F 1 Assez simple ou proche du cours.

F 2 Demande du travail.

F 3 Délicat.

Question 1 **ESCP 2011** Obtenu par M. CARRIERE **F1**

Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. E un espace vectoriel euclidien de dimension n. $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de n vecteurs unitaires de E.

On suppose encore que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j \Rightarrow \|e_i - e_j\| = 1$.

Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.

Déjà donnée en 2009.

Question 2 **ESCP 2011** Obtenu par M. CARRIERE **F1**

$(X_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $P(X_n = 1) = p$ et $P(X_n = -1) = q = 1 - p$ $(0 < p < 1)$.

Trouver la loi de $Y_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} X_k$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que la suite (Y_n) converge en loi.

Déjà donnée en 2010 à l'ESCP et à HEC.

Question 3 **ESCP 2011** Obtenu par M. CARRIERE **F1$^-$**

On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir deux piles consécutifs ou deux faces consécutifs.

Donner la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de lancers effectués.

Question 4 **ESCP 2011** Obtenu par M. CARRIERE **F1$^-$**

$(X_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi exponentielle de paramètre a.

x est un réel strictement positif.

Q1. Donner la loi et l'espérance de la variable aléatoire N_x égale à $\text{Min}\,\{i \in \mathbb{N}^* \mid \{X_i > x\} \text{ est réalisé}\}$.

Q2. Calculer $P\big(N_x > E(N_x)\big)$.

Question 5 **ESCP 2011** E. PHILIP **F1**

α est un élément de $]0, 1]$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ (*hum...*), X_n suit la loi binômiale de paramètres n et $\dfrac{\alpha}{n}$.

Montrer que la suite (X_n) converge en loi et trouver la loi limite.

Question 6 **ESCP 2011** V. MESKHI **F1**

$A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 2 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Question 7 **ESCP 2011** R. BUEGUE et T. ADELINE **F1$^+$**

On place n boules numérotées de 1 à n dans n cases numérotées de 1 à n (une boule par case).

p_n est la probabilité pour qu'au moins une boule ait un numéro correspondant au numéro de sa case.

Trouver $\lim_{n \to +\infty} p_n$.

Question 8 **ESCP 2011** M. DELAFOSSE et D. DEROCHEBOUET $\boxed{\textbf{F1}}$

On considère que la durée de vie d'une abeille suit une loi exponentielle de paramètre inconnu.

Au bout de 70 jours l'apiculteur s'aperçoit que la moitié des abeilles de la ruche est mortes.

Quelle est approximativement la durée de vie moyenne d'une abeille ?

Question 9 **ESCP 2011** C. DAUDET $\boxed{\textbf{F1}}$

Q1. Donner les conditions pour que $f_a : x \to a\, e^{-|x|} \ln(1 + e^{|x|})$ soit une densité de probabilité.

Q2 X est une variable aléatoire de densité f_a. X admet-elle une espérance ?

Déjà donnée en 2010.

Question 10 **ESCP 2011** G. FOUBART $\boxed{\textbf{F1}^+}$

Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x - 1 = 0$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}^+$ que nous noterons x_n.

Étudier la suite (x_n).

Déjà donnée en 2009.

Question 11 **ESCP 2011** J. ESSO $\boxed{\textbf{F1}}$

X est une variable aléatoire à densité qui possède un moment d'ordre 2.

Montrer que $E(|X|)$ existe et que $E(|X|) \leqslant \sqrt{E(X^2)}$.

Une seconde question oubliée

Question 12 **ESCP 2011** T. EHRMANN $\boxed{\textbf{F1}^+}$

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une poignée de boules de l'urne, toutes les poignées y compris la poignée vide étant équiprobables. S est la somme des numéros obtenus dans la poignée.

Calculer l'espérance de S.

Question 13 **ESCP 2011** L. CANELA $\boxed{\textbf{F1}^+}$

$(X_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de variable aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et qui suivent la loi exponentielle de paramètre λ.

