R QSP ESCP

Question 15 ESCP 2012 $\boxed{\text{F 1}}$ **M. ZYCH**

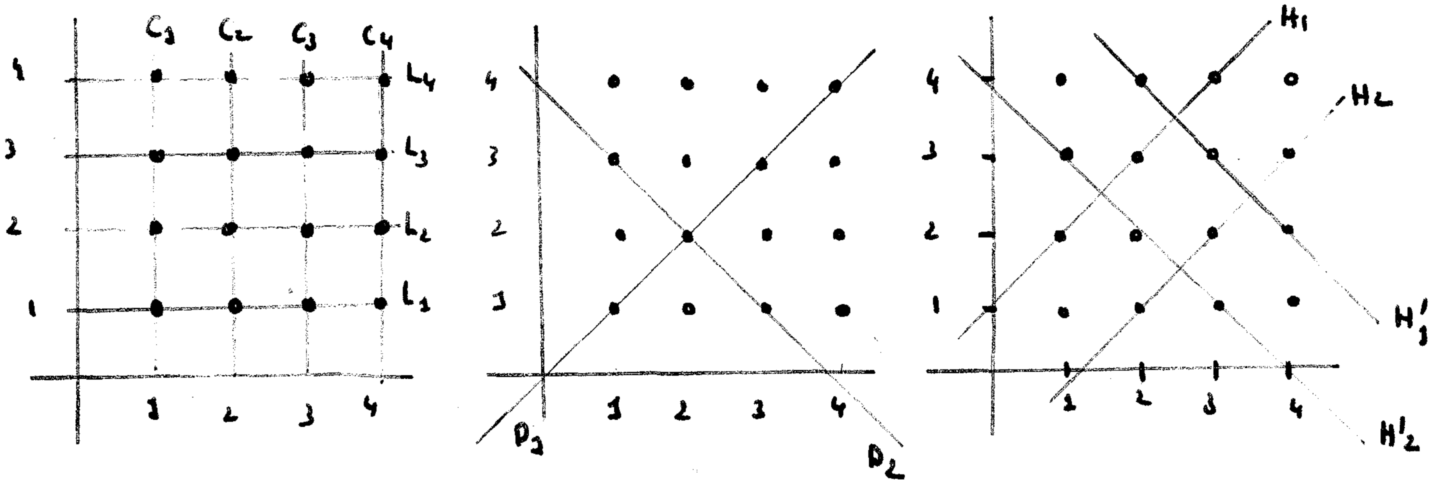
$E = [\![1,4]\!] \times [\![1,4]\!]$ est inclu dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure habituelle.

On choisit une partie de E constituée de 4 points de E (ce choix se fait de manière équiprobable).

Q1. Trouver la probabilité pour que ces quatre points soient alignés.

Q2. Trouver la probabilité d'avoir au moins trois points alignés.

Notons que E contient 16 points. Il y a $\binom{16}{4}$ manières de choisir quatre points de E.



(Q1) Les quatre points sont alignés si et seulement si les quatre points sont sur L_1 ou L_2 ou L_3 ou L_4 ou C_1 ou C_2 ou C_3 ou C_4 ou D_1 ou D_2.

Il y a donc exactement 10 manières de choisir une partie constituée de 4 points de E telle que ces quatre points soient alignés.

La probabilité pour que ces quatre points soient alignés est $\dfrac{10}{\binom{16}{4}}$ ou $\dfrac{1}{182}$ ($\simeq 0{,}0055$)

(Q2) • Le nombre de manières d'avoir quatre points alignés est 10 d'après Q1.

• Comptons le nombre de cas où trois points sont alignés et pas plus.

1er cas. Les trois points sont alignés sur C_1 ou C_2 ou C_3 ou C_4 ou L_1 ou L_2 ou L_3 ou L_4 ou D_1 ou D_2, le quatrième étant en dehors de la droite qui contient les trois autres.

Il y a à chaque fois $\binom{4}{3}$ manières de choisir les trois points alignés et $16-4$ manières de choisir le quatrième point.

Ce premier cas donne donc $10 \times \binom{4}{3} \times 12$ choix possibles ; soit encore $10\times 4\times 12$ ou 480.

2ème cas. Les trois points sont alignés sur H_1 ou H_2 ou H'_1 ou H'_2, le quatrième étant en dehors de la droite qui contient les trois autres.

Il y a à chaque fois une manière de choisir les trois points alignés et $16-3$ manières de choisir le quatrième point.

Ce second cas donne donc $4 \times 1 \times 13$ choix possibles. c'est à dire 52 choix.

le nombre de cas où trois points sont alignés et pas plus est $480+52$ c'est à dire 532.

Ainsi le nombre de manières d'avoir au moins trois points alignés est $10+532$ c'est à dire 542.

La probabilité pour qu'au moins trois points soient aligné est $\dfrac{542}{\binom{16}{4}}$.

$$\frac{542}{\binom{16}{4}} = \frac{2 \times 271}{\frac{16 \times 15 \times 14 \times 13}{4 \times 3 \times 2}} = \frac{2 \times 271}{4 \times 5 \times 7 \times 13} = \frac{271}{2 \times 5 \times 7 \times 13} = \frac{271}{910}$$

La probabilité pour qu'au moins trois points soient aligné est : $\dfrac{271}{910}$.

$\dfrac{271}{910} \simeq 0,2978$.

R

Question 16 **ESCP 2012** $\boxed{\text{F 1}}$ **S. TEIAR**

f est une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f(1)=0$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,dt$.

Q1. Nature de la suite de terme général u_n.

Q2. Nature de la série de terme général u_n.

Q1. $|f|$ est continue sur le segment donc $|f|$ possède un maximum sur $[0,1]$ que nous noterons M.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$0 \leq |u_n| = \left|\int_0^1 t^n f(t)\,dt\right| \underset{0\leq 1}{\leq} \int_0^1 |t^n f(t)|\,dt = \int_0^1 |t^n|\,|f(t)|\,dt = \int_0^1 t^n |f(t)|\,dt \underset{0\leq 1}{\leq} \int_0^1 M\, t^n\,dt$$

$\forall t \in [0,1],\ |f(t)| \leq M$ et $t^n \geq 0$

$0 \leq |u_n| \leq M \displaystyle\int_0^1 t^n\,dt = \frac{M}{n+1}$ ... et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

De plus $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{M}{n+1} = 0$ donc $\underline{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$ ... par encadrement. $\underline{(u_n)_{n\geq 0} \text{ converge vers } 0.}$

Q2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $t \mapsto t^{n+1}$ et f sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Ceci justifie l'intégration par parties suivante.

$$u_n = \int_0^1 t^n f(t)\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} f(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} f'(t)\,dt \underset{f(1)=0}{=} -\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,dt.$$

$$|(n+1)\,u_n| = \left|-\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,dt\right| = \left|\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,dt\right| \underset{0\leq 1}{\leq} \int_0^1 |t^{n+1} f'(t)|\,dt = \int_0^1 |t^{n+1}|\,|f'(t)|\,dt = \int_0^1 t^{n+1} |f'(t)|\,dt.$$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Ainsi f' est continue sur le segment $[0,1]$. $|f'|$ également.

