Question 2 HEC 2010 $\boxed{\text{F 1}}$

Soit f l' application définie sur $\mathbb{R}[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $f(P) = 3XP + (X^2 - X)P' - (X^3 - X^2)P''$, où P' et P'' désignent les dérivées première et seconde de P.

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Q2. Déterminer $f(X^k)$ ($k \in \mathbb{N}$). Que peut-on dire du degré de $f(X^k)$?

Q3. f est injective ? surjective ?

Q4. a) Déterminer n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathbb{R}_n[X]$ soit stable par f.

b) n étant ainsi choisi, soit ϕ l'endomorphisme induit par f sur $\mathbb{R}_n[X]$. ϕ est-il diagonalisable ?

Q1 * si $P \in \mathbb{R}[X]$, $3XP + (X^2-X)P' - (X^3-X^2)P''$ appartient à $\mathbb{R}[X]$.

<u>f est une application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$</u>

* Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$.

$f(\lambda P+Q) = 3X(\lambda P+Q) + (X^2-X)(\lambda P+Q)' - (X^3-X^2)(\lambda P+Q)''$

$f(\lambda P+Q) = 3X(\lambda P+Q) + (X^2-X)(\lambda P'+Q') - (X^3-X^2)(\lambda P''+Q'')$.

$f(\lambda P+Q) = \lambda(3XP + (X^2-X)P' - (X^3-X^2)P'') + (3XQ + (X^2-X)Q' - (X^3-X^2)Q'')$

$f(\lambda P+Q) = \lambda f(P) + f(Q)$. <u>$f$ est linéaire.</u>

Ainsi <u>f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.</u>

Q2 $f(1) = 3X$, $f(X) = 3X^2 + X^2 - X = 4X^2 - X$.

$\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $f(X^k) = 3X^{k+1} + (X^2-X)kX^{k-1} - (X^3-X^2)k(k-1)X^{k-2}$.

$\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $f(X^k) = (-k^2+2k+3)X^{k+1} + (k^2-2k)X^k$

En fait <u>$\forall k \in \mathbb{N}$, $f(X^k) = (-k^2+2k+3)X^{k+1} + (k^2-2k)X^k$</u>

$\forall k \in \mathbb{N}$, $-k^2+2k+3 = 0 \iff k=-1$ ou $k=3 \iff k=3$.

<u>$\forall k \in \mathbb{N}-\{3\}$, $\deg f(X^k) = k+1$.</u>

$f(X^3) = 3X^3$ donc <u>$\deg f(X^3) = 3$</u>

Q3 * $f(X^2) = (-4+4+3)X^3 + (4-4)X^2 = 3X^3 = f(X^3)$. <u>$f$ n'est pas injective.</u>

* $f(P)(0)=0$ donc $\mathrm{Im} f \subset \{\varphi \in \mathbb{R}[X] \mid \varphi(0)=0\}$.

Ainsi $X+1 \notin \mathrm{Im} f$. **f n'est pas surjective.**

Q5 a) Soit $n \in \mathbb{N}-\{3\}$. $X^n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\deg f(X^n) = n+1$. $X^n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $f(X^n) \notin \mathbb{R}_n[X]$

Si $n \in \mathbb{N}-\{3\}$, $\mathbb{R}_n[X]$ n'est pas stable par f.

$f(\mathbb{R}_3[X]) = f(\mathrm{Vect}(1, X, X^2, X^3)) = \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3))$

$f(\mathbb{R}_3[X]) = \mathrm{Vect}(3X, 4X^2-X, 3X^3, 3X^3) = \mathrm{Vect}(X, 4X^2-X, X^3) = \mathrm{Vect}(X, X^2, X^3) \subset \mathbb{R}_3[X]$.

$\mathbb{R}_3[X]$ est stable par f.

b) $n=3$. Soit $\mathcal{B}=(1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

$\varphi(1)=3X$, $\varphi(X)=4X^2-X$, $\varphi(X^2)=\varphi(X^3)=3X^3$

$$A = M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$ A est triangulaire inférieure.