On suppose que $\lambda \geqslant 4$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.

Q1. Montrer que M_n est un estimateur sans biais et convergent de $\dfrac{1}{\lambda}$.

Q2. Quel n faut-il prendre pour que $\left| M_n - \dfrac{1}{\lambda} \right|$ soit inférieur ou égal à 0.01 au risque 5%. On rappelle que $\Phi(1.96) = 0.975$.

R.

Question 1 **ESCP 2011** Obtenu par M. CARRIERE

Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. E un espace vectoriel euclidien de dimension n. $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de n vecteurs unitaires de E.

On suppose encore que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j \Rightarrow ||e_i - e_j|| = 1$.

Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.

Déjà donnée en 2009.

Soient i et j deux éléments de $[\![1, n]\!]$. Supposons $i \neq j$.

$1 = \|e_i - e_j\|^2 = \|e_i\|^2 - 2<e_i, e_j> + \|e_j\|^2 = 2 - 2<e_i, e_j>$. $\underline{\underline{<e_i, e_j> = \frac{1}{2}}}$.

$\dim E = n$. Pour montrer que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E il suffit de montrer que cette famille est libre.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0_E$. $\quad <e_i, e_j> = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 1/2 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

$\forall j \in [\![1, n]\!]$, $0 = <0_E, e_j> = <\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, e_j> = \sum_{i=1}^n \alpha_i <e_i, e_j> = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_i + \alpha_j$

$\forall j \in [\![1, n]\!]$, $0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i + \frac{1}{2} \alpha_j$; $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_j = -\sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = -\sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Donc $\alpha_1 = -\sum_{i=1}^n \alpha_i = -\sum_{i=1}^n \alpha_1 = -n\alpha_1$; $(n+1)\alpha_1 = 0$. $\alpha_1 = 0$.

Alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Ceci achève de montrer que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est libre et qu'ainsi $\underline{\underline{(e_1, e_2, \ldots, e_n) \text{ est une base de } E}}$.

Question 2 **ESCP 2011** Obtenu par M. CARRIERE

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $P(X_n = 1) = p$ et $P(X_n = -1) = q = 1 - p$ $(0 < p < 1)$.

Trouver la loi de $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que la suite (Y_n) converge en loi.

Déjà donnée en 2010 à l'ESCP et à HEC.

Vous trouverez trois versions dans ESCP 2010 - Q15

Donnons en une. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$Y_n = \{-1, 1\}$. Posons $\alpha_n = P(Y_n = 1)$.

$E(Y_n) = (-1)P(Y_n = -1) + 1 \times P(Y_n = 1) = -(1-\alpha_n) + \alpha_n = 2\alpha_n - 1.$

Par indépendance $E(Y_n) = E\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} E(X_k) = \prod_{k=1}^{n} (1 \times p + (-1)q) = (p-q)^n.$

$2\alpha_n - 1 = (p-q)^n$; $\alpha_n = \frac{1}{2}\left[1 + (p-q)^n\right].$

$1 - \alpha_n = 1 - \frac{1}{2}\left[1 + (p-q)^n\right] = \frac{1}{2}\left[1 - (p-q)^n\right].$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_n = 1) = \frac{1}{2}\left[1 + (p-q)^n\right]$ et $P(Y_n = -1) = \frac{1}{2}\left[1 - (p-q)^n\right].$

$0 < p < 1$. $0 < 1 - p < 1$. $\begin{cases} 0 < p < 1 \\ -1 < -q < 0 \end{cases}$; $-1 < p - q < 1$. $|p-q| < 1$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (p-q)^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P(Y_n = 1) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(Y_n = -1) = \frac{1}{2}$.

Ainsi $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$!

R.

Question 3 ESCP 2011 Obtenu par M. CARRIERE

On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir deux piles consécutifs ou deux faces consécutifs.

Donner la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de lancers effectués.

$X(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$.

