R.

R.

Question 1 **ESCP 2013** $\boxed{\textbf{F2}}$

a) Soit $u \geqslant 1$. Comparer $\ln u$ et $u-1$.

b) Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$ telle que $f(0)=1$ et pour tout $x>0, f(x)>1$.

On suppose que : $\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) \geqslant \dfrac{1}{\ln(f(x))}$. Montrer que : $\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x) \geqslant 1+\sqrt{2x}$.

Déjà vu à l'ESCP en 2010.

---

a) ln est concave sur $]0,+\infty[$. Alors sa courbe représentative est en dessous de toutes ses tangentes. En particulier de celle au point d'abscisse 1.

Ainsi $\forall u \in]0,+\infty[$, $\ln u \leqslant (u-1)\times \ln' 1 + \ln 1 = (u-1)\times \frac{1}{1}+0 = u-1$.

donc $\forall u \in]0,+\infty[,\ \ln u \leqslant u-1$. Alors $\forall u \in [1,+\infty[,\ \ln u \leqslant u-1$.

b) $\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x)>1$ donc $\forall x \in]0,+\infty[$, $0<\ln(f(x))\leqslant f(x)-1$.

de plus $\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x) \geqslant \dfrac{1}{\ln(f(x))}>0$. $\forall x \in]0,+\infty[$, $1 \leqslant f'(x)\ln(f(x))$.

Alors $\forall x \in]0,+\infty[$, $1 \leqslant f'(x)\ln(f(x)) \leqslant f'(x)(f(x)-1)$ ... car $f'(x)>0$ pour $x \in]0,+\infty[$.

Ainsi $\forall x \in]0,+\infty[$, $1 \leqslant f'(x)(f(x)-1) = f'(x)f(x)-f'(x)$.

Notons que $x \mapsto f'(x)f(x)-f'(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Fixons x dans $]0,+\infty[$. Soit ε un élément de $]0,x[$.

$$\int_\varepsilon^x 1\,dt \underset{\substack{\uparrow\\ \varepsilon<x}}{\leqslant} \int_\varepsilon^x (f'(t)f(t)-f'(t))\,dt = \left[\tfrac{1}{2}(f(t))^2-f(t)\right]_\varepsilon^x = \tfrac{1}{2}(f(x))^2-\tfrac{1}{2}(f(\varepsilon))^2-f(x)+f(\varepsilon).$$

donc $x-\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}(f(x))^2-\frac{1}{2}(f(\varepsilon))^2-f(x)+f(\varepsilon)$ et ceci pour tout ε dans $]0,x[$.

f est continue en 0 et $f(0)=1$. Alors en faisant tendre ε vers 0 par valeurs supérieures il vient :

$x-0 \leqslant \frac{1}{2}(f(x))^2-\frac{1}{2}(1)^2-f(x)+1$; $x \leqslant \frac{1}{2}(f(x))^2-f(x)+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left[(f(x))^2-2f(x)+1\right]$.

donc $2x \leqslant (f(x)-1)^2$. Or $2x \geqslant 0$ et $f(x)-1\geqslant 0$ donc $\sqrt{2x}\leqslant f(x)-1$. $f(x)\geqslant 1+\sqrt{2x}$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x)\geqslant 1+\sqrt{2x}$. Rappelons que $f(0)=1$ et $1+\sqrt{2\times 0}=1$.

Ainsi $\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x)\geqslant 1+\sqrt{2x}$.

19-11-2013

Question 2 **ESCP 2013** $\boxed{\textbf{F2}}$

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 (f(t))^n \, dt$, et on suppose que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

1. En raisonnant par l'absurde, montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $|f(t)| \leqslant 1$.
2. En considérant la suite $(I_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) \in \{-1, 0, 1\}$.
3. En déduire f.

Q1 Supposons qu'il existe t_0 dans $[0,1]$ tel que $|f(t_0)| > 1$.

Pour faciliter les écritures posons $g = |f|$. $g(t_0) > 1$.

Posons $\lambda_0 = \dfrac{g(t_0)+1}{2}$ et montrons que l'on peut trouver deux éléments α et β

de $[0,1]$ tel que : $\alpha < \beta$ et $\forall t \in [\alpha, \beta]$, $g(t) > \lambda_0$.

g est continue en t_0. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in [0,1]$, $|t-t_0| < \eta \Rightarrow |g(t) - g(t_0)| < \varepsilon$.

Posons $\varepsilon = \dfrac{g(t_0)-1}{2}$. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ car $g(t_0) > 1$.

Alors $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in [0,1]$, $|t - t_0| < \eta \Rightarrow |g(t) - g(t_0)| < \varepsilon = \dfrac{g(t_0)-1}{2}$.

donc $\forall t \in [0,1] \cap]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$, $-\dfrac{g(t_0)-1}{2} < g(t) - g(t_0) < \dfrac{g(t_0)-1}{2}$. En particulier :

$\forall t \in [0,1] \cap]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$, $-\dfrac{g(t_0)-1}{2} < g(t) - g(t_0)$.

$\forall t \in [0,1] \cap]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$, $g(t) > -\dfrac{g(t_0)-1}{2} + g(t_0) = \dfrac{g(t_0)+1}{2} = \lambda_0$.

Alors $\forall t \in [0,1] \cap \left[t_0 - \dfrac{\eta}{2}, t_0 + \dfrac{\eta}{2}\right]$, $g(t) > \lambda_0$.

Posons $\alpha = \max\left(0, t_0 - \dfrac{\eta}{2}\right)$ et $\beta = \min\left(1, t_0 + \dfrac{\eta}{2}\right)$. Alors $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$.

De plus $\forall t \in [\alpha, \beta]$, $g(t) > \lambda_0$. Nous avons encore $\forall t \in [\alpha, \beta]$, $g(t) \geqslant \lambda_0$.

Rappelons que $g(t_0) > 1$ donc $\lambda_0 = \dfrac{g(t_0)+1}{2} > 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $I_{2n} = \displaystyle\int_0^1 (f(t))^{2n} dt = \int_0^1 |f(t)|^{2n} dt = \int_0^1 (g(t))^{2n} dt \geqslant \int_\alpha^\beta (g(t))^{2n} dt$.

g est positive sur $[0,1]$

$I_{2n} \geqslant \displaystyle\int_\alpha^\beta (g(t))^{2n} dt \geqslant \int_\alpha^\beta (\lambda_0)^{2n} dt = (\beta - \alpha)\, \lambda_0^{2n}$.

$g(t) \geqslant \lambda_0 \geqslant 1$ si $t \in [\alpha, \beta]$

Or $\lambda_0 > 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \lambda_0^{2n} = +\infty$. Comme $\beta - \alpha$ est strictement positif : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left((\beta-\alpha)\lambda_0^{2n}\right) = +\infty$.