$\mathrm{Sp}\,\varphi = \mathrm{Sp}\,A = \{-1, 0, 3\}$. Soit $P = aX^3+bX^2+cX+d$ un élément de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$\varphi(P) = -P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -d \\ 3d-c = -c \\ 4c = -b \\ 3b+3a = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ b = -4c \\ a = -\frac{3}{4}b = 3c \end{cases}$$

$SEP(\varphi, -1) = \{3cX^3 - 4cX^2 + cX \,;\, c \in \mathbb{R}\}$; **$SEP(\varphi, -1) = \mathrm{Vect}(3X^3-4X^2+X)$**

$$\varphi(P) = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} 3d-c = 0 \\ 4c = 0 \\ 3b+3a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 0 \\ b = -a \end{cases}$$

$SEP(\varphi, 0) = \{aX^3 - aX^2 \,;\, a \in \mathbb{R}\}$; **$SEP(\varphi, 0) = \mathrm{Vect}(X^3 - X^2)$.**

$$\varphi(P) = 3P \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 3d \\ 3d-c = 3c \\ 4c = 3b \\ 3b+3a = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$. **$SEP(\varphi, 3) = \mathrm{Vect}(X^3)$.**

$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,\varphi} \dim SEP(\varphi, \lambda) = 1+1+1 = 3 \neq 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$. **$\varphi$ n'est pas diagonalisable.**

Question 5 HEC 2010 $\boxed{\text{F 2}}$

Q1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Q2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et u un endomorphisme de E tel que u^2 soit un projecteur de rang égal à 1.

a) Montrer que 0 est valeur propre de u et que u possède une autre valeur propre, égale à 1 ou à -1.

b) Montrer que si u admet 1 pour valeur propre et n'est pas lui-même un projecteur, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est A.

Q1 A est triangulaire supérieure. $\operatorname{Sp} A = \{0, 1\}$. Soit (E_1, E_2, E_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

- $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \dim \operatorname{Vect}(E_1, E_2) \underset{\substack{\uparrow \\ (E_1, E_2) \text{ est libre}}}{=} 2.$

  Alors $\dim SEP(A, 0) = 3 - \operatorname{rg} A = 1$.

- $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. $\operatorname{rg}(A - I_3) = \dim \operatorname{Vect}(-E_1, E_1 - E_3) = \dim \operatorname{Vect}(E_1, E_3) = 2$.

  Alors $\dim SEP(A, 1) = 3 - \operatorname{rg}(A - I_3) = 1$.

  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} \dim SEP(A, \lambda) = 2 \neq 3$. <u>A n'est pas diagonalisable.</u>

Q2 <u>a)</u> $\operatorname{rg} u^2 = 1 \neq 3$ donc u^2 n'est pas bijectif. Alors u n'est pas bijectif (u bijectif $\Rightarrow u \circ u$ bijectif). Comme $\dim E < +\infty$ u n'est pas injectif.

Ainsi <u>0 est valeur propre de u.</u>

$u^4 = (u^2)^2 = u^2$ car u^2 est un projecteur ; $u^4 - u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $X^4 - X^2$ est un polynôme annulateur de u dont les zéros sont 0, 1 et -1.

Ainsi <u>$\operatorname{Sp} u \subset \{0, 1, -1\}$.</u>

$1 \in \operatorname{Sp} u^2$ et $\dim SEP(u^2, 1) = 1$ car u^2 est une projection de rang 1

($\operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Ker}(u^2 - \operatorname{Id}_E)$ et $\dim \operatorname{Im} u^2 = 1$).

Soit x un vecteur propre de u^2 associé à la valeur propre 1. $x \neq 0_E$!

Posons $x_1 = \frac{1}{2}(x + u(x))$ et $x_2 = \frac{1}{2}(x - u(x))$.