Pour tout i dans $\mathbb{N}^*$ notons P_i (resp. F_i) l'événement le $i^{\text{ème}}$ lancer donne pile (resp. face).

Soit $k \in \mathbb{N}^*$

- $P(X=2k) = P\Big(\big(P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4 \cap \dots \cap P_{2k-3} \cap F_{2k-2} \cap P_{2k-1} \cap P_{2k}\big) \cup \big(F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4 \cap \dots \cap F_{2k-3} \cap P_{2k-2} \cap F_{2k-1} \cap F_{2k}\big)\Big)$

Par indépendance et incompatibilité il vient :

$\underline{P(X=2k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}.}$

- $\{X = 2k+1\} = A_{2k+1} \cup B_{2k+1}$ où :

$A_{2k+1} = F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4 \cap \dots \cap F_{2k-1} \cap P_{2k} \cap P_{2k+1}$ et

$B_{2k+1} = P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4 \cap \dots \cap P_{2k-1} \cap F_{2k} \cap F_{2k+1}$

Par indépendance et incompatibilité on obtient

$\underline{P(X=2k+1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}.}$

Finalement $\forall k \in [\![2, +\infty[\![$, $P(X=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$.

__Remarque.__ - $X-1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$. Ainsi $E(X-1)$ existe et vaut 2. __$E(X)$ existe et vaut 3.__

__Exercice.__ - Généraliser au cas où la probabilité d'obtenir pile est p ($p \in]0,1[$).

R. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=2k) = (p^2+q^2)(pq)^{k-1}$ et $P(X=2k+1) = (pq)^k$ $(q = 1-p)$.

$E(X) = \dfrac{2+pq}{1-pq}.$

Question 4 **ESCP 2011** Obtenu par M. CARRIERE

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi exponentielle de paramètre a.

x est un réel strictement positif.

Q1. Donner la loi et l'espérance de la variable aléatoire N_x égale à Min $\{i \in \mathbb{N}^* \mid \{X_i > x\}$ est réalisé$\}$.

Q2. Calculer $P\big(N_x > E(N_x)\big)$.

Q1 • $P(N_x = 1) = P(X_1 > x) = 1 - P(X_1 \leqslant x) = 1 - (1 - e^{-ax}) = e^{-ax}$

• Soit $i \in [\![2, +\infty[\![$.

$P(N_x = i) = P(\{X_1 \leqslant x\} \cap \dots \cap \{X_{i-1} \leqslant x\} \cap \{X_i > x\})$. Par indépendance il vient :

$P(N_x = i) = P(X_1 \leqslant x) \dots P(X_{i-1} \leqslant x)\, P(X_i > x) = (1 - e^{-ax})^{i-1} e^{-ax}$.

Notons que $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $P(N_x = i) = e^{-ax}(1 - e^{-ax})^{i-1}$

N_x suit la loi géométrique de paramètre e^{-ax}.

$E(N_x) = \dfrac{1}{e^{-ax}}$. $E(N_x) = e^{ax}$.

Q2 Posons $\alpha = E(N_x) = e^{ax}$ et $r = \mathrm{Ent}(\alpha)$.

$P(N_x > \alpha) = P(N_x \geqslant r+1) = P(\{X_1 \leqslant x\} \cap \dots \{X_r \leqslant x\}) \overset{\text{indépendance}}{=} P(X_1 \leqslant x) \dots P(X_r \leqslant x)$.

$P(N_x > \alpha) = (1 - e^{-ax})^r$.

Ainsi $P(N_x > \mathrm{Ent}(N_x)) = (1 - e^{-ax})^{\mathrm{Ent}(e^{ax})}$.

R.

Question 5 ESCP 2011 E. PHILIP

α est un élément de $]0,1]$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, X_n suit la loi binômiale de paramètres n et $\frac{\alpha}{n}$.
Montrer que la suite (X_n) converge en loi et trouver la loi limite.

Notons que ceci est une question de cours (Programme VI 5) b).

