R.

Question 1 ESCP 2012 $\boxed{\text{F 1}}$ MARHABEN

A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = {}^tA$.

Quand la matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

Montrer que A est orthogonale.

$A = {}^t({}^tA) = {}^t(A^2) = {}^t(A \times A) = {}^tA\,{}^tA = A^2 A^2 = A^4$.

Comme A est inversible : $I_n = AA^{-1} = A^4 A^{-1} = A^3$. $A^3 - I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

X^3-1 est un polynôme annulateur de A donc le seul zéro dans $\mathbb{R}$ est 1. Alors $Sp_{\mathbb{R}} A \subset \{1\}$.

• Supposons que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. $Sp_{\mathbb{R}} A \neq \emptyset$ et $Sp_{\mathbb{R}} A \subset \{1\}$ donc $Sp_{\mathbb{R}} A = \{1\}$.

De plus $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = SEP(A, 1)$. Ainsi $n = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \dim SEP(A,1) = n - rg(A - I_n)$.

Donc $rg(A - I_n) = 0$. $A - I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. $A = I_n$.

• Réciproquement supposons que $A = I_n$. Alors A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et $A^2 = {}^tA$

$(A^2 = I_n^2 = I_n = {}^tI_n = {}^tA)$.

Ainsi <u>A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $A = I_n$.</u>

${}^tAA = A^2A = A^3 = I_n$. Donc <u>$A$ est orthogonale.</u>

Question 2 ESCP 2012 F 1

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que $X\,g(X)$ et $g'(X)$ admettent une espérance.

a) Montrer que $E\big(g'(X)\big) = E\big(X\,g(X)\big)$.

b) En déduire les valeurs des moments de X.

---

a) Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/2}$. φ est une densité de X et φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = -t\,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/2} = -t\varphi(t)$.

X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, g' et $t \mapsto t g(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, $E(g'(X))$ et $E(X g(X))$ existent.

Le théorème de transfert montre alors que : $\int_{-\infty}^{+\infty} g'(t)\varphi(t)\,dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} t g(t)\varphi(t)\,dt$ sont absolument convergentes, $E(g'(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g'(t)\varphi(t)\,dt$ et $E(X g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} t g(t)\varphi(t)\,dt$.

Soit $A \in \mathbb{R}$.

$$\int_0^A g'(t)\varphi(t)\,dt \underset{\text{IPP}}{=} \big[g(t)\varphi(t)\big]_0^A - \int_0^A g(t)\varphi'(t)\,dt = g(A)\varphi(A) - g(0)\varphi(0) + \int_0^A g(t)\,t\varphi(t)\,dt.$$

g et φ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; $\varphi'(t) = -t\varphi(t)$

$$\int_0^A g'(t)\varphi(t)\,dt = g(A)\varphi(A) - g(0)\varphi(0) + \int_0^A t g(t)\varphi(t)\,dt \quad (1)$$ On a aussi :

$$\int_A^0 g'(t)\varphi(t)\,dt = -g(A)\varphi(A) + g(0)\varphi(0) + \int_A^0 t g(t)\varphi(t)\,dt \quad (2),$$

$$g(A)\varphi(A) = \int_0^A g'(t)\varphi(t)\,dt + g(0)\varphi(0) - \int_0^A t g(t)\varphi(t)\,dt \quad (3),$$

$$g(A)\varphi(A) = -\int_A^0 g'(t)\varphi(t)\,dt + g(0)\varphi(0) + \int_A^0 t g(t)\varphi(t)\,dt \quad (4).$$

$\int_0^{+\infty} g'(t)\varphi(t)\,dt$ et $\int_0^{+\infty} t g(t)\varphi(t)\,dt$ convergent donc $A \mapsto \int_0^A g'(t)\varphi(t)\,dt$ et $A \mapsto \int_0^A t g(t)\varphi(t)\,dt$ ont une limite finie en $+\infty$. Alors (3) montre que $A \mapsto g(A)\varphi(A)$ a une limite finie en $+\infty$. Notons la L.

$\int_{-\infty}^0 g'(t)\varphi(t)\,dt$ et $\int_{-\infty}^0 t g(t)\varphi(t)\,dt$ convergent donc $A \mapsto \int_A^0 g'(t)\varphi(t)\,dt$ et $A \mapsto \int_A^0 t g(t)\varphi(t)\,dt$ ont une limite finie en $-\infty$. Alors (4) montre que $A \mapsto g(A)\varphi(A)$ a une limite finie en $-\infty$ que nous notons ℓ.

R.

Supposons $L \neq 0$. Alors $g(t)\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} L$. $|g(t)\varphi(t)| \underset{t\to+\infty}{\sim} |L| = |L|\frac{1}{t^0}$.

De plus $\int_0^{+\infty} |L|\frac{1}{t^0}\,dt$ diverge et $t \mapsto |L|\frac{1}{t^0}$ est positive sur $[0,+\infty[$.

Alors $\int_0^{+\infty} |g(t)\varphi(t)|\,dt$ diverge. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)\varphi(t)|$ diverge. Cela contredit l'absolue convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\varphi(t)\,dt$. Ainsi $L = 0$.

Un raisonnement analogue donne $\ell = 0$. Alors en faisant tendre A vers $+\infty$ dans (1) et vers $-\infty$ dans (2) il vient :

$\int_0^{+\infty} g'(t)\varphi(t)\,dt = -g(0)\varphi(0) + \int_0^{+\infty} t g(t)\varphi(t)\,dt$ et $\int_{-\infty}^{0} g'(t)\varphi(t)\,dt = g(0)\varphi(0) + \int_{-\infty}^{0} t g(t)\varphi(t)\,dt$

En ajoutant ces deux égalités on obtient $\int_{-\infty}^{+\infty} g'(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t g(t)\varphi(t)\,dt$.

Donc $\underline{\underline{E(g'(X)) = E(Xg(X))}}$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. $\lim_{x\to+\infty} (x^{k+2}\varphi(x)) = \lim_{x\to+\infty} \left(x^{k+2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{2^{\frac{k+2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{(x^2/2)^{\frac{k+2}{2}}}{e^{x^2/2}} \right] = 0$ par croissance comparée. $\lim_{x\to+\infty} (x^2 x^k \varphi(x)) = 0$. Alors :

1) $x^k\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

2) $\forall x \in [1,+\infty[$, $x^k\varphi(x) \geq 0$ et $\frac{1}{x^2} \geq 0$

3) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent la convergence de $\int_0^{+\infty} x^k\varphi(x)\,dx$.

φ est paire sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto x^k$ a la parité de k sur $\mathbb{R}$. Donc $x \mapsto x^k\varphi(x)$ est paire sur $\mathbb{R}$ si k est pair et impaire sur $\mathbb{R}$ si k est impair.

La convergence de $\int_0^{+\infty} x^k\varphi(x)\,dx$ donne alors la convergence de $\int_{-\infty}^{0} x^k\varphi(x)\,dx$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\varphi(x)\,dx$ converge. Cela suffit pour dire que X possède un moment d'ordre k ou que X^k possède une espérance.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, X possède un moment d'ordre k que nous noterons $m_k(X)$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $m_k(X) = E(X^k)$.

Si k est impair $m_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x^k \varphi(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} x^k \varphi(x)\,dx = -\int_{0}^{+\infty} x^k \varphi(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} x^k \varphi(x)\,dx = 0$.

<u>si k est impair $m_k(X) = 0$.</u> <u>$\forall r \in \mathbb{N}$, $m_{2r+1}(X) = 0$.</u>

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^{2r-1}$. <u>g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$</u> et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = (2r-1)x^{2r-2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x\,g(x) = x^{2r}$ et $g'(x) = (2r-1)x^{2r-2}$.

Alors <u>$E(Xg(X))$ existe et vaut $m_{2r}(X)$, et $E(g'(X))$ existe et vaut $(2r-1)m_{2r-2}(X)$</u>

Alors d'après Q1 $m_{2r}(X) = E(Xg(X)) = E(g'(X)) = (2r-1)\,m_{2r-2}(X)$.