$u(x_1)=\frac{1}{2}(u(u)+u^2(u))=\frac{1}{2}(u(u)+u)=x_1$. $u(v_2)=\frac{1}{2}(u(u)-u^2(u))=\frac{1}{2}(u(u)-u)=-x_2$

Supposons que $x_1=x_2=0$. Alors $u(u)=-x$ et $u(u)=x$. $x=-x$; $x=0_E$!

donc $x_1\neq 0_E$ ou $x_2\neq 0_E$. Comme $u(x_1)=x_1$ et $u(x_2)=-x_2$ alors

ou 1 est valeur propre de u ou -1 est valeur propre de u .

0 est valeur propre de u et u possède une autre valeur propre égale à 1 ou

à -1.

Pour éviter les doutes montrons que $\mathrm{Sp}\, u=\{0,1\}$ ou $\{0,-1\}$.

D'après ce qui précède il suffit de montrer que 1 et -1 ne sont pas simultanément

valeurs propres de u. Supposons le contraire. Soit z_1 (resp. z_2) un vecteur

propre de u associé à la valeur propre 1 (resp. -1).

(z_1,z_2) est libre (vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes ...)

$u^2(z_1)=1^2z_1=z_1$ et $u^2(z_2)=(-1)^2z_2=z_2$. (z_1,z_2) est une famille libre de

$SEP(u^2,1)=\mathrm{Ker}\,(u^2-\mathrm{Id}_E)=\mathrm{Im}\, u^2$ et dim $\mathrm{Im}\, u^2=1$!!

Finalement $\underline{\mathrm{Sp}\, u=\{0,1\}\text{ ou }\{0,-1\}}.$ <u>Remarque</u>.. On aurait pu obtenir ce résultat en montrant que $\mathrm{Ke}(u^2-\mathrm{Id}_E)=\mathrm{Ke}(u-\mathrm{Id}_E)\oplus \mathrm{Ke}\,(u+\mathrm{Id}_E)$

<u>b)</u> * Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ une base de E tel que $\Pi_{\mathcal{B}}(u)=A$.

Alors $u(e_1)=0_E$, $u(e_2)=e_2$, $u(e_3)=e_1$. $0_E=u(e_1)=u^2(e_3)$

Donc $e_1=u(e_3)$ (ainsi $u(e_3)\neq 0_E$), $e_2\in SEP(u,1)$, $e_3\in \mathrm{Ker}\, u^2$.

Ainsi $e_1=u(e_3)$, $e_3\notin \mathrm{Ker}\, u$, $e_3\in \mathrm{Ker}\, u^2$ et $e_2\in SEP(u,1)$.

*. <u>Soit e_2 un élément non nul de $SEP(u,1)$.</u>

- $\mathrm{Ker}\, u\subset \mathrm{Ker}\, u^2$. Montrons par l'absurde que $\mathrm{Ker}\, u\subsetneq \mathrm{Ker}\, u^2$.

Supposons que $\mathrm{Ker}\, u=\mathrm{Ker}\, u^2$. Alors dim $\mathrm{Ker}\, u=$ dim $\mathrm{Ker}\, u^2=3-\mathrm{rg}\, u^2=3-1=2$

Ainsi dim $SEP(u,0)=2$.

Ici $\mathrm{Sp}\,u=\{0,1\}$. Nous avons $\dim SEP(u,0)=2$ et $\dim SEP(u,1)\geq 1$.

Comme $\dim E=3$: $\dim SEP(u,1)=1$.

$\dim SEP(u,0)+\dim SEP(u,1)=\dim E$. u est diagonalisable.

Mieux il existe une base de E telle que la matrice de u dans cette base est $A'=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. $A'^2=A'$; $u^2=u$; u est un projecteur !