Notons que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{\alpha}{n})$ suppose $\frac{\alpha}{n} \leqslant 1$ donc $n \geqslant \alpha$.

Posons alors $n_0 = \text{Ent}(\alpha)+1$. $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $n \geqslant n_0 = \text{Ent}(\alpha)+1 > \alpha$.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $\frac{\alpha}{n} \in [0,1[$.

Alors $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(X_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^k\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{n-k}$.

Fixons k dans $\mathbb{N}$.

$\forall n \in [\![\max(k, n_0), +\infty[\![$, $P(X_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^k\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{n-k} \underset{1-\frac{\alpha}{n}>0}{=} \binom{n}{k}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^k e^{(n-k)\ln\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)}$.

$\binom{n}{k}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}\,\frac{\alpha^k}{n^k} = \frac{\alpha^k}{k!}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\binom{n}{k}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^k\right) = \frac{\alpha^k}{k!}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{\alpha}{n}\right)=0$ donc $\ln\left(1-\frac{\alpha}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\alpha}{n}$. $(n-k)\ln\left(1-\frac{\alpha}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\left(-\frac{\alpha}{n}\right) = -\alpha$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left((n-k)\ln\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\right) = -\alpha$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{(n-k)\ln\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)} = e^{-\alpha}$.

Le tout donne $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}$ et ceci pour tout k dans $\mathbb{N}$.

Donc (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre α.

R.

Question 6 ESCP 2011 V. MESKHI

$A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 2 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

A est triangulaire supérieure et les éléments de sa diagonale sont 1 et 2.

Alors les valeurs propres de A sont 1 et 2.

Soit $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = X \iff \begin{cases} \alpha + x\beta + y\gamma = \alpha \\ 2\beta + z\gamma = \beta \\ \gamma = \gamma \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -z\gamma \\ 0 = x\beta + y\gamma = -xz\gamma + y\gamma = (y - xz)\gamma \end{cases}$$

1er cas.. $y - xz \neq 0$

$$AX = X \iff \begin{cases} \beta = -z\gamma \\ \gamma = 0 \end{cases} \iff \beta = \gamma = 0.$$ Alors $SEP(A,1) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$\dim SEP(A,1) = 1$

2ème cas.. $y - xz = 0$

$AX = X \iff \beta + z\gamma = 0$. $SEP(A,1)$ est l'hyperplan (donc le plan) d'équation $\beta + z\gamma = 0$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Alors $\dim SEP(A,1) = 2$.

$$AX = 2X \iff \begin{cases} \alpha + x\beta + y\gamma = 2\alpha \\ 2\beta + z\gamma = 2\beta \\ \gamma = 2\gamma \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha = x\beta \end{cases}.$$

Alors $SEP(A,2) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. $\dim SEP(A,2) = 1$.

Finalement $\dim SEP(A,1) + \dim SEP(A,2) = \begin{cases} 2 \text{ si } y \neq xz \\ 3 \text{ si } y = xz \end{cases}$.

Donc A est diagonalisable si et seulement si $y = xz$.

R

Question 7 ESCP 2011 R. BUEGUE et T. ADELINE

On place n boules numérotées de 1 à n dans n cases numérotées de 1 à n (une boule par case).

p_n est la probabilité pour qu'au moins une boule ait un numéro correspondant au numéro de sa case.

Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$ notons A_i l'événement la boule n° i est dans la case n° i.

$p_n = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$. La formule du crible donne :

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

Soit $k \in [\![1,n]\!]$ et soit $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}^k$ tel que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$.

$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \dfrac{(n-k)!}{n!}$ (il y a une seule possibilité de placer les boules n° $i_1, i_2, \ldots, i_k$ et il y a $(n-k)!$ possibilités de répartir les $n-k$ autres boules dans les $n-k$ cases portant un numéro appartenant à $[\![1,n]\!] - \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$).