Alors $|f'|$ possède un maximum sur $[0,1]$ que nous noterons M'.

$$(n+1)|u_n| = |(n+1)u_n| \leq \int_0^1 t^{n+1}|f'(t)|\,dt \leq M' \int_0^1 t^{n+1}\,dt = M' \times \frac{1}{n+2}.\ \text{donc } |u_n| \leq \frac{M'}{(n+1)(n+2)}$$

$0 \leq 1$

$\forall t \in [0,1],\ |f'(t)| \leq M'$ et $t^{n+1} \geq 0$

Si $n \in \mathbb{N}^*$: $|u_n| \leq \dfrac{M'}{(n+1)(n+2)} \leq \dfrac{M'}{n^2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq |u_n| \leq \dfrac{M'}{n^2}$ et la série de terme général $\dfrac{M'}{n^2}$ converge. Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $|u_n|$ converge.

$\underline{\text{La série de terme général } u_n \text{ est absolument convergente donc convergente.}}$

R

Question 17 **ESCP 2012** $\boxed{\text{F 1}}$ **I. YAZBECK**

M est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXMX \geqslant 0$ et telle qu'il existe un élément non nul X_0 de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tX_0MX_0 = 0$.

Q1. Existe-t-il une matrice symétrique S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = {}^tSS$?

Q2. Existe-t-il une matrice orthogonale Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = {}^tQQ$?

Q3. Existe-t-il une matrice inversible A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = {}^tAA$.

Q1 $M \in M_n(\mathbb{R})$ et M est symétrique donc il existe une base orthonormée $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M.

Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$ notons α_i la valeur propre de M associée à X_i

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

1) P orthogonale car c'est la matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée.

2) $P^{-1}MP = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $0 \leqslant {}^tX_i M X_i = {}^tX_i(\alpha_i X_i) = \alpha_i \|X_i\|^2$ et $\|X_i\|^2 > 0$ car $X_i \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$

Alors $\alpha_i \geqslant 0$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i \geqslant 0$. Posons alors $\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \dots, \sqrt{\alpha_n})$.

$P^{-1}MP = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \Delta^2$. $M = P\Delta^2P^{-1} = (P\Delta P^{-1})^2$. Posons $S = P\Delta P^{-1} = P\Delta {}^tP$.

$S^2 = M$ et ${}^tS = {}^t(P\Delta P^{-1}) = {}^t(P\Delta {}^tP) = {}^t({}^tP)\,{}^t\Delta\,{}^tP = P\,{}^t\Delta\, P^{-1} = P\Delta P^{-1} = S$.

Δ est diagonale.

Alors $S \in M_n(\mathbb{R})$, S est symétrique et $M = S^2 = SS = {}^tSS$.

Donc <u>il existe une matrice symétrique S de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $M = {}^tSS$.</u>

Q2 Supposons qu'il existe une matrice orthogonale Q de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $M = {}^tQQ$. Alors $M = I_n$.

Donc $0 = {}^tX_0 M X_0 = {}^tX_0 I_n X_0 = {}^tX_0X_0 = \|X_0\|^2$. $\|X_0\|^2 = 0$. $\|X_0\| = 0$. $X_0 = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$!!

<u>Donc il n'existe pas de matrice orthogonale Q de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $M = {}^tQQ$.</u>

Q3 Supposons qu'il existe une matrice inversible A de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $M = {}^tAA$

$0 = {}^tX_0 M X_0 = {}^tX_0\,{}^tAAX_0 = {}^t(AX_0)AX_0 = \|AX_0\|^2$. $\|AX_0\|^2 = 0$. $\|AX_0\| = 0$. $AX_0 = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$

Or A est inversible donc $AX_0 = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$ donne $X_0 = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$!!

<u>Il n'existe pas de matrice inversible A de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $M = {}^tAA$.</u>

R.

Question 18 ESCP 2012 F 2 M. ARNOLD

A, B, C, D sont quatre événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On pose $a = P(A \cap B)$, $b = P(\overline{A} \cap B)$, $c = P(A \cap \overline{B})$, et $d = P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Exprimer $\text{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$ en fonction de a, b, c et d. Montrer $\text{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$

$\text{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = E(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B) - E(\mathbb{1}_A)E(\mathbb{1}_B) = E(\mathbb{1}_{A\cap B}) - P(A)P(B) = P(A\cap B) - P(A)P(B)$.

$P(A) = P(A\cap B) + P(A \cap \overline{B}) = a+c$ et $P(B) = P(B\cap A) + P(B\cap \overline{A}) = a+b$.

Ainsi $\underline{\underline{\text{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = a - (a+c)(a+b)}}$

On a de même $\text{cov}(\mathbb{1}_{\overline{A}}, \mathbb{1}_{\overline{B}}) = d - (d+b)(d+c)$. (faire $A \leftarrow \overline{A}$ et $B \leftarrow \overline{B}$ dans ce qui précède)

mais $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_{\overline{B}} = 1 - \mathbb{1}_B$. ainsi comme ... $\text{cov}(\alpha X+\beta, \alpha' Y+\beta') = \alpha\alpha' \text{cov}(X,Y)$

Alors $\text{cov}(\mathbb{1}_{\overline{A}}, \mathbb{1}_{\overline{B}}) = \text{cov}(1-\mathbb{1}_A, 1-\mathbb{1}_B) = (-1)(-1)\text{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = \text{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$

Ainsi $\underline{\underline{\text{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = d - (d+b)(d+c)}}$.

Donc $2\text{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = a - (a+c)(a+b) + d - (d+b)(d+c)$

$2\text{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = a - a^2 - ac - ab - bc + d - d^2 - dc - bd - bc$

$2\text{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = a - a^2 + d - d^2 - b(a+c+d) - c(a+b+d)$.