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_{2n} = +\infty$. Dans ces conditions $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas prendre qu'un nombre fini de valeurs. Ainsi il n'existe pas d'élément t_0 de $[0,1]$ tel que $|f(t_0)|>1$.

Finalement : $\underline{\forall t\in[0,1],\ |f(t)|\leq 1.}$

(Q2) Supposons qu'il existe t_1 dans $[0,1]$ tel que $f(t_1)\notin\{-1,0,1\}$.

Alors $\forall t\in[0,1],\ |f(t)|\leq 1$ et $f(t_1)\notin\{-1,0,1\}$

donc $\forall t\in[0,1],\ |f(t)|\leq 1$ et $0<|f(t_1)|<1$. Soit $n\in\mathbb{N}$.

Ainsi 1/ $\forall t\in[0,1],\ (f(t))^{2n}(1-f^2(t))\geq 0$.

2/ $\exists t_1\in[0,1],\ (f(t_1))^{2n}(1-f^2(t_1))>0$.

Alors $I_{2n}-I_{2n+2}=\int_0^1 (f(t))^{2n}[1-f^2(t)]\,dt>0$ car $t\mapsto (f(t))^{2n}(1-f^2(t))$

est continue et positive sur $[0,1]$ et $t\mapsto (f(t))^{2n}(1-f^2(t))$ n'est pas identiquement

nulle sur $[0,1]$.

Finalement : $\forall n\in\mathbb{N},\ I_{2n}-I_{2n+2}>0$. Alors $(I_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement

décroissante donc cette suite prend une infinité de valeurs. Il en est alors

de même pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ceci est contraire à l'hypothèse.

Ainsi il n'existe pas d'élément t_1 de $[0,1]$ tel que $f(t_1)\notin\{-1,0,1\}$.

Finalement : $\underline{\forall t\in[0,1],\ f(t)\in\{-1,0,1\}.}$

(Q3) f est continue sur le segment $[0,1]$. Ainsi f possède un maximum M sur $[0,1]$ et un minimum m sur $[0,1]$. De plus $f([0,1])=[m,M]$. Or $f([0,1])$ contient un nombre fini de valeurs car $\forall t\in[0,1],\ f(t)\in\{-1,0,1\}$. Nécessairement $m=M$.

Alors $f([0,1])$ est réduit à un point et $\forall t\in[0,1],\ f(t)\in\{-1,0,1\}$.

Ainsi f est constante sur $[0,1]$ et vaut -1, 0 ou 1.

Ainsi $\underline{\forall t\in[0,1],\ f(t)=-1 \text{ ou } \forall t\in[0,1],\ f(t)=0 \text{ ou } \forall t\in[0,1],\ f(t)=1.}$

__Remarque__.. Notons que si $\forall t\in[0,1],\ f(t)=-1$ ou si $\forall t\in[0,1],\ f(t)=0$ ou si $\forall t\in[0,1],\ f(t)=1$ la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ prend un nombre fini de valeurs ... ce qui assure la réciproque.

27-11-2013

R.

Question 3 **ESCP 2013** $\boxed{\textbf{F1}^+}$

Soit f une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Montrer que pour tout élément x de $[0,+\infty[$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,dt$ converge.

Notons F la primitive de f sur $\mathbb{R}^+$ qui prend la valeur 0 en 0.

Soit $x \in]0,+\infty[$. Notons que $\underline{t \to e^{-xt} f(t)}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

F est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$. $u : t \mapsto e^{-xt}$ également.

De plus $F' = f$ et $\forall t \in [0,+\infty[$, $u'(t) = -x e^{-xt}$.

Ceci justifie l'intégration par parties qui suit. Soit $A \in [0,+\infty[$.

$$\int_0^A e^{-xt} f(t)\,dt = \left[e^{-xt}F(t)\right]_0^A - \int_0^A (-xe^{-xt})F(t)\,dt \underset{F(0)=0}{=} e^{-xA}F(A) + x\int_0^A e^{-xt}F(t)\,dt.$$

$$\int_0^A e^{-xt} f(t)\,dt \overset{F(0)=0}{=} e^{-xA}\int_0^A f(t)\,dt + x\int_0^A e^{-xt}F(t)\,dt \quad \text{et ceci pour tout } A \text{ dans } [0,+\infty[. \quad (*)$$

1°/ $A \mapsto e^{-xA}$ admet pour limite 0 en $+\infty$.

De plus $A \mapsto \int_0^A f(t)\,dt$ admet pour limite $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ en $+\infty$ car $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Ainsi par produit $\underline{A \mapsto e^{-xA}\int_0^A f(t)\,dt \text{ admet pour limite } 0 \text{ en } +\infty}$. $(\bullet)$

2°/ Montrons alors que $A \mapsto \int_0^A e^{-xt}F(t)\,dt$ admet une limite finie en $+\infty$.

Cela revient à montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-xt}F(t)\,dt$ est convergente. Montrons d'abord que F est bornée sur $[0,+\infty[$.

$\forall A \in [0,+\infty[$, $F(A) = F(A) - F(0) = \int_0^A f(t)\,dt$. Or $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente donc $A \mapsto \int_0^A f(t)\,dt$ admet une limite finie L en $+\infty$ $\left(L = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt\right)$. Ainsi F admet pour limite L en $+\infty$ et $L \in \mathbb{R}$.

Ainsi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists A \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in [0,+\infty[$, $t > A \Rightarrow |F(t) - L| < \varepsilon$.

En particulier $\exists A \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in [0,+\infty[$, $t > A \Rightarrow |F(t) - L| < 1$.

Alors $\forall t \in]A,+\infty[$, $|F(t)| = |(F(t)-L)+L| \leq |F(t)-L| + |L| < 1 + |L|$.

$\underline{\forall t \in]A,+\infty[,\ |F(t)| \leq 1+|L|}$. De plus F est continue sur le segment $[0,A]$.

Ainsi F est bornée sur $[0,A]$. Alors $\exists M \in \mathbb{R}_+^*$, $\underline{\forall t \in [0,A],\ |F(t)| \leq M}$.

Finalement $\forall t\in[0,+\infty[$, $|F(t)|\le \max(M, 1+|L|)$. Posons $M'=\max(M,1+|L|)$.

Donc $\forall t\in[0,+\infty[$, $|F(t)|\le M'$. <u>F est bornée sur $[0,+\infty[$.</u>

<u>Remarque</u>.- On aurait pu se contenter de montrer que F est bornée au voisinage de $+\infty$.

