpha}) = 2a$ et $\bar{\alpha}c + 2c = c(3-i\sqrt{3})$. Posons $d = \alpha b + a c + 2b$.

$$\text{Alors } A^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2a & d \\ 0 & \bar{\alpha}^2 & c(3-i\sqrt{3}) \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2a & d \\ 0 & \bar{\alpha}^2 & c(3-i\sqrt{3}) \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & a & b \\ 0 & \bar{\alpha} & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^3 & a(\alpha^2+\bar{\alpha}) & \alpha d + 2a c + 2d \\ 0 & \bar{\alpha}^3 & c(\bar{\alpha}^2+6-4i\sqrt{3}) \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}$$

Notons que $a(\alpha^2+\bar{\alpha}) = a(1-3+2i\sqrt{3}+2-i\sqrt{3}) = 0$.

Posons alors $e = \alpha d + 2a c + 2d$ et $f = c(\bar{\alpha}^2+6-4i\sqrt{3})$.

Remarquons encore que : $\alpha^3 = (2e^{i\pi/3})^3 = 2^3 e^{i\pi} = -2^3$. Alors $\bar{\alpha}^3 = -2^3$.

$$\text{Ainsi } A^3 = \begin{pmatrix} -2^3 & 0 & e \\ 0 & -2^3 & f \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}, \text{ donc } A^6 = \begin{pmatrix} -2^3 & 0 & e \\ 0 & -2^3 & f \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2^3 & 0 & e \\ 0 & -2^3 & f \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^6 & 0 & 0 \\ 0 & 2^6 & 0 \\ 0 & 0 & 2^6 \end{pmatrix} = 2^6 I_3.$$

Alors $A^7 = 2^6 A$.

V2 $\text{Sp}_{\mathbb{C}} A = \{\alpha, \bar{\alpha}, 2\}$ car A est triangulaire supérieure. A possède trois valeurs propres distinctes $\alpha, \bar{\alpha}$ et 2 dans \mathbb{C} . Alors A est diagonalisable.

Il existe une matrice inversible P de $M_3(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = \text{Diag}(\alpha, \bar{\alpha}, 2)$.

$$A = P \text{Diag}(\alpha, \bar{\alpha}, 2) P^{-1}; A^6 = P \text{Diag}(\alpha^6, \bar{\alpha}^6, 2^6) P^{-1}$$

$$\text{or } \alpha^6 = (2e^{i\pi/3})^6 = 2^6 e^{i2\pi} = 2^6. \text{ Alors } \bar{\alpha}^6 = 2^6. \text{ donc } \text{Diag}(\alpha^6, \bar{\alpha}^6, 2^6) = 2^6 I_3.$$

$$A^6 = P (2^6 I_3) P^{-1} = 2^6 P I_3 P^{-1} = 2^6 I_3.$$

On retrouve $A^7 = 2^6 A$.

Question 6 ESCP 2011

$A = (a_{i,j})$ est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in [1,n]^2$, $i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 1$ et $\forall i \in [1,n]$, $a_{i,i} > 1$.

Montrer que A est matrice définie positive, c'est à dire que A est symétrique réelle telle que pour tout élément non nul X de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t X A X > 0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément non nul de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $Y = AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

$${}^t X A X = \sum_{i=1}^n x_i y_i \text{ et } \forall i \in [1,n], y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = a_{i,i} x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n x_j.$$

$${}^t X A X = \sum_{i=1}^n \left[a_{i,i} x_i^2 + x_i \sum_{j=1, j \neq i}^n x_j \right] = \sum_{i=1}^n \left[(a_{i,i} - 1) x_i^2 + x_i \sum_{j=1}^n x_j \right].$$

$${}^t X A X = \sum_{i=1}^n (a_{i,i} - 1) x_i^2 + \sum_{i=1}^n \left(x_i \sum_{j=1}^n x_j \right) = \sum_{i=1}^n (a_{i,i} - 1) x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j \right).$$

$${}^t X A X = \sum_{i=1}^n (a_{i,i} - 1) x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \geq 0 \quad \uparrow \forall i \in [1,n], a_{i,i} - 1 > 0 \text{ et } x_i^2 \geq 0.$$

Supposons que ${}^t X A X = 0$.

$$\text{Alors } \sum_{i=1}^n (a_{i,i} - 1) x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = 0 \text{ car } \sum_{i=1}^n (a_{i,i} - 1) x_i^2 \geq 0 \text{ et } \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \geq 0$$

$$\text{et } \forall i \in [1,n], (a_{i,i} - 1) x_i^2 \geq 0.$$

$$\text{Or } \forall i \in [1,n], (a_{i,i} - 1) x_i^2 = 0 \text{ et } a_{i,i} - 1 > 0.$$

