RÉDUCTION

VII COMPLÉMENTS

1. Le cas des matrices d'ordre 2

2. Réduction et transposée

3. Réduction et inverse

4. Spectre d'un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ qui n'augmente pas le degré

5. Valeurs propres et vecteurs propres d'une projection

6. Valeurs propres et vecteurs propres d'une symétrie

7. CNS pour qu'un endomorphisme ou matrice n'ayant qu'une valeur propre soit diagonalisable

8. Une localisation des vecteurs propres

9. Localisation des valeurs propres

10. Droites vectorielles et hyperplans stables

11. Trace et valeurs propres

12. Spectre de AB et de BA

13. Matrices stochastiques et valeurs propres.

14. Projecteurs spectraux d'un endomorphisme diagonalisable

15. Spectre et polynôme annulateur again

16. Spectre d'un polynôme d'endomorphisme ou de matrice again

17. Diagonalisation d'un polynôme d'endomorphisme (ou d'une matrice) diagonalisable

18. Encore une CNS de diagonalisation

19. La trigonalisation

20. CNS pour qu'une matrice de rang 1 soit diagonalisable

21. Sous-vectoriels stables par endomorphisme diagonalisable

22. Ensemble des polynômes d'un endomorphisme (resp. d'une matrice) diagonalisable

23. Commutateur d'un endomorphisme (resp. d'une matrice) diagonalisable

24. Rayon spectral

25. Valeurs propres d'une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{R})$.

26. Autour de la matrice "J"

27. Lien entre réduction de f et réduction de f^2.

28 Restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace vectoriel stable.

29. En vrac...

VIII SAVOIR FAIRE

IX DES ERREURS À NE PAS FAIRE

X QUELQUES CONSIDÉRATIONS PRATIQUES

1. Recherche des valeurs propres et des vecteurs propres d'une matrice

2. Recherche des valeurs propres et des vecteurs propres d'un endomorphisme

3. Savoir si un endomorphisme est diagonalisable et le diagonaliser.

4. Savoir si une matrice est diagonalisable et la diagonaliser.

5. Une condition d'arrêt.

XI DES RHÉTORIQUES TOUTES FAITES

1. Semblablité

2. Recherche simultanée des valeurs propres et des sous-espaces propres d'un endomorphisme

3. Recherche des valeurs propres d'une matrice avec le pivot de Gauss

4. Recherche simultanée des valeurs propres et des sous-espaces propres d'une matrice

5. Diagonalisation d'un endomorphisme diagonalisable

6. Diagonalisation d'une matrice diagonalisable

XII QUELQUES THÈMES CLASSIQUES DU CHAPITRE RÉDUCTION

XIII UN RÉSUMÉ DES BONS COUPS DU PÈRE JIVAROS POUR AMÉLIORER TA RÉDUCTION ATTITUDE

RÉDUCTION

► Si vous trouvez quelques "coquilles" dans ces feuilles merci de me les signaler (jean-francois.cossutta@wanadoo.fr).

P Mentionne des résultats particulièrement utiles dans la pratique de la réduction, souvent oubliés...

★ Mentionne des erreurs à ne pas faire où des hypothèses importantes ou des mises en garde.

SD Mentionne des résultats qu'il serait bon de savoir démontrer.

Dans ce qui suit $\mathbb{K}$ est le corps des réels ou des complexes, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. n appartient à $\mathbb{N}^*$.

I ÉLÉMENTS PROPRES D'UN ENDOMORPHISME

► 1. Définitions usuelles

Th. 1 et **déf. 1** Soient f un endomorphisme de E et λ un élément de $\mathbb{K}$.

Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) Il existe un vecteur **non nul** u de E tel que : $f(u) = \lambda u$.

ii) $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$.

iii) $f - \lambda \operatorname{Id}_E$ n'est pas injective.

Si l'une des assertions suivantes est vérifiée on dit que λ est une **valeur propre** de f.

Déf. 2 L'ensemble des valeurs propres de f est le **spectre de f**. On le note souvent $\operatorname{Sp}(f)$ ou $\operatorname{Sp} f$.

Déf. 3 Soient f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f.

On appelle **vecteur propre de** f **associé à la valeur propre** λ, tout vecteur **non nul** u de E vérifiant : $f(u) = \lambda u$.

Déf. 4 Soient f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f.

Le **sous-espace propre de f associé à la valeur propre** λ est $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$ ou $\{u \in E \mid f(u) = \lambda u\}$.

Nous le noterons souvent SEP (f, λ).