Or $a+b+c+d = (P(A\cap B) + P(\overline{A}\cap B)) + (P(A\cap \overline{B}) + P(\overline{A}\cap\overline{B})) = P(B) + P(\overline{B}) = 1$.

Alors $\underline{\underline{2\text{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = a(1-a) + d(1-d) - b(1-b) - c(1-c)}}$.

$\forall x \in [0,1]$, $x(1-x) = -x^2 + x = -(x^2 - x) = -\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}$.

$\underline{\forall x \in [0,1],\ 0 \leqslant x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}}$. Notons que a, b, c et d sont dans $[0,1]$.

Donc $2\text{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = a(1-a) + d(1-d) - b(1-b) - c(1-c) \leqslant a(1-a) + d(1-d) \leqslant 2 \times \frac{1}{4}$.

et $2\text{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = a(1-a) + d(1-d) - b(1-b) - c(1-c) \geqslant -b(1-b) - c(1-c) \geqslant -2 \times \frac{1}{4}$.

En divisant par 2 il vient $-\frac{1}{4} \leqslant \text{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) \leqslant \frac{1}{4}$.

Ainsi $\underline{\underline{\text{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) \in \left[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right]}}$.

$\longrightarrow$

R

On peut retrouver ce résultat en se rappelant que :

$|\mathrm{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)| \leq \sqrt{V(\mathbb{1}_A)}\sqrt{V(\mathbb{1}_B)}$.

Or $V(\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A^2) - (\mathbb{E}(\mathbb{1}_A))^2 \underset{\uparrow}{=} \mathbb{E}(\mathbb{1}_A) - (\mathbb{E}(\mathbb{1}_A))^2 = P(A) - (P(A))^2$.

$$\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{A \cap A} = \mathbb{1}_A$$

Alors $V(\mathbb{1}_A) = P(A) - (P(A))^2 = \frac{1}{4} - ((P(A))^2 - P(A) + \frac{1}{4}) = \frac{1}{4} - (P(A) - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$.

donc $\sqrt{V(\mathbb{1}_A)} \leq \frac{1}{2}$. De même $\sqrt{V(\mathbb{1}_B)} \leq \frac{1}{2}$. Ainsi $\sqrt{V(\mathbb{1}_A)}\sqrt{V(\mathbb{1}_B)} \leq \frac{1}{4}$.

donc $|\mathrm{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)| \leq \frac{1}{4}$ et ainsi $\underline{\underline{\mathrm{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]}}$.

Question 19 **ESCP 2012** $\boxed{\textbf{F 1}}$ **A. DEROO**

p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$ de rang 2. f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et g une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. On suppose que $g \circ f = p$.

Calculer le rang de f et de g.

$g(f(\mathbb{R}^3)) = p(\mathbb{R}^3)$ donc $\dim g(f(\mathbb{R}^3)) = \dim p(\mathbb{R}^3) = \dim \operatorname{Im} p = \operatorname{rg} p = 2$.

Deux conséquences d'import.

1) $\dim f(\mathbb{R}^3) \geq 2$ ($\dim g(f(\mathbb{R}^3)) \leq \dim f(\mathbb{R}^3)$). $\dim \operatorname{Im} f \geq 2$. $\underline{\operatorname{rg} f \geq 2}$.

2) $g(f(\mathbb{R}^3)) \subset \operatorname{Im} g$ et $\dim g(f(\mathbb{R}^3)) = 2$ donc $\dim \operatorname{Im} g \geq 2$. $\underline{\operatorname{rg} g \geq 2}$.

Or $f(\mathbb{R}^3)$ est contenu dans $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2 donc $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim f(\mathbb{R}^3) \leq 2$. $\underline{\operatorname{rg} f \leq 2}$

Alors $\underline{\underline{\operatorname{rg} f = 2}}$.

$2 = \dim \mathbb{R}^2 = \dim \operatorname{Ker} g + \operatorname{rg} g$ donc $\underline{\operatorname{rg} g \leq 2}$. Alors $\underline{\underline{\operatorname{rg} g = 2}}$.

R.

Question 20 **ESCP 2012** $\boxed{\text{F 1}}$ **V. HUANG**

$n \in \mathbb{N}^*$ et X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui prend ses valeurs dans $[\![0,n]\!]$. $f : t \to E(t^X)$.

Q1. Montrer que pour tout élément k de $[\![1,n]\!]$ la dérivée $k^{\text{ème}}$ de f en 1 vaut $E\big(X(X-1)\dots(X-k+1)\big)$.

On pose $E_0(X) = 1$ et $\forall k \in [\![1,n]\!],\ E_k(X) = E\big(X(X-1)\dots(X-k+1)\big)$.

Q2. Montrer que pour tout élément j de $[\![0,n]\!]$, $P(X=j) = \dfrac{1}{j!}\displaystyle\sum_{k=j}^{n} \dfrac{(-1)^{k-j}}{(k-j)!} E_k(X)$.

Q1 Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

t^X est une variable aléatoire finie. donc t^X possède une espérance.

le théorème de transfert montre que $E(t^X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} t^i P(X=i)$.

Ainsi f coïncide avec une fonction polynôme sur $]0,+\infty[$. f est donc de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\forall t \in]0,+\infty[$, $f^{(k)}(t) = \displaystyle\sum_{i=k}^{n} i(i-1)\dots(i-k+1)\, t^{i-k} P(X=i)$.

Alors $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $f^{(k)}(1) = \displaystyle\sum_{i=k}^{n} i(i-1)\dots(i-k+1) P(X=i) = \sum_{i=0}^{n} i(i-1)\dots(i-k+1) P(X=i)$

$i(i-1)\dots(i-k+1) = 0$ si $i<k$

donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $f^{(k)}(1) = E\big(X(X-1)\dots(X-k+1)\big)$.

th de transfert

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $f^{(k)}(1) = E\big(X(X-1)\dots(X-k+1)\big)$.

Q2 $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $f^{(k)}(1) = E\big(X(X-1)\dots(X-k+1)\big) = E_k(X)$.

$f^{(0)}(1) = f(1) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} 1^i P(X=i) = \sum_{i=0}^{n} P(X=i) = 1 = E(1) = E_0(X)$. $f^{(0)}(1) = E_0(X)$.

donc $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $f^{(k)}(1) = E_k(X)$.

f est une fonction polynômiale de degré au plus n. La formule de Taylor avec reste intégral donne :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-1)^k}{k!} f^{(k)}(1) + \int_1^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$

Or $f^{(n+1)}$ est nulle sur $]0,+\infty[$.

donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-1)^k}{k!} f^{(k)}(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-1)^k}{k!} E_k(X)$.