<u>$\forall r \in \mathbb{N}^*$, $m_{2r}(X) = (2r-1)\,m_{2r-2}(X)$.</u> Soit $r \in \mathbb{N}^*$

$\frac{1}{2r-1} m_{2r}(X) = m_{2r-2}(X)$; $\frac{2r}{(2r)(2r-1)} m_{2r}(X) = m_{2r-2}(X)$;

$\frac{2r}{(2r)!} m_{2r}(X) = \frac{1}{(2r-2)!} m_{2r-2}(X)$; $\frac{2^r r!}{(2r)!} m_{2r}(X) = \frac{2^{r-1}(r-1)!}{(2r-2)!} m_{2r-2}(X)$.

Donc la suite $\left(\frac{2^r r!}{(2r)!} m_{2r}(X)\right)_{r \in \mathbb{N}}$ est constante.

Alors $\forall r \in \mathbb{N}$, $\frac{2^r r!}{(2r)!} m_{2r}(X) = \frac{2^0\, 0!}{(2\times 0)!} m_{2\times 0}(X) = m_0(X) = 1$;

<u>$\forall r \in \mathbb{N}$, $m_{2r}(X) = \frac{(2r)!}{2^r r!}$.</u> <u>$\forall r \in \mathbb{N}$, $m_{2r+1}(X) = 0$.</u>

Notons quand même que <u>$\forall r \in \mathbb{N}^*$, $m_{2r}(X) = (2r-1)(2r-3)\cdots 1 = \prod_{k=1}^{r} (2k-1)$.</u>

R.

Question 3 **ESCP 2012** $\boxed{\textbf{F 2}}$

f est une fonction T-périodique sur $\mathbb{R}$, avec $T>0$, dérivable sur $\mathbb{R}$.

On suppose que T s'annule en p points distincts x_1, x_2, ..., x_p de $[0,T[$ tels que $x_1<x_2<\cdots<x_p$.

Montrer que f' s'annule en au moins p points distincts de [0,T[et distincts de x_1, x_2, ..., x_p.

• **1er Cas..** $x_1=0$. Alors $f(T)=f(0)=f(x_1)=0$. Posons $x_{p+1}=T$.

$0=x_1<x_2<\cdots<x_p<x_{p+1}=T$ et $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_{p+1})$ $(=0)$.

De plus f est dérivable sur IR donc sur $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$, ..., $[x_p,x_{p+1}]$.

Le théorème de Rolle montre alors que pour tout $k\in[\![1,p]\!]$, $\exists\, y_k\in\,]x_k,x_{k+1}[$, $f'(y_k)=0$.

Alors $y_1,y_2,\dots,y_p$ sont p zéros distincts de f' appartenant à $[0,T[$ et distincts de $x_1,x_2,\dots,x_p$. Ceci achève de montrer le résultat pour $x_1=0$. •

• **2ème Cas..** $x_1>0$. Nous allons alors montrer que f' s'annule en au moins un point de $[0,x_1[\,\cup\,]x_p,T[$.

a) $f(0)=0$. Le théorème de Rolle appliqué à f sur $[0,x_1]$ montre l'existence d'un zéro pour f' dans $]0,x_1[$ donc dans $[0,x_1[\,\cup\,]x_p,T[$

b) $f(0)\neq 0$. Quitte à changer f en $-f$ nous supposerons que $f(0)>0$.

i) $f'(0)=0$. Alors f' s'annule en un point de $[0,x_1[\,\cup\,]x_p,T[$!

ii) $f'(0)>0$. Supposons que $\forall x\in[0,x_1[$, $f(x)\leq f(0)$.

Alors $\forall x\in\,]0,x_1[$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\leq 0$. En faisant tendre x vers 0 par valeurs supérieures il vient $f'(0)\leq 0$!

Donc $\exists\,\alpha\in[0,x_1[$, $f(\alpha)>f(0)$. Nécessairement $\alpha\in\,]0,x_1[$ car $f(\alpha)>f(0)$.

f est continue sur $[\alpha,x_1]$ donc f prend toutes les valeurs comprises strictement entre $f(x_1)$ qui vaut 0 et $f(\alpha)$ qui est strictement supérieure à $f(0)$. De plus $f(0)>0$ donc $\exists\,\beta\in\,]\alpha,x_1[$, $f(\beta)=f(0)$. En appliquant Rolle à f sur $[\beta,x_1]$ on obtient l'existence de γ dans $]\beta,x_1[$ tel que $f'(\gamma)=0$.

Donc f' s'annule sur $[0,x_1[\,\cup\,]x_p,T[$.

R

(ii) $\underline{f'(0)<0}$. On pouvait sans doute se ramener à (i) en considérant $g : x \mapsto f(T-x)$ non ? Mais on ne change pas une solution qui gagne.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$. En dérivant il vient $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x+T) = f'(x)$.

Alors $f'(T) = f'(0) < 0$. Supposons que $\forall x \in]x_p, T[$, $f(x) \leq f(T)$

Alors $\forall x \in]x_p, T[$, $\dfrac{f(x)-f(T)}{x-T} \geq 0$. En faisant tendre x vers T par valeurs inférieures il vient $f'(T) \geq 0$! Donc $\exists \alpha' \in]x_p, T[$, $f(\alpha') > f(T)$.

f est continue sur $[x_p, \alpha']$ donc f prend sur $]x_p, \alpha'[$ toutes les valeurs strictement comprises entre $f(x_p)$ qui vaut 0 et $f(\alpha')$ qui est strictement supérieur à $f(T)$. $f(x_p) = 0 < f(0) = f(T) < f(\alpha')$.

Ainsi $\exists \beta' \in]x_p, \alpha'[$, $f(\beta') = f(T)$.

Rolle appliqué à f sur $[\beta', T]$ montre que $\exists \delta \in]\beta', T[$, $f'(\delta) = 0$.

Or $\delta \in]x_p, T[$ car $x_p \leq \beta'$.

f' s'annule sur $]x_p, T[$ donc sur $[0, x_1[\cup]x_p, T[$.

$\underline{\underline{\text{(Si } x_1>0 \text{ :) } f' \text{ s'annule en au moins un point de } [0, x_1[\cup]x_p, T[}}$. Achevons le cas $x_1 > 0$.

$\underline{\underline{1^{er}\text{ cas}}}$.. $p = 1$. f' s'annule en au moins un point de $[0, x_1[\cup]x_1, T[$.

Ainsi f' s'annule en au moins un point de $[0, T[$ distinct de x_1.

$\underline{\underline{2^{ème}\text{ cas}}}$.. $p > 1$ f' s'annule déjà en au moins un point y_0 de $[0, x_1[\cup]x_p, T[$.

Pour tout k dans $[\![1, p-1]\!]$, f est dérivable sur $[x_k, x_{k+1}]$ et $f(x_k) = 0 = f(x_{k+1})$.

Rolle montre alors que : $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, $\exists y_k \in]x_k, x_{k+1}[$, $f'(y_k) = 0$.

Alors $y_0, y_1, \dots, y_{p-1}$ sont p éléments distincts de $[0, T[$ qui annulent f' et qui sont distincts de $x_1, x_2, \dots, x_p$: ceci achève de montrer que :

$\underline{\underline{f' \text{ s'annule en au moins } p \text{ points distincts de } [0, T[\text{ et distincts de } x_1, x_2 \dots, x_p}}$.

R.

Question 4 ESCP 2012 $\boxed{\text{F2}}$ P. KONIECZNY

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note P_n le polynôme $X(X-1)(X-2)\dots(X-n)$.

a). Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, P'_n possède une racine et une seule dans $]0,1[$ que nous noterons r_n.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R} - [\![0,n]\!]$, $\dfrac{P'_n(x)}{P_n(x)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x-k}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} r_n$.

---

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. P_n est dérivable sur $[k, k+1]$ et $P_n(k) = P_n(k+1) = 0$.

Ceci suffit pour utiliser le théorème de Rolle et dire qu'il existe un élément β_k de $]k, k+1[$ tel que $P'_n(\beta_k) = 0$.

Alors $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ sont n zéros distincts de P'_n.