Ainsi $\mathrm{Ker}\,u \subsetneq \mathrm{Ker}\,u^2$. <u>Soit e_3 un élément de $\mathrm{Ker}\,u^2$ n'appartenant</u>

<u>pas à $\mathrm{Ker}\,u$</u>. <u>Posons $e_1=u(e_3)$.</u>

$u(e_2)=e_2$. $u(e_3)=e_1$, $u(e_1)=u^2(e_3)=0_E$. Montrons que (e_1,e_2,e_3) est une base de E. $\dim E=3$, il suffit donc de montrer que la famille (e_1,e_2,e_3) est libre.

Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3=0_E$.

$0_E=u^2(0_E)=\alpha u^2(e_1)+\beta u^2(e_2)+\gamma u^2(e_3)=\alpha u(0_E)+\beta e_2+\gamma.0_E=\beta e_2$.

Or e_2 n'est pas nul donc $\beta=0$.

$\alpha e_1+\gamma e_3=0_E$. Alors $0_E=u(0_E)=\alpha u(e_1)+\gamma u(e_3)=\gamma u(e_3)$.

$\gamma u(e_3)=0_E$ et $u(e_3)\neq 0_E$ car $e_3\notin \mathrm{Ker}\,u$ donc $\gamma=0$.

Alors $\alpha e_1=0_E$ avec $e_1\neq 0_E$. $\alpha=0$.

Ceci achève de montrer que <u>$\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ est une base de E.</u>

De plus $\underline{\underline{M_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=A}}$.

Question 6 HEC 2010 $\boxed{\text{F 1}}$

Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $f(M)$ la matrice $\begin{pmatrix} c'' & b'' & a'' \\ c' & b' & a' \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

Q1. Montrer que f est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Q2. Trouver les valeurs propres de f.

Q3. a) Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, le rang de $f(M)$ est égal au rang de M.

b) Cette propriété de préservation du rang est-elle vraie pour tous les automorphismes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Q1. f est une application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ et $\hat{M} = \begin{pmatrix} \hat a & \hat b & \hat c \\ \hat a' & \hat b' & \hat c' \\ \hat a'' & \hat b'' & \hat c'' \end{pmatrix}$ sont deux éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$f(\lambda M + N) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda a + \hat a & \lambda b + \hat b & \lambda c + \hat c \\ \lambda a' + \hat a' & \lambda b' + \hat b' & \lambda c' + \hat c' \\ \lambda a'' + \hat a'' & \lambda b'' + \hat b'' & \lambda c'' + \hat c'' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda c'' + \hat c'' & \lambda b'' + \hat b'' & \lambda a'' + \hat a'' \\ \lambda c' + \hat c' & \lambda b' + \hat b' & \lambda a' + \hat a' \\ \lambda c + \hat c & \lambda b + \hat b & \lambda a + \hat a \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda M + N) = \lambda \begin{pmatrix} c'' & b'' & a'' \\ c' & b' & a' \\ c & b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat c'' & \hat b'' & \hat a'' \\ \hat c' & \hat b' & \hat a' \\ \hat c & \hat b & \hat a \end{pmatrix} = \lambda f(M) + f(N).$$ f est linéaire.

<u>f est un endomorphisme de</u> ⚠ Voir à la fin pour f automorphisme de E

Q2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$f(M) = \lambda M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c'' & b'' & a'' \\ c' & b' & a' \\ c & b & a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \lambda c'' \\ b = \lambda b'' \\ c = \lambda a'' \end{cases} \text{et} \begin{cases} a' = \lambda c' \\ b' = \lambda b' \\ c' = \lambda a' \end{cases} \text{et} \begin{cases} a'' = \lambda c \\ b'' = \lambda b \\ c'' = \lambda a \end{cases}.$$

$$f(M) = \lambda M \Leftrightarrow \begin{cases} c'' = \lambda a \\ b'' = \lambda b \\ a'' = \lambda c \end{cases} \text{et} \begin{cases} a = \lambda^2 a \\ b = \lambda^2 b \\ c = \lambda^2 c \end{cases} \text{et} \begin{cases} c' = \lambda a' \\ (1-\lambda) b' = 0 \\ a' = \lambda^2 a' \end{cases}$$