8

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} x^j (-1)^{\ell-j} E_\ell(X) = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{\ell=j}^{n} \frac{1}{\ell!} \frac{\ell!}{j!(\ell-j)!} (-1)^{\ell-j} E_\ell(X) \right) x^j$

permutation des deux sommes.

Posons $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $\beta_j = \sum_{\ell=j}^{n} \frac{(-1)^{\ell-j}}{j!(\ell-j)!} E_\ell(X)$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum_{j=0}^{n} P(X=j) x^j = f(x) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j x^j$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum_{j=0}^{n} (P(X=j) - \beta_j) x^j = 0$

Alors la fonction polynôme $x \mapsto \sum_{j=0}^{n} (P(X=j) - \beta_j) x^j$ admet une infinité de zéros.

C'est donc la fonction polynôme nulle. Ses coefficients sont nuls.

Alors $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $P(X=j) - \beta_j = 0$. $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $P(X=j) = \sum_{\ell=j}^{n} \frac{(-1)^{\ell-j}}{j!(\ell-j)!} E_\ell(X)$.

Finalement $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $P(X=j) = \frac{1}{j!} \sum_{\ell=j}^{n} \frac{(-1)^{\ell-j}}{(\ell-j)!} E_\ell(X)$.

R

Question 21 **ESCP 2012** $\boxed{\text{F 1}}$ **C. GRASSET et C. HAYEM**

X est une variable aléatoire à densité qui possède un moment d'ordre 2.

Montrer que $E(|X|)$ existe et que $E(|X|) \leqslant \sqrt{E(X^2)}$.

Soit f une densité de X définie sur $\mathbb{R}$. $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc le théorème de transfert montre que $E(|X|)$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f(t)\,dt$ est absolument convergente. Or $\forall t \in \mathbb{R}$, $|t| f(t) \geqslant 0$.

Donc $E(|X|)$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f(t)\,dt$ converge.

X possède un moment d'ordre 2 donc une espérance. Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge.

Alors $-\int_{-\infty}^{0} t f(t)\,dt$ et $\int_{0}^{+\infty} t f(t)\,dt$ existent.

Donc $\int_{-\infty}^{0} |t| f(t)\,dt$ et $\int_{0}^{+\infty} |t| f(t)\,dt$ convergent. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f(t)\,dt$ converge.

Donc $\underline{\underline{E(|X|) \text{ existe}}}$.

Soit A et B deux réels tels que $A \leqslant B$. Cauchy-Schwarz (!?)

$$\int_A^B |t| f(t)\,dt \leqslant \left|\int_A^B |t| f(t)\,dt\right| = \left|\int_A^B \left(|t|\sqrt{f(t)}\right)\sqrt{f(t)}\,dt\right| \leqslant \sqrt{\int_A^B \left(|t|\sqrt{f(t)}\right)^2 dt}\sqrt{\int_A^B \left(\sqrt{f(t)}\right)^2 dt}$$

c'est une égalité !

Donc $\int_A^B |t| f(t)\,dt \leqslant \sqrt{\int_A^B t^2 f(t)\,dt}\sqrt{\int_A^B f(t)\,dt}$. En faisant tendre A vers $+\infty$ puis B vers $-\infty$ il vient : $\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f(t)\,dt \leqslant \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt}\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt}$ car toutes les intégrales convergent (X possède un moment d'ordre 2).

Alors $E(|X|) \leqslant \sqrt{E(X^2)}\sqrt{1}$.

$$\underline{\underline{E(|X|) \leqslant \sqrt{E(X^2)}}}$$

R

Question 22 **ESCP 2012** $\boxed{\textbf{F 1}}$ Obtenue par **S. TEIAR**

N et X sont deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On suppose que, pour tout n dans $\mathbb{N}$ la loi de X sachant $\{N = n\}$ est la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

Comparer les lois de X et de $N - X$.

Déja vu en 2011.

$(\{N=n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

L'hypothèse du texte suppose, sans doute, que pour tout n dans $\mathbb{N}$ $P(N=n)\neq 0$.

Alors la formule des probabilités totales donne :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ P(X=k)=\sum_{n=0}^{+\infty} P(N=n)\, P_{\{N=n\}}(X=k).$$

$$\forall (n,k)\in\mathbb{N}^2,\quad P_{\{N=n\}}(X=k)=\begin{cases} 0 & \text{si } k>n \\ \frac{1}{n+1} & \text{si } k\leq n\end{cases}.$$

Alors $\underline{\underline{\forall k\in\mathbb{N},\ P(X=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n+1}P(N=n).}}$

$N-X$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ car si N prend la valeur n, X prend une valeur dans $[\![0,n]\!]$.

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad P(N-X=k)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(\{N=n\}\cap\{N-X=k\})=\sum_{n=0}^{+\infty}P(\{N=n\}\cap\{X=n-k\})$$

Or $\forall (n,k)\in\mathbb{N}^2$, $P(X=n-k)=0$ si $n-k<0$, donc si $n<k$.

$$\text{Alors } \forall k\in\mathbb{N},\ P(N-X=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}P(\{N=n\}\cap\{X=n-k\})=\sum_{n=k}^{+\infty}P(N=n)\underbrace{P_{\{N=n\}}(X=n-k)}$$

$= \frac{1}{n+1}$ car $n-k\in[\![0,n]\!]$ lorsque $n\geq k$

$$\text{donc } \forall k\in\mathbb{N},\ P(N-X=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n+1}P(N=n).$$

Ainsi $\underline{\underline{X \text{ et } N-X \text{ ont même loi.}}}$

Question 23 **ESCP 2012** $\boxed{\text{F 1}}$ Obtenue par **S. TEIAR**

A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est inversible et qu'il existe q dans $\mathbb{N}^*$ telle que $B^q = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Montrer que $I_n + A^{-1}BA$ et $I_n + ABA^{-1}$ sont inversibles.

$I_n + A^{-1}BA = A^{-1}A + A^{-1}BA = A^{-1}I_nA + A^{-1}BA = A^{-1}(I_n+B)A$.

$I_n + ABA^{-1} = AA^{-1} + ABA^{-1} = AI_nA^{-1} + ABA^{-1} = A(I_n+B)A^{-1}$.