$\deg P_n = n+1$ donc $\deg P'_n = n$. P'_n admet au plus n racines.

Alors $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ sont LES racines de P'_n.

Notons que $\beta_0 \in]0,1[$ et que $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\beta_k \in]k, k+1[\subset]1, +\infty[$.
si $n \geqslant 2$...

Ainsi <u>P'_n possède une racine et une seule dans $]0,1[$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.</u>

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ nous noterons, dans la suite, r_n cette racine.

<u>Remarque</u>.. $r_1 = \frac{1}{2}$ et $r_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) <u>Rappel</u> | Si u est une fonction dérivable et non nulle sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ alors $\ln|u|$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $(\ln|u|)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\forall x \in \mathbb{R} - [\![0,n]\!]$, $f_n(x) = \ln|P_n(x)|$.

P_n est dérivable et non nulle sur $]-\infty, 0[,]0,1[, \dots,]n-1, n[,]n, +\infty[$ donc f_n est dérivable sur chacun de ces intervalles et sa dérivée coïncide sur ces intervalles avec P'_n / P_n.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R} - [\![0,n]\!]$, $f'_n(x) = \dfrac{P'_n(x)}{P_n(x)}$.

Mais $\forall x \in \mathbb{R} - [\![0,n]\!]$, $f_n(x) = \ln\left|\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x-k)\right| = \ln\left[\displaystyle\prod_{k=0}^{n}|x-k|\right] = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \ln|x-k|$.

Soit $k \in [\![0,n]\!]$, $x \mapsto x-k$ est dérivable et non nulle sur $]-\infty, k[$ et $]k, +\infty[$.

Alors $v_k : x \mapsto \ln|x-k|$ est dérivable sur $]-\infty, k[$ et sur $]k, +\infty[$. De plus $\forall x \in \mathbb{R} - \{k\}$, $v'_k(x) = \dfrac{1}{x-k}$.

R.

$\forall x \in \mathbb{R} - [\![1,n]\!]$, $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} v_k(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} - [\![1,n]\!]$, $\frac{P'_n(x)}{P_n(x)} = f'_n(x) = \sum_{k=0}^{n} v'_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x-k}$.

$\forall x \in \mathbb{R} - [\![1,n]\!]$, $\frac{P'_n(x)}{P_n(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x-k}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{r_n - k} = \frac{P'_n(r_n)}{P'_n(r_n)} = 0$. $\frac{1}{r_n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r_n - k} = 0$.

Alors $\frac{1}{r_n} = - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r_n - k}$. $r_n > 0$ donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $r_n - k > -k$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $k - r_n < k$ et $k - r_n > 0$ $(r_n \in]0,1[)$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\frac{1}{k} < \frac{1}{k - r_n}$; $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k - r_n} = - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r_n - k} = \frac{1}{r_n}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \frac{1}{r_n}$.

Or la série de terme général en $\frac{1}{k}$ est divergente et à termes positifs. Ainsi la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$.

Donc $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$ et ainsi $\lim \frac{1}{r_n} = +\infty$.

Alors $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1/r_n} = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} r_n = 0$.

R.

Question 5 ESCP 2012 $\boxed{\text{F 1}}$

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes, suivant la même loi géométrique de paramètre p.

Déterminer la probabilité de l'événement $\{3X = 2Y\}$.

Soit $(k,k')\in(\mathbb{N}^*)^2$ tel que $3k'=2k$; 2 divise $3k'$ donc 2 divise k'...

$\exists r\in\mathbb{N}^*$, $k'=2r$. Alors $6r=2k$; $k=3r$.

Réciproquement soit $r\in\mathbb{N}^*$. Posons $k'=2r$ et $k=3r$. $3k'=6r=2(3r)=2k$.

Ainsi $\{(k,k')\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* \mid 3k'=2k\}=\{(2r,3r)\ ;\ r\in\mathbb{N}^*\}$.

Rappelons que X et Y prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Alors $\{3X=2Y\}=\{\omega\in\Omega \mid 3X(\omega)=2Y(\omega)\}=\{\omega\in\Omega \mid \exists r\in\mathbb{N}^*,\ X(\omega)=2r \text{ et } Y(\omega)=3r\}$.

$$\{3X=2Y\}=\bigcup_{r\in\mathbb{N}^*}\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)=2r \text{ et } Y(\omega)=3r\}=\bigcup_{r\in\mathbb{N}^*}\left(\{X=2r\}\cap\{Y=3r\}\right).$$

Les éléments de cette réunion étant deux à deux incompatibles il vient :

$$P(3X=2Y)=\sum_{r=1}^{+\infty}P(\{X=2r\}\cap\{Y=3r\}).$$ Par indépendance on obtient :

$$P(3X=2Y)=\sum_{r=1}^{+\infty}P(X=2r)\,P(Y=3r)=\sum_{r=1}^{+\infty}p\,q^{2r-1}\,p\,q^{3r-1}$$

$$P(3X=2Y)=p^2\sum_{r=1}^{+\infty}q^{5r-2}=p^2q^3\sum_{r=1}^{+\infty}(q^5)^{r-1}=p^2q^3\sum_{r=0}^{+\infty}(q^5)^r=\frac{p^2q^3}{1-q^5}.$$

$$\underline{\underline{P(3X=2Y)=\frac{p^2q^3}{1-q^5}.}}$$

R

Question 6 ESCP 2012 $\boxed{\text{F 1}}$

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On pose $\forall k \in \mathbb{N},\ p_k = P(X = k)$ et on suppose que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_k = \left(a + \dfrac{b}{k}\right) p_{k-1}$ ou a et b sont deux réels réels tels que $a \leqslant 0$ et $b > 0$.

La variable aléatoire X peut-elle suivre :

a) une loi exponentielle ?

b) une loi de Poisson ?

c) une loi binomiale ?

d) une loi géométrique ?

Deux remarques. 1/ $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$

2/ Si $p_0=0$, une récurrence simple montre que $\forall k \in \mathbb{N},\ p_k = 0$ et on a $\displaystyle 1 = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 0$! donc $p_0 \neq 0$.

a) Supposons que X suive une loi exponentielle. Alors X est une variable aléatoire à densité donc $\displaystyle 1 = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 0$!

X ne peut pas suivre une loi exponentielle.

b) • Supposons que X suive une loi de Poisson. Soit λ son paramètre. $\lambda > 0$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = P(X=k) = p_k = \left(a + \dfrac{b}{k}\right) p_{k-1} = \left(a + \dfrac{b}{k}\right) \dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda}$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \left(a + \dfrac{b}{k}\right) \dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda}$; $\dfrac{\lambda}{k} = a + \dfrac{b}{k}$ pour tout k dans $\mathbb{N}^*$.

En particulier $\dfrac{\lambda}{1} = a + \dfrac{b}{1}$ et $\dfrac{\lambda}{2} = a + \dfrac{b}{2}$ donc $\begin{cases} a+b = \lambda \\ 2a+b = \lambda \end{cases}$. $a+b = 2a+b$;

Alors $a = 0$ et $b = \lambda$.

• Réciproquement supposons que $a = 0$. Montrons que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_k = \left(a + \dfrac{b}{k}\right) p_{k-1} = \dfrac{b}{k} p_{k-1}$; $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{k!\, p_k}{b^k} = \dfrac{(k-1)!\, p_{k-1}}{b^{k-1}}$.

La suite $\left(\dfrac{k!\, p_k}{b^k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est constante. $\forall k \in \mathbb{N},\ \dfrac{k!\, p_k}{b^k} = \dfrac{0!\, p_0}{b^0} = p_0$. $\forall k \in \mathbb{N},\ p_k = \dfrac{b^k}{k!} p_0$.

De plus $\displaystyle 1 = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = p_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} = p_0 e^b$. $p_0 = e^{-b}$. $\forall k \in \mathbb{N},\ p_k = \dfrac{b^k}{k!} e^{-b}$; $X \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$.

R.

Conclusion.. 1) oui X peut suivre une loi de Poisson.

2) X suit une loi de Poisson si et seulement si $a=0$.