- $t\mapsto e^{-xt}F(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
- $\forall t\in[0,+\infty[$, $0\le |e^{-xt}F(t)| = e^{-xt}|F(t)|\le M'e^{-xt}$.
- $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt$ converge car $x>0$. $\int_0^{+\infty} M'e^{-xt}\,dt$ converge également.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors que $\int_0^{+\infty}|e^{-xt}F(t)|\,dt$ converge.

$\int_0^{+\infty} e^{-xt}F(t)\,dt$ est donc absolument convergente donc convergente.

Ainsi $A\mapsto \int_0^A e^{-xt}F(t)\,dt$ admet une limite finie en $+\infty$. (••)

La relation (*) et ce que nous venons de montrer permettent de dire que $A\mapsto\int_0^A e^{-xt}f(t)\,dt$ admet une limite finie en $+\infty$. ↳ (•) + (••)

Ainsi $\int_0^{+\infty}e^{-xt}f(t)\,dt$ converge et ce pour tout x strictement positif.

Or $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge par hypothèse.

Finalement, pour tout élément x de $[0,+\infty[$, $\int_0^{+\infty}e^{-xt}f(t)\,dt$ converge.

27-11-2013

P.

Question 4 ESCP 2013 $\boxed{\textbf{F1}}$

Soit E l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant la relation : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ P(zz') = P(z)\,P(z')$.

a) Déterminer les polynômes de $\mathbb{C}_1[X]$ éléments de E.

b) Déterminer tous les polynômes éléments de E.

Très franchement a) n'apporte rien ! Alors commençons par b) !!

* Supposons que P soit un élément de E.

1er cas.. $\deg P \leq 0$. $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, $P = \lambda$.

Alors $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\lambda = P(zz') = P(z)\,P(z') = \lambda\lambda = \lambda^2$.

Ainsi $0 = \lambda - \lambda^2 = \lambda(1-\lambda)$. $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

Par conséquent $P = 0_{\mathbb{C}[X]}$ ou $P = 1$.

2ème cas.. $\deg P \geq 1$. Rappelons que P est scindé. Soit z_0 une racine de P.

$\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z z_0) = P(z)P(z_0) = P(z) \times 0 = 0$. Alors pour tout z dans $\mathbb{C}$, $z z_0$ est un zéro P.

Supposons $z_0 \neq 0$. $z \mapsto z z_0$ est alors une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. donc tout élément de $\mathbb{C}$ est zéro de P !! or $\deg P \geq 1$!

Ainsi nécessairement $z_0 = 0$. P est scindé et 0 est son seul zéro.

Ainsi $\exists c \in \mathbb{C}$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $P = c\,X^n$. comme $\deg P \geq 1$: $c \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $c\,(zz')^n = P(zz') = P(z)\,P(z') = c z^n\, c z'^n$.

donc $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $c z^n z'^n = c^2 z^n z'^n$.

En particulier en faisant $z = 1$ et $z' = 1$ il vient $c = c^2$. donc $c = 1$ car $c \neq 0$.

Finalement $P = X^n$.

Résumons cette petite analyse.

Si $P \in E$ et si $\deg P \leq 0$: $P = 0_{\mathbb{C}[X]}$ ou 1. Si $P \in E$ et si $\deg P \geq 1$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $P = X^n$.

Mieux si $\underline{\underline{P \in E\ :\ P = 0_{\mathbb{C}[X]} \text{ ou } \exists n \in \mathbb{N},\ P = X^n}}$.

* Une petite réciproque s'impose.

- Posons $P = 0_{\mathbb{C}[X]}$. $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $P(zz') = 0 = 0 \times 0 = P(z)P(z')$. $\underline{P \in E}$.
- Soit P un élément de $\mathbb{C}[X]$ tel que : $\exists n \in \mathbb{N}$, $P = X^n$.

$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$, $P(zz') = (zz')^n = z^n z'^n = P(z)\,P(z')$. $\underline{P \in E}$!

Tout est dit : $\underline{\underline{E = \{X^n ;\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0_{\mathbb{C}[X]}\}}}$.

Question 5 **ESCP 2013** $\boxed{\text{F1}^-}$ **Jessica et Robin COHEN**

P, Q, R, S sont trois éléments de $\mathbb{R}_3[X]$. Les propositions suivantes sont-elles des conditions suffisantes à la non liberté de la famille (P, Q, R, S) ?

Proposition a) $P(0) = Q(0) = R(0) = S(0) = 0$

Proposition b) $P(0) = Q(0) = R(0) = S(0) = 1$

---

a) Supposons que : $P(0)=Q(0)=R(0)=S(0)=0$ et posons $\mathcal{H}=\{P\in\mathbb{R}_3[X] \mid P(0)=0\}$.

Notons que (P,Q,R,S) est une famille de 4 éléments de $\mathcal{H}$.

Soit $H\in\mathbb{R}_3[X]$.

$H\in\mathcal{H} \Leftrightarrow H(0)=0 \Leftrightarrow X$ divise $H \Leftrightarrow \exists A\in\mathbb{R}[X],\ H=XA \underset{H\in\mathbb{R}_3[X]}{\Leftrightarrow} \exists A\in\mathbb{R}_2[X],\ H=XA$.

$H\in\mathcal{H} \underset{\mathbb{R}_2[X]=\text{Vect}(1,X,X^2)}{\Leftrightarrow} \exists(\alpha,\beta,\delta)\in\mathbb{R}^3,\ H=X(\alpha+\beta X+\delta X^2) \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta,\delta)\in\mathbb{R}^3,\ H=\alpha X+\beta X^2+\delta X^3$.

Finalement $\mathcal{H}$ est le sous-espace de $\mathbb{R}_3[X]$ engendré par la famille (X,X^2,X^3).

Ainsi $\dim\mathcal{H}\overset{(*)}{\leq}3$. Or (P,Q,R,S) est une famille de 4 éléments de $\mathcal{H}$; elle ne peut pas être libre.

(*) notons en fait que $\dim\mathcal{H}=3$!

<u>$P(0)=Q(0)=R(0)=S(0)=0$ est une condition suffisante pour la non liberté de la famille (P,Q,R,S).</u>

b) Posons $P=1$, $Q=X+1$, $R=X^2+1$ et $S=X^3+1$.

- $P(0)=Q(0)=R(0)=S(0)=1$
- (P,Q,R,S) est une famille de 4 polynômes non nuls de degrés échelonnés de $\mathbb{R}_3[X]$.

Ainsi (P,Q,R,S) est une famille libre d'éléments de $\mathbb{R}_3[X]$.

Finalement, <u>$P(0)=Q(0)=R(0)=S(0)=1$ n'est pas une condition suffisante à la non liberté de la famille (P,Q,R,S).</u>

27-11-2013

P.

Question 6 **ESCP 2013** $\boxed{\mathbf{F1^+}}$ **Natacha BOGDANIUK**

E est l'espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$. T est l'application de E dans E qui à toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E associe la suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $\left(\dfrac{u_0+u_1+\cdots+u_n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q1. T est-elle surjective ? injective ?