Alors $I_n + A^{-1}BA$ et $I_n + ABA^{-1}$ sont semblables à $I_n + B$

$B^q = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ donc X^q est un polynôme annulateur de B dont la seule racine est 0

Alors $Sp\, B \subset \{0\}$. Ainsi $-1 \notin Sp\, B$. donc $B - (-1)I_n$ est inversible.

$I_n + B$ est inversible. Comme $I_n + A^{-1}BA$ et $I_n + ABA^{-1}$ sont semblables à $I_n + B$:

$I_n + A^{-1}BA$ et $I_n + ABA^{-1}$ sont inversibles.

Question sans doute incomplète.

R

Question 24 **ESCP 2012** $\boxed{\text{F 1}}$ Obtenue par **S. TEIAR**

Q1. Montrer que la fonction $F : x \to \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ vérifie les propriétés d'une fonction de répartition.

Q2. Déterminer la loi de la borne supérieure M_n de n variables aléatoires indépendantes de même fonction de répartition F.

Q3. Étudier la convergence en loi de la suite $(M_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Déja vu en 2011.

Q1 • $\forall x \in \mathbb{R},\ 1+e^{-x} \geqslant 1 > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \dfrac{1}{1+e^{-x}} \leqslant 1$.

F est une application de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$

• $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} F(x) = 0$ car $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} (1+e^{-x}) = +\infty$

$\lim\limits_{x\mapsto +\infty} F(x) = 1$ car $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} (1+e^{-x}) = 1$

• F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = -\dfrac{(-e^{-x})}{(1+e^{-x})^2} = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \geqslant 0$.

F est croissante sur $\mathbb{R}$.

<u>Remarque</u>.. le premier point est contenu dans les deux suivants.

• $x \mapsto 1+e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et ne s'y annule pas.

Ainsi F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Les quatre points précédents montrent que F est la fonction d'une variable aléatoire à densité

<u>Ainsi F a largement les propriétés (caractéristiques) d'une fonction de répartition.</u>

<u>Remarque</u>.. Au point quatre on pouvait se contenter de montrer que F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant toutes pour fonction de répartition F. Posons $M_n = \operatorname{Sup}(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Notons F_n la fonction de répartition de M_n ... <u>Exercice</u>.. Montrer que M_n est une variable aléatoire.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = P(M_n \leqslant x) = P(\{X_1 \leqslant x\} \cap \{X_2 \leqslant x\} \cap \dots \cap \{X_n \leqslant x\})$.

Par indépendance on obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = P(X_1 \leqslant x) P(X_2 \leqslant x) \cdots P(X_n \leqslant x) = (F(x))^n$.

$\forall x \in \mathbb{R},\quad F_n(x) = \left(\dfrac{1}{1+e^{-x}}\right)^n$.

R

F_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Ainsi M_n est une variable aléatoire à densité et F_n' en est une densité.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F_n'(x) = n\,\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)^{n-1} = \frac{n e^{-x}}{(1+e^{-x})^{n+1}}$$

(Q3) Notons G_n la fonction de répartition de $M_n - \ln n$.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ G_n(x) = P(M_n - \ln n \leq x) = P(M_n \leq x + \ln n) = F_n(x+\ln n) = \left(\frac{1}{1+e^{-x-\ln n}}\right)^n$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ G_n(x) = \left(1+\frac{1}{n}e^{-x}\right)^{-n} = e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}e^{-x}\right)}$$. Soit $x\in\mathbb{R}$.

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}e^{-x}\right)=0$ donc $-n\ln\left(1+\frac{1}{n}e^{-x}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\left(\frac{1}{n}\right)e^{-x} = -e^{-x}$.

$\lim_{n\to+\infty}\left(-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-x}\right) = -e^{-x}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = e^{-e^{-x}}$. Posons $\forall x\in\mathbb{R},\ G(x) = e^{-e^{-x}}$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} G_n(x) = G(x)$. Montrons que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire.

- $\forall x\in\mathbb{R}$, $-e^{-x}<0$ donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $G(x) = e^{-e^{-x}} \in [0,1]$. G est une application de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$.
- $\lim_{x\to-\infty}(-e^{-x}) = -\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty} G(x) = 0$. $\lim_{x\to+\infty}(-e^{-x}) = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 1$.
- $x\mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. $x\mapsto -e^{-x}$ est croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $t\mapsto e^t$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

  Par composition G est croissante sur $\mathbb{R}$.

- $x\mapsto -e^{-x}$ et $t\mapsto e^t$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Par composition G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Ce tout suffit pour dire que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Ainsi la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité de fonction de répartition G ... et de densité $x\mapsto e^{-x}e^{-e^{-x}}$.

Question 25 **ESCP 2012** $\boxed{\textbf{F}}$ Obtenue par un élève.

On considère la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \displaystyle\int_0^{u_n} (1 - e^{-t})\,\mathrm{d}t$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Montrer que la série de terme général u_n converge.

$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = [t + e^{-t}]_0^{u_n} = u_n + e^{-u_n} - 1$.

Rappelons que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant x+1$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}\ e^{-x} \geqslant -x+1$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ e^{-u_n} \geqslant -u_n + 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + e^{-u_n} - 1 \geqslant 0$.

Comme $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0.}}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = e^{-u_n} - 1 \leqslant 0$ car $\forall n \in \mathbb{N},\ -u_n \leqslant 0$.

donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$. $\underline{\underline{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ est décroissante.}}}$

$(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée par 0 donc $\underline{\underline{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge.}}}$

Notons ℓ sa limite. $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n$ et $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n} - 1$.

En passant à la limite il vient $0 \leqslant \ell$ et $\ell = \ell + e^{-\ell} - 1$.

Alors $e^{-\ell} - 1 = 0$; $e^{-\ell} = 1$; $-\ell = \ln 1 = 0$, $\ell = 0$. $\underline{\underline{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers } 0.}}$

$\underline{\underline{\text{V1}}}$ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

- C'est vrai pour $n = 0$ car $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$
- Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$. Montrons la pour $n+1$.

Nous savons déjà que $u_{n+1} \geqslant 0$. Supposons que $u_{n+1} = 0$.

Alors $\displaystyle\int_0^{u_n} (1 - e^{-t})\,dt = 0$. De plus $u_n > 0$ et $t \mapsto 1 - e^{-t}$ est continue

et positive sur $[0, u_n]$. Alors $\forall t \in [0, u_n],\ 1 - e^{-t} = 0$.

$\forall t \in [0, u_n]$, $e^{-t} = 1$. $\forall t \in [0, u_n]$, $t = 0$!! Ceci est impossible car $u_n > 0$.