3) Si $a=0$: $X \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$

c) • Supposons que X suit une loi binomiale. Plus précisément supposons que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $p_k = P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ où $q=1-p$.

1er cas.. $p=1$. Alors $q=0$. Donc $p_0 = q^n = 0$. Ceci est impossible comme nous l'avons dit dans la remarque initiale.

2e cas.. $p=0$. Alors $q=1$. Donc $p_0=1$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $p_k=0$.

Donc $0 = p_1 = (a+b)p_0 = a+b$. $a+b=0$.

3ème cas.. $p\neq 0$ et $p\neq 1$. Alors $p\in]0,1[$ et $q\in]0,1[$

$\binom{n}{1} p q^{n-1} = p_1 = (a+b)p_0 = (a+b)q^n$; comme $q\neq 0$: $np=(a+b)q$.

$0 = p_{n+1} = (a+\frac{b}{n+1})p_n = (a+\frac{b}{n+1})p^n$; comme $p\neq 0$: $a+\frac{b}{n+1}=0$.

Notons que nécessairement $a\neq 0$ car $a=0$ donne $b=0$!

Ainsi $n+1 = -\frac{b}{a}$. Alors $-\frac{b}{a}$ est un élément de $[\![2,+\infty[\![$ et $n = -\frac{b}{a}-1$

$np = (a+b)q = (a+b)(1-p)$; $(n+a+b)p = a+b$;

$$p = \frac{a+b}{n+a+b} = \frac{a+b}{-\frac{b}{a}-1+a+b} = \frac{a+b}{-\frac{a+b}{a}+a+b} = \frac{1}{1-\frac{1}{a}} = \frac{a}{a-1} \; ; \; p = \frac{a}{a-1}.$$

Remarque.. dans le deuxième cas $a+b=0$ donc $a\neq 0$ ($a=0 \Rightarrow b=0$) et $-\frac{b}{a}=1$

Ainsi si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$: $a\neq 0$ et $-\frac{b}{a} \in \mathbb{N}^*$.

• Réciproquement supposons que $a\neq 0$ et que $-\frac{b}{a}\in\mathbb{N}^*$.

1er cas.. $-\frac{b}{a}=1$. Alors $a+b=0$. Donc $p_1=(a+b)p_0=0$.

Une récurrence simple donne : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $p_k=0$.

Alors $p_0=1$ et $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $p_k=0$. Donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,0)$ avec n quelconque dans $\mathbb{N}^*$!?

2ième cas. $-\frac{b}{a} \in [\![2,+\infty[\![$. Posons $n = -\frac{b}{a} - 1$. $n \in \mathbb{N}^*$.

Posons $p = \frac{a}{a-1}$. $p>0$ car $a<0$.

$1-p = 1-\frac{a}{a-1} = -\frac{1}{a-1} = \frac{1}{1-a} > 0$ car $1-a>0$. $1-p>0$. $p<1$.

Ainsi $p \in]0,1[$. Posons $q=1-p$. Montrons que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Notons que $P_{n+1} = \left(a+\frac{b}{n+1}\right)P_n$.

Or $n = -\frac{b}{a}-1$; $n+1 = -\frac{b}{a}$; $\frac{b}{n+1}=-a$; $a+\frac{b}{n+1}=0$; $P_{n+1}=0$.

Une récurrence simple montre que $\forall k \in [\![n+1,+\infty[\![$, $P_k=0$.

Soit $k\in[\![1,n]\!]$. $P_k = \left(a+\frac{b}{k}\right)P_{k-1}$.

$p=\frac{a}{a-1}$; $pa-p=a$; $a=\frac{p}{p-1} = -\frac{p}{q}$.

$a+\frac{b}{n+1}=0$ donc $b=-(n+1)a = (n+1)\frac{p}{q}$.

Alors $P_k = \left(a+\frac{b}{k}\right)P_{k-1} = \underbrace{\left(-\frac{p}{q}+\frac{1}{k}(n+1)\frac{p}{q}\right)}_{}P_{k-1} = \frac{n+1-k}{k}\frac{p}{q}P_{k-1}$. $P_k = \frac{n+1-k}{k}\frac{p}{q}P_{k-1}$.

Donc $\frac{q^k}{p^k}P_k = \frac{n+1-k}{k}\frac{q^{k-1}}{p^{k-1}}P_{k-1}$; $\frac{q^k}{p^k}k!(n-k)!P_k = \frac{q^{k-1}}{p^{k-1}}(k-1)!(n-(k-1))!P_{k-1}$.

Alors la suite $\left(\frac{q^k}{p^k}k!(n-k)!P_k\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est constante.

Donc $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $\frac{q^k}{p^k}k!(n-k)!P_k = \frac{q^0}{p^0}0!(n-0)!P_0 = n!\,P_0$.

$\forall k\in[\![0,n]\!]$, $P_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{p}{q}\right)^k P_0 = \binom{n}{k}p^kq^{n-k}\frac{P_0}{q^n}$.

$1=\sum_{k=0}^{n} P_k = \frac{P_0}{q^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k} = \frac{P_0}{q^n}(p+q)^n = \frac{P_0}{q^n}$; $\frac{P_0}{q^n}=1$.

Donc $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $P_k=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$. $X\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p)$.

R.

conclusion 1/ oui X peut suivre une loi binomiale !

2/ X suit une loi binomiale si et seulement si $a \neq 0$ et $-\frac{b}{a} \in \mathbb{N}^*$

3/ Si $a \neq 0$ et $-\frac{b}{a} = 1$: $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1)$ avec n quelconque dans $\mathbb{N}^*$.

Si $a \neq 0$ et $-\frac{b}{a} \in [\![2, +\infty[\![$: $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ avec $n = -\frac{b}{a} - 1$ et $p = \frac{a}{a-1}$.

d) • Supposons que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ au sens du programme.

Alors $p_0 = P(X=0) = 0$! Ceci est impossible comme nous l'avons vu.

• Supposons que X suive la loi géométrique " sur $\mathbb{N}$ " de paramètre p.

$X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_k = P(X=k) = pq^k$ avec $q = 1-p$.

Alors $pq^k = p_k = (a + \frac{b}{k}) p_{k-1} = (a + \frac{b}{k}) pq^{k-1}$ et ceci pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $q = a + \frac{b}{k}$ car $p \neq 0$ et $q \neq 0$ $(p \in]0, 1[)$.

Donc $q = a + \frac{b}{1} = a + \frac{b}{2}$. Alors $b = 0$. Ceci est contraire à l'hypothèse.

Ainsi X ne peut pas suivre une loi géométrique.

Question 7 ESCP 2012 $\boxed{\text{F 1}}$ G. BURNEL et L. CHICHEPORTICHE

On considère un certain jeu de casino et on note X la variable aléatoire égale au gain du casino à chaque partie jouée. Un joueur joue une partie et il note X_0 la variable aléatoire égale à la somme qu'il perd.

Pour mesurer sa malchance, celui-ci observe les pertes X_1, X_2, ..., X_n, ... des joueurs suivants, en supposant que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X.

Il s'intéresse à l'indice du premier joueur qui perd plus que lui, autrement dit à la variable aléatoire N du plus petit indice n tel que l'événement $\{X_n > X_0\}$ soit réalisé.

a) Justifier que $P(N > n-1) = \dfrac{1}{n}\cdot$

b) Le joueur a-t-il raison de penser qu'il est vraiment malchanceux ?

Non le joueur n'a visiblement pas de raison de penser qu'il est malchanceux mais les candidats qui ont eu à traiter cet exercice si (encore que...). Il manque visiblement une hypothèse...

Pour l'anecdote l'un de mes deux élèves ci-dessus à eu 20 à son épreuve et l'autre 11...

Supposons que le résultat soit juste. En l'appliquant pour n=2 il vient $P(X_1 \leqslant X_0) = \dfrac{1}{2}\cdot$ *En considérant que* $X_1 - X_0$ *et* $X_0 - X_1$ *ont même loi et en remarquant que* $P(X_1 < X_0) + P(X_0 < X_1) + P(X_1 = X_0) = 1$ *il vient rapidement* $P(X_1 = X_0) = 0$.