Alors $\forall i \in [1,n], x_i^2 = 0$. Ce qui donne $\forall i \in [1,n], x_i = 0$. $X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. Ceci contredit l'hypothèse.

$$\text{Or } {}^t X A X \geq 0 \text{ et } {}^t X A X \neq 0. \text{ Ainsi } {}^t X A X > 0.$$

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\}, {}^t X A X > 0.$$

De plus $\forall (i,j) \in [1,n]^2$, $a_{j,i} = a_{i,j}$. A est symétrique.

\uparrow d'ailleurs $i=j$ et $i \neq j$ $a_{j,i} = 1 = a_{i,j}$

A est une matrice définie positive.

Question 7 ESCP 2011

Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ ne sont pas supplémentaires.

A-t-on : $\text{Ker } f \subset \text{Im } f$ ou $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$?

Supposons que $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ ne sont pas supplémentaires.

Comme $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^3 = 3$: $\text{Ker } f \cap \text{Im } f \neq \{0\}$.

Alors il existe a non nul tel que $a \in \text{Ker } f$ et $a \in \text{Im } f$.

Soit $\dim \text{Ker } f \geq 1$ et $\dim \text{Im } f \geq 1$. A $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = 3$.

Soit ces conditions ($\dim \text{Ker } f = 1$ et $\dim \text{Im } f = 2$) ou ($\dim \text{Ker } f = 2$ et $\dim \text{Im } f = 1$).

1^{ère} cas... $\dim \text{Ker } f = 1$ et $\dim \text{Im } f = 2$.

$\text{Vect}(a) \subset \text{Ker } f$ et $\text{Vect}(a) \subset \text{Im } f$. A $\dim \text{Vect}(a) = 1 = \dim \text{Ker } f$.

Alors $\text{Ker } f = \text{Vect}(a) \subset \text{Im } f$.

2^{ème} cas... $\dim \text{Ker } f = 2$ et $\dim \text{Im } f = 1$.

$\text{Vect}(a) \subset \text{Ker } f$ et $\text{Vect}(a) \subset \text{Im } f$. A $\dim \text{Vect}(a) = 1 = \dim \text{Im } f$.

Alors $\text{Im } f = \text{Vect}(a) \subset \text{Ker } f$.

Soit $\text{Ker } f \subset \text{Im } f$ ou $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$.

Question 8 ESCP 2011

Soient a et b deux réels et f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b + |x|$.

Q1. A quelle condition sur a et b la fonction f est-elle bijective ?

Q2. On suppose cette condition remplie. Calculer $f^{-1}(y)$ en fonction de y .

et $\textcircled{Q1}$ $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} (a+1)x + b & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ (a-1)x + b & \text{si } x \in]-\infty, 0[\text{ ou }]-\infty, 0] \end{cases}$

1^{er} Cas... $a = 1$. Alors $\forall x \in]-\infty, 0[, f(x) = b$. f n'est pas bijective.

2^{em} Cas... $a = -1$. Alors $\forall x \in [0, +\infty[, f(x) = b$. f n'est pas bijective.

3^{em} Cas... $a \in]-\infty, -1[$.

$a+1 < 0$ et $a-1 < 0$. f est donc strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$ et sur

$[0, +\infty[$. f est strictement décroissante sur \mathbb{R} . f est donc continue sur \mathbb{R} .

Ajouter que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Il suffit donc de dire que f est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

$f(0) = b$ et f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

Alors $\forall x \in]-\infty, 0], f(x) \geq f(0) = b$ et $\forall x \in [0, +\infty[, f(x) \leq f(0) = b$.

Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $x = f^{-1}(y)$. $f(x) = y$.