Ceci achève la récurrence. $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0.}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - e^{-u_n}$. Alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - e^{-0} = 0$.

R

Alors $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in [\![p, +\infty[\![, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$.

donc $\forall n \in [\![p, +\infty[\![, 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$.

Une récurrence simple donne alors : $\forall n \in [\![p, +\infty[\![, 0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-p} u_p$.

donc $\forall n \in [\![p, +\infty[\![, 0 \leq u_n \leq (2^p u_p) \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

La série de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$. Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général u_n.

V2 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$ et $\lim_{n \to +\infty} (u_n - u_0) = -u_0$.

Alors la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge. Il en est de même pour la série de terme général $u_n - u_{n+1}$

$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ donc $u_n - u_{n+1} = 1 - e^{-u_n} = -(e^{(-u_n)} - 1) \underset{n \to +\infty}{\sim} -(-u_n) = u_n$.

donc
- $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n - u_{n+1}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$
- La série de terme général $u_n - u_{n+1}$ converge.

Alors les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent la convergence de la série de terme général u_n.

La série de terme général u_n converge.

R.

Question 26 **ESCP 2012** [F2] Obtenue par un élève.

X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que $X+Y$ suive une loi de Bernoulli.

Montrer que l'une des deux variables est presque sûrement constante.

X est une variable aléatoire discrète. Alors $X(\Omega)=\{x_k\ ;\ k\in K\}$ où K est un intervalle non vide de $\mathbb{N}$ et $k\mapsto x_k$ une bijection de K sur $X(\Omega)$.

Soit p le paramètre de $X+Y$. $(\{X=x_k\})_{k\in K}$ est un système complet d'événements.

$1 = P(X+Y=1)+P(X+Y=0)$.

$1=\sum\limits_{k\in K} P(\{X=x_k\}\cap\{X+Y=1\}) + \sum\limits_{k\in K} P(\{X=x_k\}\cap\{X+Y=0\})$.

$1=\sum\limits_{k\in K} P(\{X=x_k\}\cap\{Y=1-x_k\}) + \sum\limits_{k\in K} P(\{X=x_k\}\cap\{Y=-x_k\})$. Par indépendance il

vient, $1=\sum\limits_{k\in K} P(X=x_k)\left[P(Y=1-x_k)+P(Y=-x_k)\right]$.

$1-x_k\neq -x_k$ donc $\{Y=1-x_k\}$ et $\{Y=-x_k\}$ sont incompatibles.

Alors $\sum\limits_{k\in K} P(X=x_k)=1=\sum\limits_{k\in K} P(X=x_k)\, P(\{Y=1-x_k\}\cup\{Y=-x_k\})$

Alors $\sum\limits_{k\in K} P(X=x_k)\left[1-P(\{Y=1-x_k\}\cup\{Y=-x_k\})\right]=0$.

Or $\forall k\in K$ $P(X=x_k)\left[1-P(\{Y=1-x_k\}\cup\{Y=-x_k\})\right]\geqslant 0$.

donc $\forall k\in K$, $P(X=x_k)\left[1-P(\{Y=1-x_k\}\cup\{Y=-x_k\})\right]=0$.

Alors $\forall k\in K$, $P(X=x_k)=0$ ou $1=P(\{Y=1-x_k\}\cup\{Y=-x_k\}) \overset{\text{incompatibilité}}{=} P(Y=1-x_k)+P(Y=-x_k)$.

<u>1er cas</u>.. X est presque sûrement constante. C'est gagné !

<u>2e cas</u>.. X n'est pas presque sûrement constante. Alors il existe deux éléments distincts α et β de $X(\Omega)$ tels que $P(X=\alpha)\neq 0$ et $P(X=\beta)\neq 0$.

Dans ces conditions $P(Y=1-\alpha)+P(Y=-\alpha)=1$ et $P(Y=1-\beta)+P(Y=-\beta)=1$.

Notons alors que si γ est un élément de $Y(\Omega)-\{1-\alpha,-\alpha\}$, $P(Y=\gamma)=0$ car

$P(Y=1-\alpha)+P(Y=-\alpha)=1$ et $\sum\limits_{y\in Y(\Omega)} P(Y=y)=1$.

R

$P(Y=1-\beta)+P(Y=-\beta)=1$. Donc $P(Y=1-\beta)\neq 0$ ou $P(Y=-\beta)\neq 0$.

<u>1er cas</u>.. $P(Y=1-\beta)\neq 0$. Alors $1-\beta = 1-\alpha$ ou $1-\beta=-\alpha$

$1-\beta=1-\alpha$ est impossible car $\alpha\neq\beta$. Alors $1-\beta=-\alpha$.

Donc $-\beta=-1-\alpha$ or $-1-\alpha\neq 1-\alpha$ et $-1-\alpha\neq-\alpha$

Ainsi $-\beta\neq 1-\alpha$ et $-\beta\neq-\alpha$. Alors $P(Y=-\beta)=0$.

Ce qui donne $P(Y=1-\beta)=1$. Y est presque sûrement constante.

<u>2ème cas</u>.. $P(Y=-\beta)\neq 0$. Alors $-\beta=1-\alpha$ ou $-\beta=-\alpha$.

$-\beta\neq-\alpha$ car $\beta\neq\alpha$ donc $-\beta=1-\alpha$. $1-\beta=2-\alpha$.

Or $1-\beta=2-\alpha\neq 1-\alpha$ et $1-\beta=2-\alpha\neq-\alpha$ donc $P(Y=1-\beta)=0$.

Ce qui donne $P(Y=-\beta)=1$. Y est presque sûrement constante.

<u>Finalement ou X est presque sûrement constante ou Y est presque sûrement constante.</u>

R

Question 27 **ESCP 2012** $\boxed{\textbf{F}}$ Obtenue par un élève.

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. X suit la loi exponentielle de paramètre λ et Y suit la loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$. $Z = XY$.

Z est-elle une variable aléatoire discrète ? à densité ?

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $A_x = \{\omega \in \Omega \mid Z(\omega) \leqslant x\}$. Soit $\omega \in \Omega$.

$$\omega \in A_x \Leftrightarrow X(\omega)Y(\omega) \leqslant x \Leftrightarrow \begin{cases} Y(\omega) = -1 \text{ et } -X(\omega) \leqslant x \\ \text{ou} \\ Y(\omega) = 0 \text{ et } 0 \leqslant x \\ \text{ou} \\ Y(\omega) = 1 \text{ et } X(\omega) \leqslant x \end{cases}.$$

1er cas... $x < 0$

$$\omega \in A_x \Leftrightarrow \begin{cases} Y(\omega) = -1 \text{ et } X(\omega) \geqslant -x \\ \text{ou} \\ Y(\omega) = 1 \text{ et } X(\omega) \leqslant x \end{cases}$$

Alors $A_x = \big(Y^{-1}(\{-1\}) \cap X^{-1}([-x, +\infty[)\big) \cup \big(Y^{-1}(\{1\}) \cap X^{-1}(]-\infty, x])\big)$.