$\boxed{\text{Nous supposerons, pour traiter cet exercice, que } \forall (i,j)\in\mathbb{N}^2,\ i\neq j \Rightarrow P(X_i = X_j) = 0.}$

Dans cet exercice toutes les variables aléatoires sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

<u>Lemme 1</u>. $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $\forall (A_0, A_1,\dots,A_p)\in\mathcal{A}^{p+1}$, $P(A_0\cup A_1\cup\dots\cup A_p) \leqslant \sum_{k=0}^{p} P(A_k)$.

- Montrons ce résultat par récurrence sur p
- C'est clair pour $p=0$.
- Supposons la propriété vraie pour un élément p de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $p+1$

Soit $(A_0, A_1,\dots,A_{p+1})\in\mathcal{A}^{p+2}$. Posons $B = A_0\cup A_1\cup\dots\cup A_p$.

Par hypothèse de récurrence, $P(B)\leqslant P(A_0)+P(A_1)+\dots+P(A_p) = \sum_{k=0}^{p} P(A_k)$.

$P(B\cup A_{p+1}) = P(B)+P(A_{p+1}) - P(B\cap A_{p+1}) \leqslant P(B)+P(A_{p+1}) \leqslant \sum_{k=0}^{p} P(A_k) + P(A_{p+1}) = \sum_{k=0}^{p+1} P(A_k)$

Donc $P(A_0\cup A_1\cup\dots\cup A_{p+1}) \leqslant \sum_{k=0}^{p+1} P(A_k)$. Ceci achève la récurrence.

Fixons n dans $[\![1,+\infty[\![$. Posons $S_n = \bigcup_{0\leqslant i<j\leqslant n-1}\{X_i = X_j\}$. Notons que $S_n = \bigcup_{\substack{(i,j)\in[\![0,n-1]\!]^2\\ \text{et } i\neq j}}\{X_i=X_j\}$

<u>Lemme 2</u> 1°/ $P(S_n) = 0$

2°/ $\forall C\in\mathcal{A}$, $P(C) = P(C\cap\overline{S_n})$.

$$0\leqslant P(S_n) = P\Big(\bigcup_{0\leqslant i<j\leqslant n-1}\{X_i=X_j\}\Big) = P\Big(\bigcup_{j=1}^{n-1}\bigcup_{i=0}^{j-1}\{X_i=X_j\}\Big) \overset{\text{Lemme 1}}{\leqslant} \sum_{j=1}^{n-1} P\Big(\bigcup_{i=0}^{j-1}\{X_i=X_j\}\Big) \overset{\text{Lemme 1}}{\leqslant} \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=0}^{j-1}\underbrace{P(X_i=X_j)}_{=0} = 0$$

Alors $0\leqslant P(S_n)\leqslant 0$. $\underline{P(S_n)=0}$.

$\forall C\in\mathcal{A}$, $P(C) = P(C\cap\overline{S_n}) + P(C\cap S_n)$ et $\forall C\in\mathcal{A}$, $C\cap S_n\subset S_n$.

Donc $\forall C \in \mathcal{C}$, $0 \leq P(C \cap S_n) \leq P(S_n) = 0$. $\forall C \in \mathcal{C}$, $P(C \cap S_n) = 0$.

Alors $\forall C \in \mathcal{C}$, $P(C) = P(C \cap \overline{S_n})$.

Lemme 3. Si σ est une permutation de $[\![0, n-1]\!]$, $P(X_{\sigma(0)} \leq X_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq X_{\sigma(n-1)}) = \frac{1}{n!}$.

Notons $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![0, n-1]\!]$. Rappelons que $\operatorname{card} \mathcal{S}_n = n!$.

$$1 = P(\Omega) = P(\Omega \cap \overline{S_n}) = P\Big(\Big(\bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \{X_{\sigma(0)} \leq X_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq X_{\sigma(n-1)}\}\Big) \cap \overline{S_n}\Big)$$

$$1 = P\Big(\bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \big(\{X_{\sigma(0)} \leq X_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq X_{\sigma(n-1)}\} \cap \overline{S_n}\big)\Big) = P\Big(\bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \{X_{\sigma(0)} < X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n-1)}\}\Big).$$

Par incompatibilité il vient $1 = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} P(X_{\sigma(0)} < X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n-1)})$.

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$.
1/ $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ sont indépendantes
2/ $X_{\sigma(0)}, X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n-1)}$ sont indépendantes
3/ Pour tout i dans $[\![0, n-1]\!]$, $X_{\sigma(i)}$ a même loi que X_i

Alors $P(X_{\sigma(0)} < X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n-1)}) = P(X_0 < X_1 < \cdots < X_{n-1})$.

Donc $1 = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} P(X_{\sigma(0)} < X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n-1)}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} P(X_0 < X_1 < \cdots < X_{n-1}) = (\operatorname{card} \mathcal{S}_n) P(X_0 < X_1 < \cdots < X_{n-1})$

$1 = n! \times P(X_0 < X_1 < \cdots < X_{n-1})$. Ainsi $P(X_0 < X_1 < \cdots < X_{n-1}) = \frac{1}{n!}$.

De plus $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n$, $P(X_{\sigma(1)} < X_{\sigma(2)} < \cdots < X_{\sigma(n)}) = \frac{1}{n!}$.

Lemme 4 $P(\{X_1 \leq X_0\} \cap \{X_2 \leq X_0\} \cap \cdots \cap \{X_{n-1} \leq X_0\}) = \frac{1}{n} \ldots$ ou $P(N > n-1) = \frac{1}{n}$.

Notons que $\{N > n-1\}$ se réalise si et seulement aucun des événements $\{X_1 > X_0\}$, $\{X_2 > X_0\}, \ldots, \{X_{n-1} > X_0\}$ ne se réalise.

Alors $\{N > n-1\} = \bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{\{X_k > X_0\}} = \bigcap_{k=1}^{n-1} \{X_k \leq X_0\}$.

$$\{N > n-1\} = \{X_1 \leq X_0\} \cap \{X_2 \leq X_0\} \cap \cdots \cap \{X_{n-1} \leq X_0\}$$

Notons $\mathcal{S}_{n-1}$ l'ensemble des permutations de $[\![1,n-1]\!]$.

$$\{N > n-1\} = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}_{n-1}} \{X_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq X_{\sigma(n-1)} \leq X_0\}.$$

$$P(N>n-1) = P(\{N>n-1\} \cap \overline{S}_n) = P\Big(\Big(\bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}_{n-1}} \{X_{\sigma(1)} \leq X_{\sigma(2)} \leq \cdots \leq X_{\sigma(n-1)} \leq X_0\}\Big) \cap \overline{S}_n\Big).$$

$$P(N>n-1) = P\Big(\bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}_{n-1}} \big(\{X_{\sigma(1)} \leq X_{\sigma(2)} \leq \cdots \leq X_{\sigma(n-1)} \leq X_0\} \cap \overline{S}_n\big)\Big).$$

Incompatibilité.

$$P(N>n-1) = P\Big(\bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}_{n-1}} (X_{\sigma(1)} < X_{\sigma(2)} < \cdots < X_{\sigma(n-1)} < X_0)\Big) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n-1}} P(X_{\sigma(1)} < X_{\sigma(2)} < \cdots < X_{\sigma(n-1)} < X_0)$$

$$P(N>n-1) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n-1}} \frac{1}{n!} = \operatorname{Card} \mathcal{S}_{n-1} \times \frac{1}{n!} = (n-1)! \times \frac{1}{n!} = \frac{1}{n}.$$

$$\underline{\underline{P(N>n-1) = \frac{1}{n}.}}$$

b) Donc sur un groupe de n joueurs qui contient notre joueur la probabilité pour qu'il perde le plus est $\frac{1}{n}$.

Il n'est donc pas particulièrement malchanceux !

mais fallait-il tout cela pour l'affirmer ?

R.

Question 8 **ESCP 2012** F 1 Obtenue par **A. GAY**

λ et μ sont deux réels. On suppose λ n'est pas nul.