Rappelons que le cardinal de $\{(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}^k \mid 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n\}$ est $\binom{n}{k}$ (c'est le nombre de suites strictement croissantes de k éléments de $[\![1,n]\!]$).

Alors $p_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$.

$$\boxed{p_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}}. \qquad p_n = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = -\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} - 1 \right) = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 1 - e^{-1} = 1 - \dfrac{1}{e}}$.

Exercice. Etudier la variable aléatoire X égale au nombre de boules placées sur une case dont le numéro coïncide avec le numéro de la boule.

R-

Question 8 **ESCP 2011** M. DELAFOSSE et D. DEROCHEBOUET

On considère que la durée de vie d'une abeille suit une loi exponentielle de paramètre inconnu.

Au bout de 70 jours l'apiculteur s'aperçoit que la moitié des abeilles de la ruche est mortes.

Quelle est approximativement la durée de vie moyenne d'une abeille ?

Soit X la durée de vie d'une abeille. $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

Il résulte des données que $P(X \leqslant 70) = \frac{1}{2}$ ...

Alors $1 - e^{-\lambda \times 70} = \frac{1}{2}$. $e^{-\lambda 70} = \frac{1}{2}$. $-70\lambda = -\ln 2$. $\lambda = \frac{\ln 2}{70}$.

On peut donc dire que la durée de vie moyenne d'une abeille est

$\frac{70}{\ln 2}$. $\frac{70}{\ln 2} \simeq 100{,}90$

Approximativement la durée de vie moyenne d'une abeille est de 101 jours.

Question 9 ESCP 2011 C. DAUDET

Q1. Donner les conditions pour que $x \to a\,e^{-|x|}\ln(1+e^{|x|})$ soit une densité de probabilité. On note f_a cette fonction.

Q2 X est une variable aléatoire de densité f_a. X admet-elle une espérance ?

Déjà donnée en 2010.

Q1 Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) = a\,e^{-|x|}\ln(1+e^{|x|})$.

* f_a est continue sur $\mathbb{R}$.
* $\forall x \in \mathbb{R},\ 1+e^{|x|} \geqslant 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(1+e^{|x|}) \geqslant 0$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-|x|}\ln(1+e^{|x|}) \geqslant 0$.

f_a est du signe de a sur $\mathbb{R}$.

* Notons que f_a est paire sur $\mathbb{R}$. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\int_0^A e^{-|t|}\ln(1+e^{|t|})\,dt = \int_0^A e^{-t}\ln(1+e^t)\,dt.$$

$t \mapsto e^t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ ce qui autorise le changement de variable $x = e^t$ dans ce qui suit.

$$\int_0^A e^{-|t|}\ln(1+e^{|t|})\,dt = \int_0^A e^{-t}\ln(1+e^t)\,dt \underset{\uparrow}{=} \int_1^{e^A} \frac{1}{x}\ln(1+x)\frac{1}{x}\,dx$$

$$\int_0^A e^{-|t|}\ln(1+e^{|t|})\,dt = \int_1^{e^A}\frac{1}{x^2}\ln(1+x)\,dx \qquad \begin{cases} x = e^t \\ t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}\,dx \end{cases}$$

En intégrant par parties on obtient :

$$\int_0^A e^{-|t|}\ln(1+e^{|t|})\,dt = \left[-\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]_1^{e^A} - \int_1^{e^A}\left(-\frac{1}{x}\,\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$\int_0^A e^{-|t|}\ln(1+e^{|t|})\,dt = -\frac{\ln(1+e^A)}{e^A} + \ln 2 + \underbrace{\int_1^{e^A}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx}_{\left[\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right]_1^{e^A}}$$

$$\int_0^A e^{-|t|}\ln(1+e^{|t|})\,dt = -\frac{\ln(1+e^A)}{e^A} + \ln 2 + \ln\frac{e^A}{e^A+1} - \ln\frac{1}{2}.$$

$$\int_0^A e^{-|t|}\ln(1+e^{|t|})\,dt = 2\ln 2 - \frac{\ln(1+e^A)}{e^A} + \ln\frac{e^A}{e^A+1}.$$

R.