$Y^{-1}(\{-1\})$, $X^{-1}([-x, +\infty[)$, $Y^{-1}(\{1\})$, $X^{-1}(]-\infty, x])$ sont des éléments de $\mathcal{A}$ car X et Y sont deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Comme $\mathcal{A}$ est stable par intersection et réunion, $A_x \in \mathcal{A}$.

Par incompatibilité on a $P(A_x) = P(Y^{-1}(\{-1\}) \cap X^{-1}([-x, +\infty[)) + P(Y^{-1}(\{1\}) \cap X^{-1}(]-\infty, x]))$.

Par indépendance il vient $P(A_x) = P(Y^{-1}(\{-1\}))P(X^{-1}([-x, +\infty[)) + P(Y^{-1}(\{1\}))P(X^{-1}(]-\infty, x]))$

$P(A_x) = P(Y=-1)P(X \geqslant -x) + P(Y=1)P(X \leqslant x) = P(Y=-1)(1 - P(X < -x)) + P(Y=1)P(X \leqslant x)$.

$P(A_x) = P(Y=-1)(1 - P(X \leqslant -x)) + P(Y=1)P(X \leqslant x) = \frac{1}{3}(1 - (1 - e^{\lambda x})) + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{1}{3} e^{\lambda x}$.

X est une variable à densité

$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$
Y est uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$

2ème cas... $x \geqslant 0$.

si $\omega \in \Omega$: $$\omega \in A_x \Leftrightarrow \begin{cases} Y(\omega) = -1 \text{ et } X(\omega) \geqslant -x \\ \text{ou} \\ Y(\omega) = 0 \\ \text{ou} \\ Y(\omega) = 1 \text{ et } X(\omega) \leqslant x \end{cases}.$$

$A_x = \big(Y^{-1}(\{-1\}) \cap X^{-1}([-x, +\infty[)\big) \cup Y^{-1}(\{0\}) \cup \big(Y^{-1}(\{1\}) \cap X^{-1}(]-\infty, x])\big)$.

X et Y sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ donc $Y^{-1}(\{-1\})$, $X^{-1}([-x, +\infty[)$, $Y^{-1}(\{0\})$, $Y^{-1}(\{1\})$, $X^{-1}(]-\infty, x])$ sont des éléments de $\mathcal{A}$ qui est stable par intersection et réunion.

Alors $A_x \in \mathcal{A}$.

R

Par incompatibilité il vient :

$P(A_x) = P(Y^{-1}(\{-1\}) \cap X^{-1}([x,+\infty[)) + P(Y^{-1}(\{0\})) + P(Y^{-1}(\{1\}) \cap X^{-1}(]-\infty,x]))$.

Par indépendance on obtient :

$P(A_x) = P(Y^{-1}(\{-1\}))P(X^{-1}([x,+\infty[)) + P(Y^{-1}(\{0\})) + P(Y^{-1}(\{1\}))\,P(X^{-1}(]-\infty,x]))$.

$P(A_x) = P(Y=-1)\,P(X\geqslant -x) + P(Y=0) + P(Y=1)\,P(X\leqslant x)$.

Notons que $P(Y=-1) = P(Y=0) = P(Y=1) = \frac{1}{3}$, $P(X\leqslant x) = 1 - e^{-\lambda x}$ et

$P(X\geqslant -x) = 1 - P(X< -x) = 1 - P(X\leqslant -x) = 1$.

Alors $P(A_x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(1 - e^{-\lambda x}) = 1 - \frac{1}{3}e^{-\lambda x}$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $Z^{-1}(]-\infty,x]) = A_x \in \mathcal{A}$ donc <u>Z est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$</u>. Notons F_Z sa fonction de répartition.

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-\lambda x} & \text{si } x\in\,]-\infty,0[\\ 1-\frac{1}{3}e^{-\lambda x} & \text{si } x\in[0,+\infty[\end{cases}.$$

$x\mapsto \frac{1}{3}e^{-\lambda x}$ et $x\mapsto 1-\frac{1}{3}e^{-\lambda x}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc F_Z est continue sur $]-\infty,0[$ et sur $[0,+\infty[$.

Alors <u>F_Z est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$</u>. $\lim_{x\to 0^-} F_Z(x) = \frac{1}{3} \neq \frac{2}{3} = F_Z(0)$

donc <u>F_Z n'est pas continue en 0</u>.

Ainsi <u>Z n'est pas une variable aléatoire à densité</u>.

F_Z a un point de discontinuité et un seul et Z n'est pas presque sûrement constante donc <u>Z n'est pas une variable aléatoire discrète</u>.

R

Question 28 **ESCP 2012** $\boxed{\text{F}}$ Obtenue par un élève.

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ v(A) = A + {}^tA.$

Q1. Montrer que v est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer v^2.

Q2. Montrer que v est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.

Q3. Déterminer $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} v$.

Il serait préférable d'inverser Q2 et Q3...

Q1 • $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ v(A) = A + {}^tA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. <u>$v$ est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$</u>

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$.

$v(\lambda A+B) = \lambda A + B + {}^t(\lambda A + B) = \lambda A + B + \lambda\, {}^tA + {}^tB = \lambda(A + {}^tA) + (B + {}^tB) = \lambda v(A) + v(B)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ v(\lambda A + B) = \lambda v(A) + v(B)$. <u>$v$ est linéaire</u>.

Ainsi <u>v est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$</u>

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$v^2(A) = v(v(A)) = v(A + {}^tA) = v(A) + v({}^tA) = A + {}^tA + {}^tA + {}^t({}^tA) = A + 2\,{}^tA + A = 2(A + {}^tA) = 2v(A)$.

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ v^2(A) = 2v(A)$. <u>$v^2 = 2v$.</u>

Q2 $v^2 - 2v = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$. $X^2 - 2X$ est un polynôme annulateur de v dont les zéros sont 0 et 2.

Alors $\operatorname{Sp} v \subset \{0, 2\}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $A \in \operatorname{Ker}(v) \Leftrightarrow A + {}^tA = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \Leftrightarrow {}^tA = -A$.