On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes définie par : $P_0 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = \lambda P_n + \mu P'_n$.

Q1. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{R}_2[X]$.

Q2. n est fixé dans $\mathbb{N}$ et Q est un élément de $\mathbb{R}_2[X]$. Existe-t-il P_0 dans $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $P_n = Q$?

Q1 Montrons par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$, P_n appartient à $\mathbb{R}_2[X]$.

- $P_0 \in \mathbb{R}_2[X]$ donc la propriété est vraie pour $n=0$.
- Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

L'hypothèse de récurrence indique que $P_n \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors $P'_n \in \mathbb{R}_2[X]$ et ainsi $\lambda P_n + \mu P'_n \in \mathbb{R}_2[X]$ donc P_{n+1} est un élément de $\mathbb{R}_2[X]$. Ceci achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n \in \mathbb{R}_2[X]$. $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{R}_2[X]$.

Q2 Posons $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\phi(P) = \lambda P + \mu P'$. Montrons que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

- $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\lambda P + \mu P' \in \mathbb{R}_2[X]$ donc $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\phi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

  ϕ est une application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $(P,Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$.

  $\phi(\alpha P+Q) = \lambda(\alpha P+Q) + \mu(\alpha P+Q)' = \lambda\alpha P + \lambda Q + \mu(\alpha P' + Q')$.

  $\phi(\alpha P+Q) = \lambda\alpha P + \lambda Q + \mu\alpha P' + \mu Q' = \alpha(\lambda P + \mu P') + \lambda Q + \mu Q' = \alpha\phi(P) + \phi(Q)$.

  $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall (P,Q) \in E^2,\ \phi(\alpha P+Q) = \alpha\phi(P) + \phi(Q)$. ϕ est linéaire.

Finalement ϕ est un endomorphisme de E.

- Soit $P = aX^2 + bX + c$ un élément de $\mathbb{R}_2[X]$.

$P \in \mathrm{Ker}\,\phi \Leftrightarrow \phi(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \Leftrightarrow \lambda P + \mu P' = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \Leftrightarrow \lambda(aX^2+bX+c) + \mu(2aX+b) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$.

$P \in \mathrm{Ker}\,\phi \Leftrightarrow (\lambda a)X^2 + (\lambda b + 2\mu a)X + \lambda c + b\mu = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda a = 0 \\ \lambda b + 2\mu a = 0 \\ \lambda c + b\mu = 0 \end{cases} \underset{\lambda\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a = 0 \\ \lambda b = 0 \\ \lambda c + b\mu = 0 \end{cases} \underset{\lambda\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ \lambda c = 0 \end{cases} \underset{\lambda\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

ϕ est injectif

Donc $\mathrm{Ker}\,\phi = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$. Comme ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension finie, ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Montrons par une même récurrence que pour tout k dans $\mathbb{N}$, ϕ^k est un automorphisme et $P_k = \phi^k(P_0)$.

R.

- La propriété est vraie pour $k=0$ car $\phi^0 = Id_{\mathbb{R}_2[X]}$.
- Supposons la propriété vraie pour k dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$.

Par hypothèse ϕ^k est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et $P_k = \phi^k(P_0)$.

Alors $\phi^{k+1} = \phi^k \circ \phi$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ comme composée de deux automorphismes de $\mathbb{R}_2[X]$ et $P_{k+1} = \phi(P_k) = \phi(\phi^k(P_0)) = \phi^{k+1}(P_0)$.

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, ϕ^k est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et $P_k = \phi^k(P_0)$.

Il est temps de répondre à la question ! Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathbb{R}_2[X]$.

ϕ^n étant un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, $\exists!\, P_0 \in \mathbb{R}_2[X]$, $\phi^n(P_0) = \varphi$. Alors $P_n = \varphi$.

Donc pour n fixé dans $\mathbb{N}$ et φ dans $\mathbb{R}_2[X]$ on peut choisir P_0 dans $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $P_n = \varphi$.

R.

Question 9 **ESCP 2012** $\boxed{\textbf{F 1}}$

A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AMB = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Montrer que A est nulle ou B est nulle.

Soit $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Posons $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$.

Soit $(p,q) \in [\![1,n]\!]^2$. AE_p est la $p^{\text{ième}}$ colonne de A, ${}^tE_q B$ est la $q^{\text{ième}}$ ligne de B et $E_p {}^tE_q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors $A E_p {}^tE_q B = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. $\begin{pmatrix} a_{1,p} \\ a_{2,p} \\ \vdots \\ a_{n,p} \end{pmatrix} (b_{q,1}\ b_{q,2} \cdots b_{q,n}) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Donc la matrice $(a_{i,p}\, b_{q,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nulle.

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,p}\, b_{q,j} = 0$.

Mieux $\forall (i,j,p,q) \in [\![1,n]\!]^4,\ a_{i,p}\, b_{q,j} = 0$.

ce qui peut encore s'écrire $\underline{\forall (i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4,\ a_{i,j}\, b_{k,\ell} = 0}$, non ?

1^{er} cas... $A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Gagné !

$2^{\text{ème}}$ cas... $A \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Alors $\exists (i_0, j_0) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i_0,j_0} \neq 0$.

Alors $\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i_0,j_0}\, b_{k,\ell} = 0$ et $a_{i_0,j_0} \neq 0$.

Donc $\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2,\ b_{k,\ell} = 0$. $B = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

$$\underline{\underline{\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AMB = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \Rightarrow A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \text{ ou } B = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}.}}$$

<u>Remarque</u>... $(E_p {}^tE_q)_{(p,q) \in [\![1,n]\!]^2}$ n'est autre que la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

R.

Question 10 ESCP 2012 $\boxed{\text{F1}}$ S. LY et N. KARPIEL

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire 3 boules simultanément et X, Y et Z sont les variables aléatoires égales au numéro des boules obtenues avec $X < Y < Z$.

Q1. Trouver la loi de Y.

Q2. Montrer que Y et $n+1-Y$ ont la même loi. Calculez $E(Y)$.

Nous supposerons évidemment que $n \geqslant 3$.

Q1.. $Y(\Omega) = [\![2, n-1]\!]$. $\forall k \in [\![2, n-1]\!]$, $P(Y=k) = \dfrac{(k-1)(n-k)}{\binom{n}{3}}$ ← choix de la valeur de X ; ← choix de la valeur de Z ; ← nombre de tirages.

$\forall k \in [\![2, n-1]\!]$, $P(Y=k) = \dfrac{6(k-1)(n-k)}{n(n-1)(n-2)}$.

Q2.. Posons $T = n+1-Y$.

- $T(\Omega) = [\![n+1-(n-1), n+1-2]\!] = [\![2, n-1]\!]$.
- $\forall k \in [\![2, n-1]\!]$, $P(T=k) = P(n+1-Y=k) = P(Y=n+1-k) = \dfrac{6(n+1-k-1)(n-(n+1-k))}{n(n-1)(n-2)}$.

Alors $T(\Omega) = [\![2, n-1]\!] = Y(\Omega)$ et $\forall k \in [\![2, n-1]\!]$, $P(T=k) = \dfrac{6(n-k)(k-1)}{n(n-1)(n-2)} = P(Y=k)$.

T et Y ont donc la même loi. Y et $n+1-Y$ ont la même loi.

Y prend un nombre fini de valeurs donc Y possède une espérance.

Alors $n+1-Y$ possède une espérance égale à celle de Y car $n+1-Y$ a même loi que Y.

Ainsi $n+1-E(Y) = E(n+1-Y) = E(Y)$. Alors $2E(Y) = n+1$.

$E(Y) = \dfrac{n+1}{2}$. Retrouvons ce résultat à la main. $E(Y) = \dfrac{6}{n(n-1)(n-2)} \displaystyle\sum_{k=2 \text{ ou } 1}^{n-1 \text{ ou } n} k(k-1)(n-k)$.