$\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^A)}{e^A} = 0$ par croissance comparée car $\lim\limits_{A\to+\infty} e^A = +\infty$.

$\lim\limits_{A\to+\infty} \ln \dfrac{e^A}{e^A+1} = 0$ car $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{e^A}{e^A+1} = 1$.

donc $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-|t|} \ln(1+e^{|t|})\,dt = 2\ln 2$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} e^{-|t|} \ln(1+e^{|t|})\,dt$ converge et vaut $2\ln 2$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \ln(1+e^{|t|})\,dt$ converge et vaut $4\ln 2$ par parité.

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t)\,dt$ converge et vaut $(4\ln 2)a$.

D'après ce qui précède f_a est une densité de probabilité si et seulement si $a \geqslant 0$ et $(4\ln 2)a = 1$; donc si et seulement si $a \geqslant 0$ et $a = \dfrac{1}{4\ln 2}$. Or $\dfrac{1}{4\ln 2} \geqslant 0$

Ainsi $\underline{f_a \text{ est une densité de probabilité si et seulement si } a = \dfrac{1}{4\ln 2}}$.

Q2 Notons que $t \mapsto t f_a(t)$ est continue et impaire sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $E(X)$ existe dès que $\int_0^{+\infty} t f_a(t)\,dt$ converge ou plus simplement

dès que $\int_0^{+\infty} t\, e^{-t} \ln(1+e^t)\,dt$ converge.

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = t e^{-t} \ln(1+e^t)$.

$\forall t \in]0,+\infty[$, $\dfrac{\ln(1+e^t)}{t} = \dfrac{\ln e^t + \ln\left(\frac{1}{e^t}+1\right)}{t} = 1 + \dfrac{1}{t} \ln\left(1+\dfrac{1}{e^t}\right)$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^t)}{t} = 1 + 0 \times 0 = 1$; $\ln(1+e^t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t$

Alors 1) $g(t) \underset{+\infty}{\sim} t^2 e^{-t}$

2) $\forall t \in [0,+\infty[$, $t^2 e^{-t} \geqslant 0$

3) $\Gamma(3) = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\,dt$ converge !

R — · —

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge. Alors $\int_0^{+\infty} t f_a(t)dt$ converge.

Comme $t \mapsto t f_a(t)$ est impaire sur $\mathbb{R}$: $\int_{-\infty}^{0} t f_a(t)dt$ converge et vaut $-\int_0^{+\infty} t f_a(t)dt$ converge.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_a(t)\,dt$ converge et vaut 0.

<u>X possède une espérance qui est nulle.</u>

R.

Question 10 **ESCP 2011** G. FOUBART

Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x - 1 = 0$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}^+$ que nous noterons x_n.

Étudier la suite (x_n).

Déjà donnée en 2009.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = x^n + x - 1$.

f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_n'(x) = n x^{n-1} + 1 > 0$.

f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$, f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ et $f_n(0) = -1$.

f_n définit donc une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[-1, +\infty[$.

$0 \in [-1, +\infty[$ donc $\exists !\, x_n \in \mathbb{R}^+$, $f_n(x_n) = 0$.

<u>Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ l'équation $x^n + x - 1 = 0$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}^+$ que nous notons x_n.</u>

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $-1 < 0 < 1$ donc $f_n(0) < f_n(x_n) < f_n(1)$. Comme f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$: $0 < x_n < 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n + x_{n+1} - 1 \underset{\substack{\uparrow \\ x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 = 0}}{=} x_{n+1}^n - x_{n+1}^{n+1} = x_{n+1}^n (1 - x_{n+1}) > 0$.

$f_n(x_{n+1}) > 0 = f_n(x_n)$.

Alors $x_{n+1} > x_n$ car f_n est strictement croissante. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} > x_n$.