$A \in \operatorname{Ker}(v - 2\operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) \Leftrightarrow A + {}^tA - 2A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \Leftrightarrow {}^tA = A$.

Notons $\mathcal{S}_n$ (resp. $\mathcal{A}_n$) "l'ensemble" des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\operatorname{Ker} v = \mathcal{A}_n$ et $\operatorname{Ker}(v - 2\operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \mathcal{S}_n$.

<u>1er cas</u>.. $n = 1$. Alors $\forall A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}),\ v(A) = A + {}^tA = 2A$. $v = 2\operatorname{Id}_{\mathcal{M}_1(\mathbb{R})}$.

Alors $\operatorname{Sp} v = \{2\}$ et v est diagonalisable.

<u>2e cas</u>.. $n \geq 2$. $I_n \in \mathcal{S}_n$ donc $\mathcal{S}_n \neq \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$. Alors $\operatorname{Ker}(v - 2\operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) \neq \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$.

donc <u>$2 \in \operatorname{Sp} v$ et $SEP(v, 2) = \mathcal{S}_n$.</u>

R

Soit $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$.

${}^t(E_{1,2}-E_{2,1}) = {}^tE_{1,2} - {}^tE_{2,1} = E_{2,1} - E_{1,2} = -(E_{1,2}-E_{2,1})$.

Alors $E_{1,2}-E_{2,1} \in \mathcal{A}_n$ et $E_{1,2}-E_{2,1} \neq 0_{M_n(\mathbb{R})}$. $\operatorname{Ker} v \neq \{0_{M_n(\mathbb{R})}\}$.

Alors $\underline{0 \in Sp\, v \text{ et } SEP(v,0) = \mathcal{A}_n}$.

Donc $\underline{Sp\, v = \{0, 2\}}$.

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. $M = S + A$ avec $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$ $(*)$

${}^tS = \frac{1}{2}({}^tM + {}^t({}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM + M) = S$; $S \in \mathcal{S}_n$

${}^tA = \frac{1}{2}({}^tM - {}^t({}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM - M) = -A$; $A \in \mathcal{A}_n$.

Alors $M = S + A \in \mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n$. $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $M \in \mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n$. Ainsi $M_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n \subset M_n(\mathbb{R})$.

Alors $M_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n$. Soit $M \in \mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n$. ${}^tM = M$ et ${}^tM = -M$. $M = -M$; $2M = 0_{M_n(\mathbb{R})}$.
Ainsi $M = 0_{M_n(\mathbb{R})}$.

Finalement $\mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n = \{0_{M_n(\mathbb{R})}\}$ et $M_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n$. Alors $M_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.

$Sp\, v = \{0, 2\}$ et $SEP(v,2) \oplus SEP(v,0) = M_n(\mathbb{R})$. $\underline{v \text{ est diagonalisable}}$.

(Q3) Nous avons déjà vu que $\underline{\operatorname{Ker} v = \mathcal{A}_n}$.

$\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, ${}^tv(A) = {}^t(A + {}^tA) = {}^tA + {}^t({}^tA) = {}^tA + A = v(A)$. $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $v(A) \in \mathcal{S}_n$.

Alors $\operatorname{Im} v \subset \mathcal{S}_n$.

Soit $M \in \mathcal{S}_n$. $M \in SEP(v,2)$. $v(M) = 2M$. $M = \frac{1}{2}v(M) = v(\frac{1}{2}M)$. $M \in \operatorname{Im} v$.

$\forall M \in \mathcal{S}_n$, $M \in \operatorname{Im} v$. $\mathcal{S}_n \subset \operatorname{Im} v$.

Finalement $\underline{\operatorname{Im} v = \mathcal{S}_n}$.

Remarque.. Nous avons vu au niveau de $(*)$ que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont supplémentaires.
Mais si $M \in M_n(\mathbb{R})$ nous avons vu que $\exists!\,(S,A) \in M_n(\mathbb{R})$, $M = S + A$.
De plus $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.
Soit p la projection sur $\mathcal{S}_n$ parallèlement à $\mathcal{A}_n$. $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $p(M) = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$.
Alors $v = 2p$. Résultat qui permet de retrouver tout ce qui est demandé non ?

Question 29 **ESCP 2012** $\boxed{\text{F}}$ Obtenue par un élève.

$E = \mathbb{R}_n[X]$ et $F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$. E est munit du produit scalaire canonique. Déterminer $F^\perp$

Manque visiblement une question. Et si on rajoutait : trouver la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ de la projection orthogonale p_F sur F.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un élément de E.

$P \in F \iff P(1) = 0 \iff \sum_{k=0}^{n} a_k = 0 \iff a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 0$

Ainsi F est l'hyperplan d'équation $a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 0$ dans la base $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ qui est orthonormée (... pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}_n[X]$).

Alors $F^\perp$ est la droite vectorielle engendrée par l'élément P_0 de $\mathbb{R}_n[X]$ dont la famille des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ est $(1, 1, \ldots, 1)$.

Ainsi $F^\perp = \text{Vect}(P_0)$ avec $P_0 = 1 + X + \cdots + X^n$.

Soit $p_{F^\perp}$ la projection orthogonale sur $F^\perp$. $p_F = Id_E - p_{F^\perp}$.

$\|P_0\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} 1^2} = \sqrt{n+1}$. Posons $\varphi_0 = \frac{1}{\|P_0\|} P_0$. $\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{n+1}}(1 + X + \cdots + X^n)$.

(φ_0) est une base orthonormée de $F^\perp$ donc $\forall P \in E$, $p_{F^\perp}(P) = \langle P, \varphi_0 \rangle \varphi_0$.

Alors $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $p_{F^\perp}(X^k) = \langle X^k, \varphi_0 \rangle \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \varphi_0 = \frac{1}{n+1}(1 + X + \cdots + X^n)$.

Ainsi la matrice de $p_{F^\perp}$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\frac{1}{n+1}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Bref :

donc la matrice de p_F dans la base $\mathcal{B}$ est $I_{n+1} - \frac{1}{n+1} J_{n+1}$ où J_{n+1} est la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

La matrice de p_F dans la base $\mathcal{B}$ est encore $\frac{1}{n+1}\begin{pmatrix} n & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & n \end{pmatrix}$ ou $\frac{1}{n+1}\begin{pmatrix} n & & (-1) \\ & \ddots & \\ (-1) & & n \end{pmatrix}$.