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} E(Y) = \sum_{k=1}^{n} (k^2-k)(n-k) = \sum_{k=1}^{n} \left[(n+1)k^2 - k^3 - nk\right] = (n+1)\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k^3 - n\sum_{k=1}^{n} k.$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} E(Y) = (n+1)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - n\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{12}\left[2(n+1)(2n+1) - 3n(n+1) - 6n\right]$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} E(Y) = \frac{n(n+1)}{12}(4n^2+6n+2-3n^2-3n-6n) = \frac{n(n+1)}{12}(n^2-3n+2) = \frac{n(n+1)}{12}(n-1)(n-2).$$

En divisant par $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ on retrouve $E(Y) = \dfrac{n+1}{2}$.

R.

Question 11 ESCP 2012 F1 I. KARDASZEWICZ **Déjà vu en 2011**

$(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables alétaoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent la même loi exponentielle de paramètre a.

Soit x un réel strictement positif. Trouver la loi de la variable aléatoire N_x égale à $\text{Min}\{k \in \mathbb{N}^* \mid X_k > x\}$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} P(N_x > E(N_x))$.

Pour être complet nous supposons que N_x prend la valeur 0 si l'évènement $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}^*}\{X_k \leqslant x\}$ se réalise. Autrement dit si $\{k\in\mathbb{N}^* \mid X_k > x\} = \emptyset$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant P\left(\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty}\{X_k\leqslant x\}\right) \leqslant P\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n}\{X_k\leqslant x\}\right)$ par croissance de P...

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant P\left(\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty}\{X_k\leqslant x\}\right) \leqslant \underbrace{\prod\limits_{k=1}^{n} P(X_k\leqslant x)}_{\text{Par indépendance}} = (1-e^{-ax})^n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(1-e^{-ax})^n = 0$ car $|1-e^{-ax}| < 1$ puisque $0 < 1-e^{-ax} < 1$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient $0 \leqslant P\left(\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty}\{X_k\leqslant x\}\right) \leqslant 0$.

Alors $P(N_x = 0) = P\left(\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty}\{X_k\leqslant x\}\right) = 0$. $\underline{P(N_x=0)=0}$.

Soit $k\in\mathbb{N}^*$. $P(N_x = 1) = P(X_1 > x) = 1 - P(X_1\leqslant x) = e^{-ax}$.

Supposons $k \geqslant 2$. $P(N_x = k) = P(\{X_1\leqslant x\}\cap\{X_2\leqslant x\}\cap\dots\cap\{X_{k-1}\leqslant x\}\cap\{X_k > x\})$.

Par indépendance il vient $P(N_x = k) = P(X_1\leqslant x)\,P(X_2\leqslant x)\cdots P(X_{k-1}\leqslant x)\,P(X_k > x)$.

$P(N_x = k) = (1-e^{-ax})^{k-1}e^{-ax}$. Formule qui vaut pour $k=1$.

Donc $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(N_x = k) = (1-e^{-ax})^{k-1}e^{-ax}$. $\underline{\underline{N_x \text{ suit la loi géométrique de paramètre } e^{-ax}}}$. Notons que $E(N_x) = e^{ax}$

Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. Posons $r_x = \text{Ent}(e^{ax}) + 1$.

$P(N_x > E(N_x)) = P(N_x > e^{ax}) = P(N_x \geqslant r_x) = \sum\limits_{k=r_x}^{+\infty}(1-e^{-ax})^{k-1}e^{-ax}$.

$P(N_x > E(N_x)) = e^{-ax}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(1-e^{-ax})^{k-1+r_x} = e^{-ax}(1-e^{-ax})^{r_x-1}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(1-e^{-ax})^k$.

$P(N_x > E(N_x)) = e^{-ax}(1-e^{-ax})^{r_x-1}\,\dfrac{1}{1-(1-e^{-ax})} = (1-e^{-ax})^{r_x-1}$.

$\underline{\underline{P(N_x > E(N_x)) = (1-e^{-ax})^{r_x-1}}}$. $\underline{\underline{P(N_x > E(N_x)) = (1-e^{-ax})^{\text{Ent}(e^{ax})}}}$

R.

$(1-e^{-ax})^{r_x-1} = e^{(r_x-1)\ln(1-e^{-ax})} = e^{\mathrm{Ent}(e^{ax})\ln(1-e^{-ax})}$.

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^{ax} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^{-ax} = 0$. Alors $\mathrm{Ent}(e^{ax}) \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} e^{ax}$ et $\ln(1-e^{-ax}) \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} -e^{-ax}$

Alors $\mathrm{Ent}(e^{ax})\ln(1-e^{-ax}) \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} e^{ax}(-e^{-ax}) = -1$.

donc $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left(\mathrm{Ent}(e^{ax})\ln(1-e^{-ax})\right) = -1$.

Alors par continuité de la fonction exponentielle en -1 on a $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^{\mathrm{Ent}(ax)\ln(1-e^{-ax})} = e^{-1}$.

Ainsi $\underline{\underline{\lim\limits_{x\mapsto+\infty} P(N_x > E(N_x)) = e^{-1}}}$.

Question 12 ESCP 2012 $\boxed{\text{F } 1^+}$ J. KY

X est une variable aléatoire à densité de densité $x \to \dfrac{1}{\ln 2}\dfrac{1}{1+x}\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

Montrer que $Y = \dfrac{1}{X} - \mathrm{Ent}\left(\dfrac{1}{X}\right)$ et X ont même loi.

Déjà vu en 2010.
Vu aussi en exercice préparé en 2003 (3.38).

Remarque. Considérons $f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln 2}\dfrac{1}{1+x}\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln 2}\dfrac{1}{1+x} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. f est positive sur $\mathbb{R}$ et continue au moins sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$.

$\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$ et $\int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt$ existent et valent 0.

$\int_0^1 f(t)\,dt$ existe car f est continue sur $[0,1]$. $\int_0^1 f(t)\,dt = \dfrac{1}{\ln 2}\Big[\ln|1+t|\Big]_0^1 = \dfrac{\ln 2 - \ln 1}{\ln 2} = 1$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et vaut 1. Ceci achève de montrer que <u>f est une densité de probabilité</u>.

Notons F_X la fonction de répartition de X.

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$. $\forall x \in [0,1[,\ F_X(x) = \int_0^x \dfrac{1}{\ln 2}\dfrac{1}{1+t}\,dt = \left[\dfrac{\ln|1+t|}{\ln 2}\right]_0^x = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln 2}$

$\forall x \in [1,+\infty[,\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^1 \dfrac{1}{\ln 2}\dfrac{1}{1+t}\,dt + \int_1^{x} 0\,dt = \int_0^1 \dfrac{1}{\ln 2}\dfrac{1}{1+t}\,dt = 1$.

Ainsi <u>$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \dfrac{\ln(1+x)}{\ln 2} & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}$</u>.

Posons $Z = \dfrac{1}{X}$. X prend ses valeurs dans $[0,1]$... presque sûrement donc Z prend presque sûrement ses valeurs dans $[1,+\infty[$. Notons F_Z sa fonction de répartition.

$\forall x \in]-\infty, 1[,\ F_Z(x) = 0$. Soit $x \in [1,+\infty[$.

$F_Z(x) = P(Z \leqslant x) = P\left(\dfrac{1}{X} \leqslant x\right) = P\left(X \geqslant \dfrac{1}{x}\right) = 1 - P\left(X < \dfrac{1}{x}\right) = 1 - P\left(X \leqslant \dfrac{1}{x}\right) = 1 - F_X\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

$x > 0$ et X prend presque sûrement ses valeurs dans $]0,1]$

X est une variable aléatoire à densité.

$F_Z(x) = 1 - \dfrac{\ln(1+1/x)}{\ln 2}$

<u>$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\ln(1+1/x)}{\ln 2} & \text{si } x \in [1,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$</u>.

R

$Y = Z - \mathrm{Ent}(Z)$ donc Y prend ses valeurs dans $[0,1[$.

Notons F_Y la fonction de répartition de Y. $\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_Y(x) = 0$ et $\forall x \in [1, +\infty[$, $F_Y(x) = 1$.

Posons $T = \mathrm{Ent}(Z)$. Soit $x \in [0,1[$

$(\{T=k\})_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet (ou quasi complet) d'événements.