<u>1er cas</u> $\lambda^2 \neq 1$

$$f(M) = \lambda M \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \text{et} \begin{cases} a'' = 0 \\ b'' = 0 \\ c'' = 0 \end{cases} \text{et} \begin{cases} a' = 0 \\ b' = 0 \\ c' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}.\ \lambda \notin Sp\, f.$$

2ème cas $\lambda = 1$. $f(M) = \lambda M \Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} c'' = a \\ b'' = b \\ a'' = c \end{cases}$ et $c' = a'$

Alors 1) $1 \in Sp f$

2) $SEP(f,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & a' \\ c & b & a \end{pmatrix} ; (a,b,c,a',b') \in \mathbb{R}^5 \right\}$

$SEP(f,1) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

3ème cas $\lambda = -1$

$f(M) = \lambda M \Leftrightarrow f(M) = -M \Leftrightarrow \begin{cases} c'' = -a \\ b'' = -b \\ a'' = -c \end{cases}$ et $\begin{cases} c' = -a' \\ b' = 0 \end{cases}$

1) $-1 \in Sp f$

2) $SEP(f,-1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & 0 & -a' \\ -c & -b & -a \end{pmatrix} ; (a,b,c,a') \in \mathbb{R}^4 \right\}$

$SEP(f,-1) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

Ainsi $Sp f = \{-1, 1\}$.

Remarque.. Il n'est pas difficile de montrer que $\dim SEP(f,1) = 5$ et $\dim SEP(f,-1) = 4$.

Alors $\dim SEP(f,1) + \dim SEP(f,-1) = 9 = \dim M_3(\mathbb{R})$. f est diagonalisable.

Q3) a) Rappelons qu'une opération élémentaire sur les lignes (resp. colonnes) d'une matrice n'en change pas le rang car cela revient à multiplier à gauche (resp. à droite) cette matrice par une matrice inversible...

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ un élément de $M_3(\mathbb{R})$. $f(M)$ se déduit de M par les opérations $L_1 \leftrightarrow L_3$ et $C_1 \leftrightarrow C_3$. Ainsi $rg f(M) = rg M$.

b) La réponse est non ! Soit $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}, E_{31}, E_{32}, E_{33})$ la base canonique. Soit g l'unique endomorphisme de $M_3(\mathbb{R})$ tel que :

$$\begin{cases} g(E_{11}) = E_{11} \\ g(E_{12}) = E_{22} \\ g(E_{13}) = E_{22} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} g(E_{21}) = E_{23} \\ g(E_{22}) = E_{12} \\ g(E_{23}) = E_{31} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} g(E_{31}) = E_{32} \\ g(E_{32}) = E_{33} \\ g(E_{33}) = E_{13} \end{cases}$$

clairement g transforme la base $\mathcal{B}$ en une base (déduite de $\mathcal{B}$ par permutation).

Posons $M = E_{11} + E_{22} + E_{33}$. $M = I_3$. $\operatorname{rg} M = 3$.

$g(M) = g(E_{11} + E_{22} + E_{33}) = g(E_{11}) + g(E_{22}) + g(E_{33}) = E_{11} + E_{12} + E_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

donc $\operatorname{rg} g(M) = 1 \neq 3 = \operatorname{rg} M$.

Fin de Q1

- Nous avons déjà montré que f est un endomorphisme de $M_3(\mathbb{R})$.
- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ un élément de $\operatorname{Ker} f$. $f(M) = 0_{M_3(\mathbb{R})}$ donc

$\begin{pmatrix} c'' & b'' & a'' \\ c' & b' & a' \\ c & b & a \end{pmatrix} = 0_{M_3(\mathbb{R})}$. Donc $a = b = c = c' = b' = c' = a'' = b'' = c'' = 0$

Ainsi $M = 0_{M_3(\mathbb{R})}$.