1^{er} Cas $y \in [b, +\infty[$. Alors $x \in]-\infty, 0]$. $y = f(x) = (a-1)x + b$.

$$\text{d'où } f^{-1}(y) = x = \frac{y-b}{a-1}$$

2^{em} Cas $y \in]-\infty, b[$. Alors $x \in]0, +\infty[$. $y = f(x) = (a+1)x + b$.

$$\text{d'où } f^{-1}(y) = x = \frac{y-b}{a+1}$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y-b}{a-1} & \text{si } y \in [b, +\infty[\\ \frac{y-b}{a+1} & \text{si } y \in]-\infty, b[\end{cases}$$

4^{ème} cas.. $a \in]1, 1[$. $a+1 > 0$ et $a-1 < 0$. f est strictement décroissante sur $] -\infty, 0[$ et strictement croissante sur $] 0, +\infty[$.

de plus f est continue sur $] -\infty, 0[$ et sur $] 0, +\infty[$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

La restriction de f à $] -\infty, 0[$ (resp. $] 0, +\infty[$) définit une bijection de $] -\infty, 0[$ (resp. $] 0, +\infty[$) sur $] b, +\infty[$ (resp. $] b, +\infty[$).

Soit $y \in] b, +\infty[$. $\exists ! x_1 \in] 0, +\infty[$, $f(x_1) = y$. $x_1 \neq 0$ car $y \neq b$

$\exists ! x_2 \in] -\infty, 0[$, $f(x_2) = y$. $x_2 \neq 0$ car $y \neq b$.

Alors $x_1 > 0$, $x_2 < 0$ et $f(x_1) = f(x_2)$. f n'est pas injective. f n'est pas bijective

5^{ème} cas.. $a \in]1, +\infty[$. $a+1 > 0$ et $a-1 > 0$. f est strictement croissante sur $] -\infty, 0[$ et sur $] 0, +\infty[$.

Alors f est strictement croissante sur \mathbb{R} . f est continue sur \mathbb{R} . De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Alors f est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

$f(0) = b$ et f est strictement croissante sur \mathbb{R} . $\forall x \in] -\infty, 0[$, $f(x) \leq f(0) = b$ et

$\forall x \in] 0, +\infty[$, $f(x) \geq f(0) = b$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $x = f^{-1}(y)$. $f(x) = y$.

1^{er} cas.. $y \in] b, +\infty[$. Alors $x \in] 0, +\infty[$. $y = f(x) = (a+1)x + b$; $f^{-1}(y) = x = \frac{y-b}{a+1}$.

2^{ème} cas.. $y \in] -\infty, b[$. Alors $x \in] -\infty, 0[$. $y = f(x) = (a-1)x + b$; $f^{-1}(y) = x = \frac{y-b}{a-1}$.

Donc $\forall y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y-b}{a+1} & \text{si } y \in] b, +\infty[\\ \frac{y-b}{a-1} & \text{si } y \in] -\infty, b[\end{cases}$

Question 9 ESCP 2011

f est une application continue de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} telle que $\forall x \in [0, +\infty[$, $0 \leq f(x) \leq \int_0^x f(t) dt$.

On pose : $\forall x \in [0, +\infty[$, $h(x) = e^{-x} \int_0^x f(t) dt$.

Q1. Montrer que la fonction h est décroissante.

Q2. En déduire que la fonction f est identiquement nulle.

Q1) $g: x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est primitive de f sur $[0, +\infty[$ qui prend la valeur 0 à 0

(f est continue sur $[0, +\infty[$). Ainsi g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $g' = f$.

Le produit h est dérivable sur $[0, +\infty[$ car $u = e^{-x}$ et g sont dérivables sur $[0, +\infty[$.

$$\forall x \in [0, +\infty[, h'(x) = -e^{-x} \int_0^x f(t) dt + e^{-x} f(x) = -e^{-x} \left[\int_0^x f(t) dt - f(x) \right]$$

Or pour $\forall x \in [0, +\infty[, -e^{-x} \leq 0$ et $\int_0^x f(t) dt - f(x) \geq 0$.

Alors $\forall x \in [0, +\infty[, h'(x) \leq 0$. h est décroissante sur $[0, +\infty[$

Q2) . h est décroissante sur $[0, +\infty[$ et $h(0) = 0$. Alors $\forall x \in [0, +\infty[, h(x) \leq 0$.

$$\forall x \in [0, +\infty[, e^{-x} \int_0^x f(t) dt \leq 0 \text{ et } e^{-x} > 0.$$

Donc $\forall x \in [0, +\infty[, \int_0^x f(t) dt \leq 0$. Or $\forall x \in [0, +\infty[, \int_0^x f(t) dt \geq \int_0^x f(x) dt \geq 0$.

Ainsi $\forall x \in [0, +\infty[, \int_0^x f(t) dt = 0$. Alors $\forall x \in [0, +\infty[, 0 \leq f(x) \leq 0$.

$\forall x \in [0, +\infty[, f(x) = 0$. f est identiquement nulle.