$(x_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante et majorée par 1 donc converge. Posons $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$; $\ell \in]0, 1]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n^n = 1 - x_n$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \ln x_n = \ln(1 - x_n)$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln x_n = \frac{1}{n} \ln(1 - x_n)$.

Supposons que $\ell \in]0, 1[$. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln x_n = 0 \times \ln(1 - \ell) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$!!

Nécessairement $\ell = 1$. <u>$(x_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers 1.</u>

R.

Question 11 **ESCP 2011** J. ESSO

X est une variable aléatoire à densité qui possède un moment d'ordre 2.

Montrer que $E(|X|)$ existe et que $E(|X|) \leqslant \sqrt{E(X^2)}$.

Une seconde question oubliée

$t \mapsto |t|$ est continue sur $\mathbb{R}$. Le théorème de transfert montre alors que $E(|X|)$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f(t)\,dt$ est absolument convergente où f est une densité de X définie sur $\mathbb{R}$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $|t| f(t) \geqslant 0$. Donc $E(|X|)$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f(t)\,dt$ converge.

$E(X)$ existe donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge.

Alors 1) $\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge donc $\int_0^{+\infty} |t| f(t)\,dt$ converge

2) $\int_{-\infty}^{0} t f(t)\,dt$ converge donc $\int_{-\infty}^{0} (-t f(t))\,dt$ converge. Alors $\int_{-\infty}^{0} |t| f(t)\,dt$ converge.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f(t)\,dt$ converge.

Ceci achève de montrer que $\underline{\underline{E(|X|) \text{ existe}}}$. Le reste c'est Cauchy-Schwarz !

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\left(\lambda \sqrt{f(t)} + |t| \sqrt{f(t)}\right)^2 = \lambda^2 f(t) + 2\lambda |t| f(t) + t^2 f(t)$.

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f(t)\,dt$, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ convergent et valent respectivement 1, $E(|X|)$, $E(X^2)$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\lambda \sqrt{f(t)} + |t| \sqrt{f(t)}\right)^2 dt$ converge et vaut $\lambda^2 + 2\lambda E(|X|) + E(X^2)$.

Posons $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $Q(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda E(|X|) + E(X^2)$. Q est un polynôme de degré 2 et

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $Q(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\lambda \sqrt{f(t)} + |t| \sqrt{f(t)}\right)^2 dt \geqslant 0$ car $t \mapsto \left(\lambda \sqrt{f(t)} + |t| \sqrt{f(t)}\right)^2$ est positive sur $\mathbb{R}$.

Alors Q a au plus une racine dans $\mathbb{R}$. Donc son discriminant est négatif ou nul.

Alors $4\,(E(|X|))^2 - 4 \times 1 \times E(X^2) \leqslant 0$. $(E(|X|))^2 \leqslant E(X^2)$.

Comme $E(|X|) \geqslant 0$: $\underline{\underline{E(|X|) \leqslant \sqrt{E(X^2)}}}$.

R.

Question 12 **ESCP 2011** T. EHRMANN

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une poignée de boules de l'urne, toutes les poignées y compris la poignée vide étant équiprobables. S est la somme des numéros obtenus dans la poignée.

Calculer l'espérance de S.

Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$ notons B_i la variable de Bernoulli qui vaut 1 si la boule n°i est dans la poignée tirée et 0 sinon.

$S=\sum_{i=1}^{n} i B_i$. $E(S)=\sum_{i=1}^{n} i\,E(B_i)=\sum_{i=1}^{n} i\,P(B_i=1)$.

Soit $i\in[\![1,n]\!]$. Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$ notons C_k l'événement la poignée tirée contient k boules. $(C_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements.

La formule des probabilités totales donne :

$$P(B_i=1)=\sum_{k=0}^{n} P(\{B_i=1\}\cap C_k)=\sum_{k=1}^{n} P(\{B_i=1\}\cap C_k)$$

$$P(B_i=1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\binom{n-1}{k-1}}{2^n}$$

$\binom{n-1}{k-1}$ ← nombre de poignées contenant k boules dont la boule n°i.