Alors $\operatorname{Ker} f = \{0_{M_3(\mathbb{R})}\}$. f est un endomorphisme injectif de $M_3(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie donc f est un automorphisme de $M_3(\mathbb{R})$.

Exercice -- Montrer que $f^2 = \mathrm{Id}_{M_3(\mathbb{R})}$. Retrouver alors f^{-1}.

Question 8 HEC 2010 $\boxed{\text{F 1}}$

Soit f un endomorphisme d'une espace vectoriel de dimension n supérieur ou égal à 1.

On suppose que $(f-\mathrm{Id}_E)^3\circ(f-2\,\mathrm{Id}_E)=0_{\mathcal{L}(E)}$ et $(f-\mathrm{Id}_E)^2\circ(f-2\,\mathrm{Id}_E)\neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Étudier la digonalisisabilité de f.

Posons $P=(X-1)^3(X-2)$ et $Q=(X-1)^2(X-2)$.

$P(f)=0_{\mathcal{L}(E)}$ et $Q(f)\neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. P est un polynôme annulateur de f dont les zéros sont 1 et 2. Ainsi $\mathrm{Sp}\, f\subset\{1,2\}$. Supposons que f est diagonalisable. Il existe une base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ de E constituée de vecteurs propres respectivement associées aux valeurs propres $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$.

$\forall i\in[\![1,n]\!]$, $f(e_i)=\alpha_i e_i$ et $\alpha_i\in\{1,2\}$.

Alors $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $Q(f)(e_i)=Q(\alpha_i)e_i$. Or $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $Q(\alpha_i)=0$ car les racines de Q sont 1 et 2.

Donc $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $Q(f)e_i=0_E=0_{\mathcal{L}(E)}(e_i)$. $Q(f)$ et $0_{\mathcal{L}(E)}$ sont deux endomorphismes de E qui coïncident sur la base $\mathcal{B}$ de E donc $Q(f)=0_{\mathcal{L}(E)}$

Alors $(f-\mathrm{Id}_E)\overset{2}{\circ}(f-2\mathrm{Id}_E)=0_{\mathcal{L}(E)}$. Ceci contredit l'hypothèse.

<u>f n'est pas diagonalisable.</u>

Question 12 HEC 2010 $\boxed{\text{F 1}}$ ATTIAS et ALLAIN

Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ engendré par la famille $\mathcal{B}=(f_0,f_1,f_2,f_3)$ où $f_k : x \to x^k\, e^{-x}$ pour k dans $\mathbb{N}$.

Q1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E. En déduire la dimension de E.

Q2. Soit D l'application définie sur E par $\forall f \in E,\ D(f) = f' - f''$ où f' et f'' désignent les dérivées première et seconde de f.

Montrer que D est un endomorphisme de E et écrire sa matrice M dans la base $\mathcal{B}$.

Q3. M est-elle inversible ? diagonalisable ?

Q1. Soit $(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in\mathbb{R}^4$ tel que $\alpha_0 f_0+\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\alpha_3 f_3=0_{\mathcal{F}}$.

$\forall x\in\mathbb{R},\quad 0=\alpha_0 e^{-x}+\alpha_1 x e^{-x}+\alpha_2 x^2 e^{-x}+\alpha_3 x^3 e^{-x}=e^{-x}(\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3)$.

$\forall x\in\mathbb{R},\quad \alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3=0$. Le polynôme $\alpha_0+\alpha_1 X+\alpha_2 X^2+\alpha_3 X^3$ est le polynôme nul. Alors $\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.

$\mathcal{B}$ est alors une famille libre et génératrice de E. <u>$\mathcal{B}$ est une base de E. $\dim E=4$.</u>

Q2) • $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall(f,g)\in E^2,\ D(\lambda f+g)=(\lambda f+g)'-(\lambda f+g)''=\lambda f'+g'-\lambda f''-g''=\lambda(f'-f'')+g'-g''=\lambda D(f)+D(g)$.