Q2. Résoudre l'équation $u \in E$ et $T(u) = \dfrac{1}{2}u$.

Q1 Notons directement que T est une bijection de E dans E.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de E. Notons par analyse-synthèse que $(v_n)_{n\geq 0}$ possède un antécédent et un seul par T dans E.

* Analyse-Unicité.

Supposons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède un antécédent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par T dans E.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{u_0+u_1+\cdots+u_n}{n+1} = v_n$. Ainsi :

→ $u_0 = v_0$

→ $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = (u_0+u_1+\cdots+u_n)-(u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}) = (n+1)v_n - n v_{n-1}$.

Finalement $u_0=v_0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=(n+1)v_n - n v_{n-1}$. Ce qui montre que si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède un antécédent par T dans E il est unique.

* Synthèse-Existence

Posons $u_0=v_0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=(n+1)v_n - n v_{n-1}$.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement un élément de E.
- Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

petit changement d'indice...

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)v_k - k v_{k-1}\right] \underset{u_0=v_0}{=} v_0 + \sum_{k=1}^{n}(k+1)v_k - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)v_k.$$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = v_0 + (n+1)v_n - (0+1)v_0 = (n+1)v_n. \text{ Donc } v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

De plus $v_0 = u_0 = \dfrac{1}{0+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{0} u_k$.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = v_n$. Donc $T\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (v_n)$.

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un antécédent de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par T dans E.

ceci achève de montrer que tout élément de E possède un antécédent et un seul par T dans E.

Ainsi T est une bijection de E sur E.

Q2 (*) Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de E tel que $T(u)=\frac{1}{2}u$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{u_0+u_1+\dots+u_n}{n+1}=\frac{1}{2}u_n$.

. $u_0=\frac{1}{2}u_0$ donc $u_0=0$

. $\frac{u_0+u_1}{2}=\frac{1}{2}u_1$; $\frac{u_1}{2}=\frac{u_1}{2}$!!!

. $\frac{u_0+u_1+u_2}{3}=\frac{1}{2}u_2$; $\frac{u_1+u_2}{3}=\frac{1}{2}u_2$; $2u_1+2u_2=3u_2$; $u_2=2u_1$.

. $\frac{u_0+u_1+u_2+u_3}{4}=\frac{1}{2}u_3$; $\frac{0+u_1+2u_1+u_3}{4}=\frac{1}{2}u_3$. $2(3u_1+u_3)=4u_3$.

donc $3u_1+u_3=2u_3$; $u_3=3u_1$.

Montrons alors par récurrence faible que : $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ u_k=ku_1$.

→ c'est clair pour $k=1$!

→ Supposons que $k\in[\![1,+\infty[\![$ et que $\forall i\in[\![1,k]\!],\ u_i=iu_1$.

Montrons alors que $u_{k+1}=(k+1)u_1$.

$\frac{u_0+u_1+\dots+u_k+u_{k+1}}{k+2}=\frac{1}{2}u_{k+1}$. Alors $\frac{k+2}{2}u_{k+1}=u_0+u_1+\dots+u_k+u_{k+1}$.

donc $\frac{k+2}{2}u_{k+1}=0+\sum_{i=1}^{k} iu_1+u_{k+1}=u_1\times\sum_{i=1}^{k} i+u_{k+1}=u_1\times\frac{k(k+1)}{2}+u_{k+1}$.

Ainsi : $u_1\times\frac{k(k+1)}{2}=\left[\frac{k+2}{2}-1\right]u_{k+1}=\frac{k}{2}u_{k+1}$.

comme k n'est pas nul : $u_{k+1}=\frac{2}{k}u_1\times\frac{k(k+1)}{2}=(k+1)u_1$. ceci achève la récurrence.

Ainsi $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ u_k=ku_1$. mieux $\forall k\in\mathbb{N},\ u_k=ku_1$ (car $u_0=0$).

par conséquent $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\lambda n$.

(*) Réciproquement soit λ un réel et $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de E définie par :

$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\lambda n$. Notons que $T(u)=\frac{1}{2}u$.

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \frac{u_0+u_1+\dots+u_n}{n+1}=\frac{\sum_{k=0}^{n}(\lambda k)}{n+1}=\frac{\lambda}{n+1}\sum_{k=0}^{n}k=\frac{\lambda}{n+1}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}\lambda n=\frac{1}{2}u_n.$$

donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $T(u)=\frac{1}{2}u$.

<u>Finalement les solutions de l'équation $u\in E$ et $T(u)=\frac{1}{2}u$ sont</u>

<u>les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telles que : $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\lambda n$.</u>

<u>Remarques</u>.– 1.. Notons d'abord qu'il est facile de montrer que T est un endomorphisme de E.

2°.- La question 1 montre en fait que T est un automorphisme de E.

3°.- La question 2 montre que $\frac{1}{2}$ est valeur de T et que le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4°/ <u>On peut encore montrer que</u> :

→ $Sp\,T=\{\frac{1}{p+1}\ ;\ p\in\mathbb{N}\}$

→ Si $p\in\mathbb{N}$, le sous-espace propre de T associé à la valeur $\frac{1}{p+1}$

est la droite vectorielle engendrée par la suite $(t_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ de E définie par:

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad t_n^{(p)}=\begin{cases}\binom{n}{p} & \text{si } n\geq p\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

On peut trouver cela dans les exercices de l'oral d'ESCP de 1998 (2.15).

R. 27-11-2013

Question 7 ESCP 2013 $\boxed{\text{F1}}$ Thomas PERARD

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent la loi géométrique de paramètre p.

Trouver la probabilité pour que les matrices $\begin{pmatrix} X & X \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ soient semblables.

Déjà vu à l'ESCP en 2009.

● Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Posons $A=\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

* Supposons A et B semblables. A et B ont même spectre car elles représentent le même endomorphisme. Notons que A et B sont triangulaires supérieures.
Alors $\mathrm{Sp}\,A=\{\alpha,\beta\}$ et $\mathrm{Sp}\,B=\{1,2\}$. Ainsi $\{\alpha,\beta\}=\{1,2\}$. Notons qu'alors
$(\alpha=1$ et $\beta=2)$ ou $(\alpha=2$ et $\beta=1)$.