Ainsi $F_Y(x) = P(Y \leq x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{T=k\} \cap \{Y \leq x\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{T=k\} \cap \{Z - T \leq x\})$.

$F_Y(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{T=k\} \cap \{Z \leq k+x\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{k \leq Z < k+1\} \cap \{Z \leq k+x\})$.

$F_Y(x) \underset{x<1}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} P(k \leq Z \leq k+x)$. Rappelons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Z(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\ln(1+1/x)}{\ln 2} & \text{si } x \in [1, +\infty[\\ 0 & \end{cases}$

Notons que l'on a aussi $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 1] \\ 1 - \dfrac{\ln(1+1/x)}{\ln 2} & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$

$x \mapsto 0$ est de classe C^1 sur $]-\infty, 1]$ et $x \mapsto 1 - \dfrac{\ln(1+1/x)}{\ln 2}$ est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$.

Alors F_Z est de classe C^1 sur $]-\infty, 1]$ et sur $[1, +\infty[$.

Donc F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \{1\}$. Ainsi Z est une variable aléatoire à densité.

Donc $F_Y(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(k \leq Z \leq k+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(k < Z \leq k+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(F_Z(k+x) - F_Z(k)\right)$.

$F_Y(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[1 - \dfrac{\ln(1+\frac{1}{k+x})}{\ln 2} - 1 + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{k})}{\ln 2}\right] = \dfrac{1}{\ln 2} \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) - \ln\left(\dfrac{x+k+1}{k+x}\right)\right]$.

$F_Y(x) = \dfrac{1}{\ln 2} \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[(\ln(k+1) - \ln k) - (\ln(x+k+1) - \ln(x+k))\right]$.

$F_Y(x) = \dfrac{1}{\ln 2} \lim_{n \to +\infty} \left(\ln(n+1) - \ln 1 - \ln(x+n+1) + \ln(x+1)\right) = \dfrac{1}{\ln 2} \lim_{n \to +\infty} \left[\ln(1+x) + \ln \dfrac{x+n+1}{n+1}\right]$

Alors $F_Y(x) = \dfrac{1}{\ln 2}\left[\ln(1+x) + \ln 1\right] = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln 2}$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \dfrac{\ln(1+x)}{\ln 2} & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$. Alors $F_Y = F_X$.

Donc $Y = \dfrac{1}{X} - \mathrm{Ent}\left(\dfrac{1}{X}\right)$ a même loi que X.

Exercice.. Notons que $Z = \dfrac{1}{X}$ et $Y = \dfrac{1}{X} - \mathrm{Ent}\left(\dfrac{1}{X}\right)$ sont des variables aléatoires.

R

Question 13 **ESCP 2012** $\boxed{\text{F } 1^-}$ **E. MESKHI**

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f nulle sur $]-\infty,0[$ et continue sur $[0,+\infty[$. On suppose que X possède une espérance.

Montre que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = 0$ et que $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(X > t)\,\mathrm{d}t$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\forall A \in [x,+\infty[$, $\forall t \in [x,A]$, $x f(t) \leq t f(t)$ (car $f(t) \geq 0$).

$\forall A \in [x,+\infty[$, $x\int_x^A f(t)dt = \int_x^A x f(t)dt \leq \int_x^A t f(t)dt$. (*)

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)dt$ convergent donc $\int_x^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_x^{+\infty} t f(t)dt$ convergent également

E(X) existe...

donc en faisant tendre A vers $+\infty$ dans (*) il vient : $x\int_x^{+\infty} f(t)dt \leq \int_x^{+\infty} t f(t)dt$.

Mieux $0 \leq x\int_x^{+\infty} f(t)dt \leq \int_x^{+\infty} t f(t)dt$

$\int_0^{+\infty} t f(t)dt$ converge donc $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty} t f(t)dt = 0$ (reste d'une intégrale convergente).

Alors par encadrement on obtient $\lim_{x\to+\infty}\left(x\int_x^{+\infty} f(t)dt\right) = 0$.

Soit G la restriction de la fonction de répartition F de X à $[0,+\infty[$.

Comme f est continue sur $[0,+\infty[$, G est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et $\forall t \in [0,+\infty[$, $G'(t) = f(t)$.

Soit $x \in [0,+\infty[$. intégration par parties avec $t \mapsto t$ et $t \mapsto 1-G(t)$ C^1 sur $[0,+\infty[$.

$\int_0^x P(X>t)dt = \int_0^x (1-F(t))dt = \int_0^x (1-G(t))dt = [t(1-G(t))]_0^x - \int_0^x t(0-f(t))dt$

$\int_0^x P(X>t)dt = x(1-G(x)) + \int_0^x t f(t)dt = x(1-F(x)) + \int_0^x t f(t)dt = x\int_x^{+\infty} f(t)dt + \int_0^x t f(t)dt$

$\int_0^x P(X>t)dt = x\int_x^{+\infty} f(t)dt + \int_0^x t f(t)dt$. Or $\lim_{x\to+\infty}\left(x\int_0^x f(t)dt\right) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x t f(t)dt = E(X)$.

Donc $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x P(X>t)dt = E(X)$

Alors $\int_0^{+\infty} P(X>t)dt$ converge et vaut $E(X)$.

R

Question 14 **ESCP 2012** $\boxed{\text{F 1}}$ **T. PILEWICZ**

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant toutes la même loi.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X_n = 1) = p$ et $P(X_n = -1) = q = 1 - p$ où p est un réel appartenant à $]0,1[$ et différent de $\dfrac{1}{2}$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, A_n est l'événement $\{X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 0\}$.

Q1. Calculer pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $P(A_{2n})$ et $P(A_{2n-1})$.

Q2. Donner la nature de la série de terme général $P(A_n)$ (on rappelle que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$).

Q1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons T_n la variable aléatoire égale au nombre de variables aléatoires de la suite $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ prenant la valeur 1.

1) T_n suit la loi binomiale de paramètres n et p car $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $P(X_k = 1) = p$.

2) $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 1 \times T_n + (-1) \times (n - T_n) = 2T_n - n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 2T_n - n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $P(A_{2n-1}) = P(X_1 + \cdots + X_{2n-1} = 0) = P(2T_{2n-1} - (2n-1) = 0) = P\left(T_{2n-1} = n - \frac{1}{2}\right) = 0$.

$P(A_{2n}) = P(X_1 + \cdots + X_{2n} = 0) = P(2T_{2n} - 2n = 0) = P(T_{2n} = n) = \binom{2n}{n} p^n q^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_{2n}) = \binom{2n}{n}(pq)^n$ et $P(A_{2n-1}) = 0$.

Q2 $$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} = \frac{2\sqrt{\pi n}\ (2n)^{2n}\ e^{2n}}{2\pi n\ \ n^{2n}\ \ e^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\, 2^{2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\, 4^n.$$

Alors $P(A_{2n}) = \binom{2n}{n}(pq)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}(4pq)^n$.

$\dfrac{P(A_{2n})}{(4pq)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{P(A_{2n})}{(4pq)^n} = 0$.

- $P(A_{2n}) \underset{n\to+\infty}{=} o\left((4pq)^n\right)$

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_{2n}) \geqslant 0$ et $(4pq)^n \geqslant 0$

- $4pq \geqslant 0$ et $1 - 4pq = 1 - 4p(1-p) = 1 - 4p + 4p^2 = (2p-1)^2 \overset{p \neq 1/2}{>} 0$.

donc $4pq \in [0, 1[$ (et même $4pq \in]0,1[$ car $p \in]0,1[$). La série de terme général $(4pq)^n$ est alors convergente.

R

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $P(A_{2n})$ converge. Notons S sa somme.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$. Rappelons que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(A_{2k-1}) = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_{2k})$ et $S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_{2k})$.

Alors $\lim_{n \to +\infty} S_{2n} = S$ et $\lim_{n \to +\infty} S_{2n+1} = S$. ce qui suffit pour dire que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge vers S.

Donc <u>la série de terme général $P(A_n)$ converge.</u>

<u>Exercice..</u> Examiner le cas $p = \frac{1}{2}$.