<u>D est linéaire.</u>

• $\forall x\in\mathbb{R},\ f_0'(x)=-e^{-x}$. $\forall k\in[\![1,3]\!],\ \forall x\in\mathbb{R},\ f_k'(x)=e^{-x}(kx^{k-1}-x^k)$

$\forall x\in\mathbb{R},\ f_0''(x)=e^{-x}$ et $f_1''(x)=e^{-x}(x-2)$. $\forall k\in[\![2,3]\!],\ \forall x\in\mathbb{R},\ f_k''(x)=e^{-x}\big(k(k-1)x^{k-2}-2kx^{k-1}+x^k\big)$

$\forall x\in\mathbb{R},\ D(f_0)(x)=-2e^{-x}=-2f_0(x)$; <u>$D(f_0)=-2f_0$.</u>

$\forall x\in\mathbb{R},\ D(f_1)(x)=e^{-x}(1-x)-e^{-x}(x-2)=3e^{-x}-2xe^{-x}=3f_0(x)-2f_1(x)$

<u>$D(f_1)=3f_0-2f_1$</u>

$\forall k\in[\![2,3]\!],\ \forall x\in\mathbb{R},\ D(f_k)(x)=e^{-x}(kx^{k-1}-x^k)-e^{-x}\big(k(k-1)x^{k-2}-2kx^{k-1}+x^k\big)$.

$\forall k\in[\![2,3]\!],\ \forall x\in\mathbb{R},\ D(f_k)(x)=-k(k-1)f_{k-2}(x)+3kf_{k-1}(x)-2f_k(x)$

<u>$\forall k\in[\![2,3]\!],\ D(f_k)=-k(k-1)f_{k-2}+3kf_{k-1}-2f_k$</u> ... ou <u>$D(f_2)=-2f_0+6f_1-2f_2$</u> et

<u>$D(f_3)=-6f_1+9f_2-2f_3$.</u>

Notons que $\forall k\in[\![0,3]\!],\ D(f_k)\in\mathrm{Vect}(f_0,f_1,f_2,f_3)=E$.

Soit $f \in E$. $\exists (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^4$, $f = \sum_{k=0}^{3} \alpha_k f_k$.

$D(f) = \sum_{k=0}^{3} \alpha_k D(f_k)$ car D est linéaire.

$D(f) = \sum_{k=0}^{3} \alpha_k D(f_k) \in \mathrm{Vect}(D(f_0), D(f_1), D(f_2), D(f_3)) \subset \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2, f_3) = E$.

<u>D est une application de E dans E.</u>

Ceci achève de montrer que <u>D est un endomorphisme de E.</u>

Q3 Posons $A = M_B(D)$. D'après ce qui précède $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

A est triangulaire supérieure.

$\mathrm{Sp}\, A = \{-2\}$.

0 n'est pas valeur propre de A donc <u>A est inversible.</u>

Supposons A diagonalisable. Alors $M_{4,1}(\mathbb{R}) = SEP(A, -2)$.

Donc $4 = \dim M_{4,1}(\mathbb{R}) = \dim SEP(A, -2) = 4 - \mathrm{rg}(A + 2I_4)$.

$\mathrm{rg}(A + 2I_4) = 0$. Alors $A + 2I_4 = 0_{M_4(\mathbb{R})}$. $A = -2I_4$!!

<u>A n'est pas diagonalisable.</u>

Question de cours. Coefficient de corrélation : définition et propriétés.

Question 21 **HEC 2010** Vu par JFC

f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Q1. Trouver $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Q2. Montrer que 0, -1, 2 sont valeurs propres de f.

Q3. Montrer que tout polynôme annulateur de f est divisible par $P = X(X+1)(X-2)$.

JF Réciproque ?

Q4. n appartient à $\mathbb{N}^*$. Calculer le reste dans la division euclidienne de X^n par P. Calculer A^n.

Cours *Théorème de la limite centrée. Intervalle de confiance.*

Q1 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Posons $E = \mathbb{R}^3$.