* Réciproquement supposons que $\{\alpha,\beta\}=\{1,2\}$. Alors $\mathrm{Sp}\,A=\mathrm{Sp}\,B=\{1,2\}$.
A et B ont deux valeurs propres distinctes 1 et 2, et appartiennent à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Alors A et B sont diagonalisables et les sous-espaces propres associés sont des droites vectorielles.
Il existe une base $\mathcal{B}_1=(X_1,X_2)$ de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres 1 et 2. Soit Q_1 la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ à $\mathcal{B}_1$. Q_1 est inversible et $Q_1^{-1}AQ_1=\mathrm{Diag}(1,2)$.
De même il existe une matrice inversible Q_2 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $Q_2^{-1}BQ_2=\mathrm{Diag}(1,2)$.
Ainsi $Q_1^{-1}AQ_1=\mathrm{Diag}(1,2)=Q_2^{-1}BQ_2$.
Alors $A=Q_1(Q_2^{-1}BQ_2)Q_1^{-1}=Q_1Q_2^{-1}BQ_2Q_1^{-1}=(Q_2Q_1^{-1})^{-1}B\;Q_2Q_1^{-1}$.
Par conséquent A et B sont semblables.

Finalement A et B sont semblables si et seulement $\{\alpha,\beta\}=\{1,2\}$ ou si et seulement si $(\alpha=1$ et $\beta=2)$ ou $(\alpha=2$ et $\beta=1)$.

● Notons $\hat{p}$ la probabilité pour que les matrices $\begin{pmatrix} X & X \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ soient semblables.

$\hat{p} = P\big((\{X=1\}\cap\{Y=2\}) \cup (\{X=2\}\cap\{Y=1\})\big)$ d'après ce qui précède.

Par incompatibilité il vient $\hat{p} = P(\{X=1\}\cap\{Y=2\}) + P(\{X=2\}\cap\{Y=1\})$.

X et Y étant indépendantes et ayant même loi il vient :

$\hat{p} = P(X=1)P(Y=2) + P(X=2)P(Y=1) = P(X=1)P(X=2) + P(X=2)P(X=1) = 2P(X=1)P(X=2)$

Or X suit la loi géométrique de paramètre p donc $\hat{p} = 2 \times p \times (1-p)p$.

$\hat{p} = 2p^2(1-p)$.

La probabilité pour que $\begin{pmatrix} X & X \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ soient semblables est $2p^2(1-p)$.

23-11-2013

R.

Question 8 ESCP 2013 $\boxed{\text{F1}}$

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Soient f et g deux endomorphismes de tels que $f \circ g = g \circ f$.

On note S (resp. A) la matrice de f (resp. g) dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E.

On suppose que S est symétrique et A antisymétique.

Montrer que $\forall x \in E,\ \|(f-g)(x)\| = \|(f+g)(x)\|$

Déjà vu à HEC en 2007.

Soit x un élément de E. Notons X sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

Comme $\mathcal{B}$ est orthonormale : $\langle f(x), g(x)\rangle = {}^t(SX)AX$ et $\langle g(x), f(x)\rangle = {}^t(AX)SX$ car SX est la matrice de $f(x)$ dans $\mathcal{B}$ et AX est la matrice de $g(x)$ dans $\mathcal{B}$.

$\langle f(x), g(x)\rangle = {}^t(SX)AX = {}^tX\,{}^tS\,AX = {}^tXSAX = {}^tXASX$. $\underline{\underline{\langle f(x), g(x)\rangle = {}^tXASX.}}$

S est symétrique ; $SA = AS$ car $f\circ g = g \circ f$.

$\langle g(x), f(x)\rangle = {}^t(AX)SX = {}^tX\,{}^tA\,SX = -{}^tXASX = -\langle f(x), g(x)\rangle = -\langle g(x), f(x)\rangle$.

A est antisymétrique

Ainsi $\langle g(x), f(x)\rangle = 0$ ou $\underline{\langle f(x), g(x)\rangle = 0}$.

$\|(f-g)(x)\|^2 = \|f(x)-g(x)\|^2 = \|f(x)\|^2 - 2\langle f(x), g(x)\rangle + \|g(x)\|^2 = \|f(x)\|^2 + \|g(x)\|^2$.

$\|(f+g)(x)\|^2 = \|f(x)+g(x)\|^2 = \|f(x)\|^2 + 2\langle f(x), g(x)\rangle + \|g(x)\|^2 = \|f(x)\|^2 + \|g(x)\|^2$. Alors :

$\langle f(x), g(x)\rangle = 0$.

$\|(f-g)(x)\|^2 = \|(f+g)(x)\|^2$, $\|(f-g)(x)\| \geqslant 0$ et $\|(f+g)(x)\| \geqslant 0$.

Ainsi $\|(f-g)(x)\| = \|(f+g)(x)\|$.

$\underline{\underline{\forall x \in E,\ \|(f-g)(x)\| = \|(f+g)(x)\|.}}$

Question 9 ESCP 2013 F1

Dans une file d'attente de n personnes, résultant de la distribution au hasard de ces personnes, se trouvent deux amis Jean et Paul. Quelle est la probabilité que Jean soit séparé de Paul par m personnes ? Quel est le nombre de personnes le plus probable qui séparent Jean et Paul ?

Nous noterons Ω l'ensemble des bijections des n personnes sur les n places de la file.
Nous prendrons $\mathcal{T}$ égale à $\mathcal{P}(\Omega)$. P est la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

Soit $m \in [\![0, n-2]\!]$. Notons A_m l'événement Jean et Paul sont séparés par m personnes.

$$P(A_m) = \frac{\text{card } A_m}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{n!}\,\text{card } A_m = \frac{1}{n!}\left[(n-(m+1)) \times 2 \times (n-2)!\right]$$

$n-(m+1)$: choix de la place de la première personne du duo Jean et Paul

2 : choix de Pierre ou de Jean pour la première place qui est trouvée.

$(n-2)!$: choix de la place des $n-2$ autres personnes sur les $n-2$ places restantes.

Ainsi $P(A_m) = \dfrac{2(n-(m+1))}{n(n-1)}$. La probabilité que Jean soit séparé de Paul par m personnes est $2\,\dfrac{n-(m+1)}{n(n-1)}$ pour tout m dans $[\![0, n-2]\!]$. Notons que $P(A_m) = 0$ si $m \notin [\![0, n-2]\!]$!!

Remarque.- On aurait pu s'intéresser uniquement à la place de Jean et Paul dans la file.
Alors $\text{card } \Omega = \binom{n}{2}$, $\text{card } A_m = n-(m+1)$. On retrouve le résultat...

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes entre Jean et Paul.

On cherche $E(X)$, non ??

$X(\Omega) = [\![0, n-2]\!]$ et $\forall m \in [\![0, n-2]\!]$, $P(X=m) = P(A_m) = \dfrac{2(n-m-1)}{n(n-1)}$.