Question 10 ESCP 2011

a est un réel et f est une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe C^2 telle que $\sup_{t \in \mathbb{R}} |f''(t)|$ existe. On pose $\pi = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f''(t)|$.

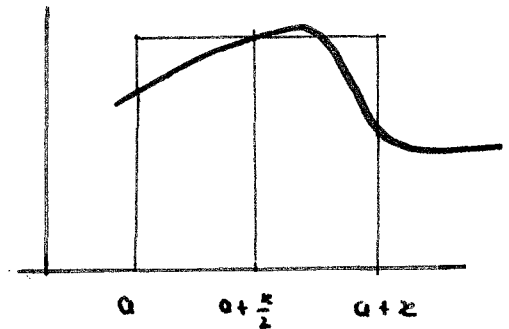
On pose: $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \int_a^{a+x} f(u) du - x f\left(a + \frac{x}{2}\right)$.

Q1. Interpréter géométriquement le nombre $G(x)$, pour f positive et $x > 0$.

Q2. Montrer que G est dérivable sur \mathbb{R} et que $\forall x \in \mathbb{R}, |G'(x)| \leq M \frac{x^2}{4}$... ou $|G'(x)| \leq \pi \frac{x^2}{8}$.

Q3. En déduire que pour tout x dans $\mathbb{R}, |G(x)| \leq M \frac{|x|^3}{12}$.

Q1) $G(x)$ est la différence entre l'aire de l'application de f limitée par \mathcal{B}_f et la droite d'équation $x=a, x=a+x$ et $y=0$, et l'aire du rectangle limité par les droites d'équation $x=a, x=a+x, y=0$ et $y=f\left(a+\frac{x}{2}\right)$.



$G(x)$ est l'erreur que l'on commet en remplaçant $\int_a^{a+x} f(u) du$ par $\int_a^{a+x} g(u) du$ où g est la fonction constante qui coïncide avec f au milieu de l'arc $[a, a+x]$. Ce qui est en relation avec "la méthode des points moyens" qui donne une valeur approchée d'une intégrale.

Q2) Soit F une primitive de f sur \mathbb{R} . F est de classe \mathcal{C}^3 sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = F(a+x) - F(a) - x f\left(a + \frac{x}{2}\right)$. Alors G est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = f(a+x) - f\left(a + \frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} f'\left(a + \frac{x}{2}\right).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, G''(x) = f'(a+x) - \frac{1}{2} f'\left(a + \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} f'\left(a + \frac{x}{2}\right) - \frac{x}{4} f''\left(a + \frac{x}{2}\right).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, G''(x) = f'(a+x) - f'\left(a + \frac{x}{2}\right) - \frac{x}{4} f''\left(a + \frac{x}{2}\right).$$

f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et $\pi = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f''(t)|$ existe. L'inégalité de Taylor-Lagrange

$$\text{donne : } \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, |f(v) - f(u) - (v-u) f'(u)| \leq \frac{(v-u)^2}{2} \max_{t \in \mathcal{I}(u,v)} |f''(t)| \leq \pi \frac{(v-u)^2}{2}$$

R.

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R}, |f(a+x) - f(a+\frac{x}{2}) - (a+x - (a+\frac{x}{2}))f'(a+\frac{x}{2})| \leq \pi \frac{(a+x - (a+\frac{x}{2}))^2}{2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(a+x) - f(a+\frac{x}{2}) - \frac{x}{2} f'(a+\frac{x}{2})| \leq \pi \frac{x^2}{8} \leq \pi \frac{x^2}{4} !!$$

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R}, |G'(x)| \leq \pi \frac{x^2}{8} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, |G'(x)| \leq \pi \frac{x^2}{4} !!$$

Q3) Notons que $G(0) = 0$.

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}_+, |G(x)| = |G(x) - G(0)| = \left| \int_0^x G'(t) dt \right| \leq \int_0^x |G'(t)| dt \leq \int_0^x \frac{t^2}{8} dt = \frac{x^3}{24} = \frac{|x|^3}{24}$$

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}^-, |G(x)| = |G(x) - G(0)| = \left| \int_0^x G'(t) dt \right| = \left| \int_x^0 G'(t) dt \right| \leq \int_x^0 |G'(t)| dt \leq \int_x^0 \frac{t^2}{8} dt = -\frac{x^3}{24} = \frac{|x|^3}{24}$$

$$\text{Ainsi } \forall x \in \mathbb{R}, |G(x)| \leq \frac{|x|^3}{24} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, |G'(x)| \leq \frac{|x|^3}{12} !!$$