2^n ← nombre de poignées.

$$P(B_i=1)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}=\frac{2^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2}.\quad \forall i\in[\![1,n]\!],\ P(B_i=1)=\frac{1}{2}.$$

$$E(S)=\sum_{i=1}^{n} i\,P(B_i=1)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2}=\frac{n(n+1)}{4}.\qquad \underline{\underline{E(S)=\frac{n(n+1)}{4}}}.$$

R.

Question 13 **ESCP 2011** L. CANELA

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variable aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et qui suivent la loi exponentielle de paramètre λ.

On suppose que $\lambda \geqslant 4$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.

Q1. Montrer que M_n est un estimateur sans biais et convergent de $\dfrac{1}{\lambda}$.

Q2. Quel n faut-il prendre pour que $\left|M_n - \dfrac{1}{\lambda}\right|$ soit inférieur ou égal à 0.01 au risque 5%. On rappelle que $\Phi(1.96) =$ 0.975.

Q1 $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $E(X_k)$ existe et vaut $1/\lambda$.

Alors pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $M_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} X_k$ possède une espérance qui vaut $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} E(X_k)$ (linéarité de l'espérance).

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(M_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n} \times n \times \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(M_n) = \frac{1}{\lambda}$.

<u>M_n est un estimateur sans biais de $\frac{1}{\lambda}$.</u>

- $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.
- les éléments de cette suite ont une espérance et une variance communes

la loi faible des grands nombres montre que la suite $\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à l'espérance des X_k donc à $\frac{1}{\lambda}$. $(M_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $\frac{1}{\lambda}$.

<u>M_n est un estimateur sans biais et convergent de $\frac{1}{\lambda}$.</u>

Q2 On cherche donc n pour que $P\left(\left|M_n - \frac{1}{\lambda}\right| \leqslant 0{,}01\right) \geqslant 0{,}95$.

- $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.
- Toutes les variables aléatoires de cette suite ~~ont~~ même loi, ont une espérance et ont une variance non nulle.

R.

le théorème de la limite centrée montre que la suite de terme général

$M_n^* = \dfrac{M_n - E(M_n)}{\sqrt{V(M_n)}}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite et dont nous noterons ϕ la fonction de répartition.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(M_n) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $V(M_n) = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \dfrac{1}{n^2} \times n \times \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{n\lambda^2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M_n^* = \dfrac{M_n - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda\sqrt{n}}}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(M_n^* \leq x) = \phi(x)$.

Nous assimilerons alors M_n^* à une variable qui suit la loi normale centrée réduite. Alors pour n assez grand ...

$P\left(\left|M_n - \frac{1}{\lambda}\right| \leq 0,01\right) = P\left(|M_n^*| \leq \lambda\sqrt{n} \times 0,01\right) = 2\phi\left(\lambda\sqrt{n} \times 0,01\right) - 1$

On cherche alors n pour que $2\phi(\lambda\sqrt{n} \times 0,01) - 1 \geq 0,95$ $(*)$

$(*) \Leftrightarrow \phi(\lambda\sqrt{n} \times 0,01) \geq \dfrac{1+0,95}{2} = 0,975 = \phi(1,96) \Leftrightarrow \lambda\sqrt{n} \times 0,01 \geq 1,96$

ϕ est strictement croissante.

$(*) \Leftrightarrow n \geq \left(\dfrac{1,96}{\lambda \times 0,01}\right)^2$.

Or nous ne connaissons pas λ ! Mais nous savons que $\lambda \geq 4$ ou $\dfrac{1}{\lambda} \leq \dfrac{1}{4}$.

Nous chercherons alors n tel que $n \geq \left(\dfrac{1,96}{4 \times 0,01}\right)^2 = (49)^2 = 2401$.

Nous retiendrons alors $\underline{\underline{n = 2401}}$.