$X(\Omega)$ étant fini, $E(X)$ existe. $E(X) = \displaystyle\sum_{m=0}^{n-2} m\,P(X=m)$.

$$E(X) = \sum_{m=0}^{n-2} m\left(\frac{2(n-m-1)}{n(n-1)}\right) = \frac{2}{n(n-1)}\left[(n-1)\sum_{m=0}^{n-2} m - \sum_{m=0}^{n-2} m^2\right]$$

$$E(X) = \frac{2}{n(n-1)}\left[(n-1)\frac{(n-2)(n-1)}{2} - \frac{(n-2)(n-1)(2(n-2)+1)}{6}\right] = \frac{2(n-1)(n-2)}{6(n)(n-1)}\left[3(n-1) - (2n-3)\right]$$

$$E(X) = \frac{2(n-2)}{6n} \times \underbrace{(3n-3-2n+3)}_{n} = \frac{2(n-2)}{3} = \frac{n-2}{3}.$$

Ainsi le nombre de personnes le plus probable qui séparent Jean et Paul est $\dfrac{n-2}{3}$.

R,

Question 10 ESCP 2013 $\boxed{F1^-}$ **Arthur SEZILLE**

On jette indéfiniment et de manière indépendante une pièce équilibrée et on définit l'événement E : "on obtient sur deux tours consécutifs le même résultat (pile-pile ou face-face)".

On appelle X la variable aléatoire égale au numéro du tour où l'événement E se réalise pour la première fois.

Trouver la loi de X et son espérance.

Déjà vu à l'ECSP en 2011.

---

dans la suite nous noterons P_i (resp. F_i) l'événement le $i^{\text{ème}}$ lancer donne pile (resp. face)... pour tout i dans $\mathbb{N}^*$.

$X(\Omega) = [\![2, +\infty [\![$. à quelques abus près...

- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=2k) = P\big((P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4 \cap \dots \cap P_{2k-3} \cap F_{2k-2} \cap P_{2k-1} \cap P_{2k}) \cup$

$(F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4 \cap \dots \cap F_{2k-3} \cap P_{2k-2} \cap F_{2k-1} \cap F_{2k})\big)$. Par incompatibilité et indépendance il vient :

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=2k) = P(P_1)P(F_2)P(P_3)P(F_4)\dots P(P_{2k-3})P(F_{2k-2})P(P_{2k-1})P(P_{2k}) +$

$P(F_1)P(P_2)P(F_3)P(P_4)\dots P(F_{2k-3})P(P_{2k-2})P(F_{2k-1})P(F_{2k})$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=2k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \frac{1}{2^{2k-1}}$.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$P(X=2k+1) = P\big((F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4 \cap \dots \cap F_{2k-1} \cap P_{2k} \cap P_{2k+1}) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4 \cap \dots \cap P_{2k-1} \cap F_{2k} \cap F_{2k+1})\big)$.

Par incompatibilité et indépendance on obtient encore :

$P(X=2k+1) = P(F_1)P(P_2)P(F_3)P(P_4)\dots P(F_{2k-1})P(P_{2k})P(P_{2k+1}) + P(P_1)P(F_2)P(P_3)P(F_4)\dots P(P_{2k-1})P(F_{2k})P(F_{2k+1})$.

Ainsi $P(X=2k+1) = 2 \times \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{1}{2^{2k}}$.

Finalement $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=2k) = \frac{1}{2^{2k-1}}$ et $P(X=2k+1) = \frac{1}{2^{2k}}$.

Ainsi $\underline{\underline{\forall k \in [\![2, +\infty [\![,\ P(X=k) = \frac{1}{2^{k-1}}}}$.

Posons $Y = X-1$. $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(Y=k) = P(X=k+1) = \frac{1}{2^{k+1-1}} = \frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2}$.

Y suit alors une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

Alors $E(Y)$ existe et vaut 2. Comme $X = Y+1$, $\underline{\underline{E(X) \text{ existe et vaut } 3}}$.

<u>Exercice</u> .. Reprendre l'exercice avec une pièce qui donne pile avec la probabilité p ($p \in]0,1[$).

- On s'attachera à bien justifier l'existence de $E(X)$.

- <u>Réponses</u>. On pose $q = 1-p$.

  → $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = 2k) = (p^2+q^2)(pq)^{k-1}$.

  → $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = 2k+1) = (pq)^k$.

  → $E(X) = \dfrac{2+pq}{1-pq}$.

R.

Question 11 ESCP 2013 $\boxed{\text{F1}^+}$

On retourne une à une les cartes d'un jeu ordinaire (32 cartes). Quel est le nombre moyen de cartes qu'il faut retourner pour voir le premier as ?

Déjà donné en 2009

⊙ Soit X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier as.

$X(\Omega) = [\![1, 29]\!]$.

Soit $k \in [\![1, 29]\!]$. $P(X=k) = \dfrac{28 \times 27 \times \cdots \times (28-(k-2)) \times 4}{32 \times 31 \times \cdots \times (32-(k-1))}$

choix des $k-1$ premières cartes qui ne sont pas des as.

choix de la dernière carte qui est un as.

choix des tirages possibles des k premières cartes

$$P(X=k) = \frac{(32-k)!}{(32)!} \times \frac{28!}{(28-k+1)!} \times 4 = \frac{4 \times 28!}{(32)!} \times \frac{(32-k)!}{(29-k)!}.$$

$$P(X=k) = \frac{4!\,(28)!}{(32)!} \times \frac{1}{3!} \times \frac{(32-k)!}{(29-k)!} = \frac{1}{\binom{32}{4}} \times \binom{32-k}{3}.$$

$X(\Omega) = [\![1, 29]\!]$ et $\forall k \in [\![1, 29]\!]$, $P(X=k) = \dfrac{\binom{32-k}{3}}{\binom{32}{4}}$.

Remarques 1. - On peut retrouver ce résultat de la manière suivante.

Soit $k \in [\![1, 29]\!]$. $P(X=k) = \dfrac{\binom{32-k}{3} \times 4!\,(28)! \quad (*)}{\binom{32}{4} \times 4!\,(28)! \quad (**)}$

On considère que l'on retourne toutes les cartes.

$*$ $\binom{32-k}{3}$ choix de la place des trois derniers as parmi les $32-k$ dernières places

$4!$ choix des as sur leurs places

$(28)!$ choix des cartes qui ne sont pas des as sur les 28 places déjà choisies.

$**$ $\binom{32}{4}$ choix de la place des 4 as

$4!$ choix des as sur leurs places.

$(28)!$ choix des cartes qui ne sont pas des as sur les 28 places déjà choisies.

Notons que l'on aurait pu écrire directement $P(X=k)=\dfrac{\binom{32-k}{3}}{\binom{32}{4}}$ en distinguant simplement les as des autres cartes.