$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \operatorname{Vect}(e_2+e_3, e_1+e_3, e_2+e_3) = \operatorname{Vect}(e_2+e_3, e_1+e_3)$.

La famille (e_2+e_3, e_1+e_3) est clairement libre.

(e_2+e_3, e_1+e_3) est une base de $\operatorname{Im} f$. $\dim \operatorname{Im} f = 2$.

Alors $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 3-2 = 1$. $\operatorname{Ker} f$ est une droite vectorielle.

$f(e_1) = f(e_3)$; $f(e_1 - e_3) = 0_E$. $e_1 - e_3$ est alors un élément non nul de la droite vectorielle $\operatorname{Ker} f$.

$(e_1 - e_3)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.

Q2 $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$ donc 0 est valeur propre de f.

Soit $u = x e_1 + y e_2 + z e_3$ un élément de E

$u \in \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow (A + I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=0 \end{cases}$

$\operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) = \{x e_1 - x e_2 \; ; \; x \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}(e_1 - e_2)$.

$-1 \in \operatorname{Sp} f$ et $\operatorname{SEP}(f, -1) = \operatorname{Vect}(e_1 - e_2)$.

$u \in \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow (A - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ z=3x \\ x+2x-3x=0 \end{cases}$

$\operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_E) = \{x e_1 + 2x e_2 + 3x e_3 \; ; \; x \in \mathbb{R}\}$.

$\operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_E) = \operatorname{Vect}(e_1 + 2e_2 + 3e_3)$.

$2 \in Sp\, f$ et $SEP(f,2) = Vect(e_1 + 2e_2 + 3e_3)$.

Q3 Soit Q un polynôme annulateur de f.

$Sp\, f \subset \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) = 0\}$

Ainsi $0, -1, 2$ sont des zéros de Q et Q est divisible par $P = X(X+1)(X-2)$.

• Remarque.. Réciproquement soit Q un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ divisible par P.

$\exists S \in \mathbb{R}[X],\ Q = SP$. $\quad Q(f) = S(f) \circ P(f)$. Montrons que $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et ainsi nous aurons $Q(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Il suffit de montrer que $P(A) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

Or $P(A) = A(A+I_3)(A-2I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

$P(A) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $Q(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Finalement les polynômes annulateurs de f sont les polynômes divisibles par P. Notons que P est le polynôme minimal de f...

Q4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons T_n et R_n le quotient et le reste dans la division de X^n par P. $\deg R_n < 3$. $\exists (a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3,\ R_n = a_n X^2 + b_n X + c_n$

$X^n = T_n P + R_n$. $\forall \alpha \in \{0,-1,2\},\ P(\alpha) = 0$ donc $\forall \alpha \in \{0,-1,2\},\ \alpha^n = R_n(\alpha)$

Alors : $\begin{cases} 0 = c_n \\ (-1)^n = a_n - b_n + c_n \\ 2^n = 4a_n + 2b_n + c_n \end{cases}$; $\begin{cases} c_n = 0 \\ a_n - b_n = (-1)^n \\ 2a_n + b_n = 2^{n-1} \end{cases}$; $\begin{cases} c_n = 0 \\ a_n = \frac{1}{3}\left((-1)^n + 2^{n-1}\right) \\ b_n = \frac{1}{3}\left(-2(-1)^n + 2^{n-1}\right) \end{cases}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le reste dans la division de X^n par P est $\frac{1}{3}[(-1)^n + 2^{n-1}]X^2 + \frac{1}{3}[-2(-1)^n + 2^{n-1}]$

$A^n = T_n(A)P(A) + R_n(A) \overset{P(A) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}}{=} R_n(A) = a_n A^2 + b_n A = a_n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} + b_n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & a_n \\ a_n + b_n & 2a_n & a_n + b_n \\ 2a_n + b_n & 2a_n + b_n & 2a_n + b_n \end{pmatrix} = \frac{(-1)^n}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{2^{n-1}}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.