<u>Remarques 2.-</u> $\sum_{k=1}^{29} P(X=k)=1$ donc $\sum_{k=1}^{29}\binom{32-k}{3}=\binom{32}{4}$ c'est-à-dire :

$\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\dots+\binom{31}{3}=\binom{32}{4}$. On retrouve une formule classique... A moins que l'on ne se serve de cette formule pour vérifier $\sum_{k=1}^{29} P(X=k)=1$ ...

Au choix !!

$$(*)\quad E(X)=\sum_{k=1}^{29} k\,P(X=k)=\sum_{k=1}^{29} k\times\frac{\binom{32-k}{3}}{\binom{32}{4}}\underset{i=32-k}{=}\frac{1}{\binom{32}{4}}\sum_{i=3}^{31}(32-i)\binom{i}{3}.$$

$E(X)$ existe car X est finie.

$$E(X)=\frac{1}{\binom{32}{4}}\left[\sum_{i=3}^{31}(33)\binom{i}{3}-\sum_{i=3}^{31}\underbrace{(i+1)\binom{i}{3}}_{4\times\binom{i+1}{4}}\right].$$

$$E(X)=\frac{1}{\binom{32}{4}}\left(33\,\underbrace{\left[\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\dots+\binom{31}{3}\right]}_{\binom{32}{4}}-4\,\underbrace{\left[\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\dots+\binom{32}{4}\right]}_{\binom{33}{5}}\right).$$

$$\underline{\underline{E(X)}}=33-4\times\frac{\binom{33}{5}}{\binom{32}{4}}=33-4\times\frac{33}{5}=\underline{\underline{\frac{33}{5}}}.$$

$\boxed{\text{Le nombre moyen de cartes qu'il faut retourner pour avoir le 1er as est } \frac{33}{5}}$

<u>Exercice.</u> On tire sans remise toutes les boules d'une urne contenant a boules blanches et b boules noires ($a\geq 1$ et $b\geq 1$). $r\in[\![1,a]\!]$. X_r est la variable aléatoire donnant le rang d'apparition de la r-ième boule blanche. Trouver la loi de X_r et son espérance.

<u>Réponse.-</u> $X_r(\Omega)=[\![r,b+r]\!]$ et $\forall k\in[\![r,b+r]\!]$, $P(X=k)=\dfrac{\binom{k-1}{r-1}\binom{a+b-k}{a-r}}{\binom{a+b}{a}}$. $E(X_r)=r\,\dfrac{a+b+1}{a+1}$.

Notons que pour $r=1$, $a=4$ et $b=28$ on retrouve les résultats de l'exercice précédent.

27.11.2013

2.

Question 12 ESCP 2013 $\boxed{\text{F1}}$ ADELINE

X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi de Poisson de paramètre λ.

Trouver la loi et l'espérance de la variable aléatoire $Y = (-1)^X$.

Rappel : $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$Y(\Omega) = \{-1, 1\}$.

$$P(Y=1) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=2k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda}.$$

Rappelons que $e^{\lambda} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$ et $e^{-\lambda} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!}$.

$1+(-1)^k = \begin{cases} 2 \text{ si } k \text{ est pair} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Alors $e^{\lambda} + e^{-\lambda} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda^k}{k!} + \frac{(-\lambda)^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 + (-1)^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \times 2.$

Alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2}$.

donc $P(Y=1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda} = \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} \times e^{-\lambda} = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2}$.

$P(Y=-1) = 1 - P(Y=1) = 1 - \dfrac{1+e^{-2\lambda}}{2} = \dfrac{1-e^{-2\lambda}}{2}$.

$\underline{\underline{Y(\Omega) = \{-1, 1\}, \quad P(Y=1) = \dfrac{1+e^{-2\lambda}}{2} \text{ et } P(Y=-1) = \dfrac{1-e^{-2\lambda}}{2}.}}$

$E(Y) = (-1)P(Y=-1) + (1)P(Y=1) = -\dfrac{1-e^{-2\lambda}}{2} + \dfrac{1+e^{-2\lambda}}{2} = \dfrac{-1+e^{-2\lambda}+1+e^{-2\lambda}}{2} = e^{-2\lambda}$.

$\underline{\underline{E(Y) = e^{-2\lambda}.}}$

12.11.2013

R.

Question 13 ESCP 2013 $\boxed{\text{F1}}$ Sofyan FORTAS, Nassim ELOUARZADI, Germain GAUTHIER, Perrine GAYET

a est un réel strictement positif. $n_0 = \text{Ent}\,(a) + 1$.

Pour tout n dans $[\![n_0, +\infty[\![$, X_n est une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{a}{n}$.

Étudier la convergence en loi de la suite $\left(\dfrac{X_n}{n}\right)_{n\geqslant n_0}$.

Déjà vu à l'ECSP en 2009 et 2011.

Soit n un élément de $[\![n_0,+\infty[\![$. Soit F_n la fonction de répartition de $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$.

$Y_n(\Omega) = \{\frac{k}{n}\,;\, k \in \mathbb{N}^*\}$.

$\forall x \in]-\infty, \frac{1}{n}[$, $F_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = P\left(\frac{X_n}{n} \leqslant x\right) = P(X_n \leqslant nx) = 0$.
$\uparrow nx < 1$

Soit $x \in [\frac{1}{n}, +\infty[$.

$$F_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = P\left(\frac{X_n}{n} \leqslant x\right) = P(X_n \leqslant nx) = \sum_{k=1}^{\text{Ent}(nx)} P(X_n = k) = \sum_{k=1}^{\text{Ent}(nx)} \left(1-\frac{a}{n}\right)^{k-1} \times \frac{a}{n}.$$

$$F_n(x) = \frac{a}{n} \times \frac{1-\left(1-\frac{a}{n}\right)^{\text{Ent}(nx)}}{1-\left(1-\frac{a}{n}\right)} = 1-\left(1-\frac{a}{n}\right)^{\text{Ent}(nx)}.$$

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, \frac{1}{n}[\\ 1-\left(1-\frac{a}{n}\right)^{\text{Ent}(nx)} & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, +\infty[. \end{cases}$

Pour faciliter le passage à la limite faisons la remarque suivante.

Soit $x \in]0, \frac{1}{n}[$. Rappelons que $F_n(x) = 0$.

Notons que $nx \in]0,1[$ et qu'ainsi $\text{Ent}(nx) = 0$.

Alors $1-\left(1-\frac{a}{n}\right)^{\text{Ent}(nx)} = 1-\left(1-\frac{a}{n}\right)^0 = 1-1 = 0 = F_n(x)$.

Finalement $\forall x \in]0, \frac{1}{n}[$, $F_n(x) = 0 = 1-\left(1-\frac{a}{n}\right)^{\text{Ent}(nx)}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 1-\left(1-\frac{a}{n}\right)^{\text{Ent}(nx)} & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$ et ceci pour tout élément n de $[\![n_0, +\infty[\![$.

Clairement $\forall x \in]-\infty, 0]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$.

Soit $x \in]0,+\infty[$. Soit $n \in [\![n_0,+\infty[\![$.

$F_n(x) = 1 - \left(1-\frac{a}{n}\right)^{\text{Ent}(nx)} = 1 - e^{\text{Ent}(nx)\ln\left(1-\frac{a}{n}\right)}$ (car $1-\frac{a}{n} > 0$ puisque $n \geqslant n_0 = \text{Ent}(a)+1$).

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right) = 1$ donc $\ln\left(1-\frac{a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{a}{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(nx) = +\infty$ $(x>0)$ donc $\text{Ent}(nx) \underset{n\to+\infty}{\sim} nx$.

Ainsi $\text{Ent}(nx)\ln\left(1-\frac{a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} (nx)\left(-\frac{a}{n}\right) = -ax$.

Par continuité de la fonction exponentielle on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\text{Ent}(nx)\ln\left(1-\frac{a}{n}\right)} = e^{-ax}$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - e^{\text{Ent}(nx)\ln\left(1-\frac{a}{n}\right)}\right) = 1 - e^{-ax}$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty,0] \\ 1-e^{-ax} \text{ si } x \in]0,+\infty[\end{cases}$ ... ou

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty,0[\\ 1-e^{-ax} \text{ si } x \in [0,+\infty[\end{cases}$$

Ainsi la suite $\left(\frac{X_n}{n}\right)_{n\geqslant n_0}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre a.

22-11-2013

R.

Question 14 ESCP 2013 F1 **Robin MISSIRIAN**

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes, X de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et Y de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (m, μ) pour que $P(Y \leqslant X) \geqslant \frac{1}{2}$.

- Y suit la loi normale d'espérance μ et de variance σ^2.
- X suit la loi normale d'espérance m et de variance σ^2. Le cours indique alors que $-X$ suit la loi normale d'espérance $-m$ et de variance σ^2.
- X et Y sont indépendantes donc Y et $-X$ sont indépendantes.

Le théorème de stabilité sur les lois normales permet de dire que $Y+(-X)$ suit la loi normale d'espérance $\mu+(-m)$ et de variance $\sigma^2+\sigma^2$

Ainsi $Y-X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu-m, (\sqrt{2\sigma^2})^2)$.

Notons que $\dfrac{Y-X-(\mu-m)}{\sqrt{2\sigma^2}}$ suit la loi normale centrée réduite dont nous noterons ϕ la fonction de répartition. Rappelons que ϕ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$ strictement croissante.

$$P(Y \leqslant X) \geqslant \frac{1}{2} \iff P(Y-X \leqslant 0) \geqslant \phi(0) \iff P\left(\frac{Y-X-(\mu-m)}{\sqrt{2\sigma^2}} \leqslant \frac{0-(\mu-m)}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) \geqslant \phi(0).$$

$$P(Y \leqslant X) \geqslant \frac{1}{2} \iff \phi\left(\frac{0-(\mu-m)}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) \geqslant \phi(0)$$

$$P(Y\leqslant X) \geqslant \frac{1}{2} \underset{\uparrow}{\iff} -\frac{\mu-m}{\sqrt{2\sigma^2}} \geqslant 0 \iff -(\mu-m) \geqslant 0 \iff m-\mu \geqslant 0 \iff m \geqslant \mu.$$

ϕ bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$ strictement croissante.

Ainsi $P(Y \leqslant X) \geqslant \frac{1}{2}$ si et seulement si $m \geqslant \mu$.

Remarque.- Ceci vaut encore pour une variance de Y quelconque (et non égale à celle de X).

Question 15 ESCP 2013 $\boxed{\text{F1}^-}$ Baptiste GUERIN

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

Q1. X est une variable aléatoire, il existe un réel c tel que $P(\text{Ent}(X) < c) = 1$.

Q2. f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, X est une variable aléatoire possédant une espérance alors $f(X)$ possède une espérance.

Q3 Oubliée ?

Q1 Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi normale centrée réduite. Soit ϕ sa fonction de répartition. ϕ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

Soit c un réel quelconque. $\{\text{Ent}(X) < c\} \subset \{X - 1 < c\} = \{X < c+1\}$. Alors :

$P(\text{Ent}(X) < c) \leqslant P(X < c+1) = P(X \leqslant c+1) = \phi(c+1) < 1$.

$\forall c \in \mathbb{R}$, $P(\text{Ent}(X) < c) < 1$. La proposition de Q1 est fausse.

Q2 Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = t^2$. f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{t^3} & \text{si } t \in [1, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- g est positive sur $\mathbb{R}$.
- g est continue sur $[1,+\infty[$ et sur $]-\infty, 1[$. Ainsi g est continue au moins sur $\mathbb{R} - \{1\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.
- g est nulle sur $]-\infty, 1[$ donc $\int_{-\infty}^{1} g(t)\,dt$ converge et vaut 0.

  $\forall A \in [1,+\infty[$, $\int_1^A g(t)\,dt = \int_1^A \frac{2}{t^3}\,dt = \left[-t^{-2}\right]_1^A = 1 - \frac{1}{A^2}$. $\lim_{A \to +\infty} \int_1^A g(t)\,dt = 1$.

  Alors $\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ converge et vaut 1. donc $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$ converge et vaut 1.

  Ceci achève de montrer que g est une densité de probabilité.

$t \mapsto t g(t)$ est nulle sur $]-\infty, 1[$ donc $\int_{-\infty}^{1} t g(t)\,dt$ converge et vaut 0.

$t \mapsto t g(t)$ est continue sur $[1,+\infty[$. $\forall A \in [1,+\infty[$, $\int_1^A t g(t)\,dt = \int_1^A \frac{2}{t^2}\,dt = \left[-\frac{2}{t}\right]_1^A = 2 - \frac{2}{A}$.

$\lim_{A \to +\infty} \int_1^A t g(t)\,dt = 2$. $\int_1^{+\infty} t g(t)\,dt$ converge et vaut 2.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t g(t)\,dt$ converge et vaut 2. Notons, mais c'est inutile, que $\int_{-\infty}^{+\infty} t g(t)\,dt$ est absolument convergente.

Ainsi <u>E(X) possède une espérance qui vaut 2.</u>

$f(X) = X^2$. $\forall t \in [1, +\infty[$, $t^2 g(t) = \frac{2}{t}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t}\,dt$ diverge.

ceci suffit pour dire que $E(X^2)$ n'existe pas.

Ainsi <u>f(X) n'a pas d'espérance.</u>

Par conséquent <u>la proposition de Q2 est fausse.</u>

<u>Exercice</u>.. Etudier Q1 et Q2 avec des variables aléatoires discrètes.