★ Le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ est la réunion de l'ensemble des vecteurs propres de f associés à λ et de $\{0_E\}$. Qu'on se le dise et redise.

Le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ est dans certaine littérature noté $E_\lambda(f)$ et même E_λ.

★ Le passage de $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$ à $\{u \in E \mid f(u) = \lambda u\}$ (et réciproquement) doit être un réflexe fort.

▶ 2. Premières propriétés

Prop. 1 Soit f un endomorphisme de E et λ un élément de $\mathbb{K}$. Si E **est de dimension finie**, les assertions suivantes sont équivalentes :

i) λ est valeur propre de f.

ii) $f - \lambda\ \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif.

iii) $f - \lambda\ \mathrm{Id}_E$ n'est pas surjectif.

iv) $f - \lambda\ \mathrm{Id}_E$ n'est pas bijectif.

v) $\boxed{\mathbf{P}}$ $\mathrm{rg}(f - \lambda\ \mathrm{Id}_E) < \dim E$.

Prop. 2 Soit f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f. On suppose que E **est de dimension finie**.

$$\boxed{\mathbf{P}} \quad \boxed{\dim \mathrm{SEP}\ (f, \lambda) = \dim E - \mathrm{rg}(f - \lambda\ \mathrm{Id}_E).}$$

Th. 2 f est un endomorphisme de E. λ_1, λ_2,..., λ_p sont p valeurs propres $\boxed{\textbf{distinctes}}$ de f.

Attention ici λ_1, λ_2,..., λ_p ne sont pas nécessairement toutes les valeurs propres de f...

Pour tout i dans $[\![1, p]\!]$, u_i est un vecteur propre de f associé à la valeur λ_i et $\mathcal{F}_i$ est une famille **libre** du sous-espace propre SEP (f, λ_i) associé à λ_i.

1. $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une famille libre de E.
2. "$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_p$" est une famille libre de E.
3. SEP (f, λ_1), SEP (f, λ_2),..., SEP (f, λ_p) sont en somme directe.
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \dim \mathrm{SEP}\ (f, \lambda_k) \leqslant \dim E$.

Cor. On suppose que E est de dimension n non nulle. f est un endomorphisme de E.

1. f possède au plus n valeurs propres distinctes.
2. Les sous-espaces propres de f (s'il en existe) sont en somme directe.
3. La somme des dimensions des sous-espaces propres de f (s'il en existe) ne dépasse pas n.

Autrement dit : $\boxed{\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, f} \dim \mathrm{SEP}\ (f, \lambda) \leqslant \dim E}$.

II ENDOMORPHISME DIAGONALISABLE

▶ 1. Définition

Déf. 5 Un endomorphisme f de E est **diagonalisable** s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f.

Diagonaliser f c'est trouver une base de E constituée de vecteurs propres de f.

▶ 2. Conditions pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable

Prop. 3 E est de dimension n non nulle et f est un endomorphisme de E .

f est diagonalisable si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Th. 3 *Une condition* **suffisante** *de diagonalisation.*

E est de dimension n non nulle et f est un endomorphisme de E.

Si f possède n valeurs propres distinctes, f est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Th. 4 *Des conditions* **nécessaires et suffisantes** *de diagonalisation.*

E est de dimension finie non nulle et f est un endomorphisme de E .

Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est diagonalisable.

ii) E est la somme (directe) des sous-espaces propres de f ; c'est à dire : $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \mathrm{SEP}\ (f, \lambda)$.

iii) **PP** La somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à la dimension de E ; c'est à dire : $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, f} \dim \mathrm{SEP}\ (f, \lambda) = \dim E$.

P Notons que dans ce résultat les implications intéressantes sont *iii*) $\Rightarrow$ *i*) et *i*) $\Rightarrow$ *ii*).

▶ 3. L'aspect pratique

Th. 5 **PPP** E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n non nulle.

f est un endomorphisme **diagonalisable** de E.

1. On obtient une base de E constituée de vecteurs propres de f en concaténant une base de chacun des sous-espaces propres de f.

2. Si $\mathcal{B}$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

★★ Notons que 2 ne signifie pas que f admet n valeurs propres deux à deux distinctes ! !

★ Si f est un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel de dimension finie, on prendra soin de faire la différence entre la liste des valeurs propres distinctes de f et la liste des valeurs propres associées aux vecteurs d'une base de vecteurs propres de f.

III ÉLÉMENTS PROPRES D'UNE MATRICE

▶ 1. Définitions usuelles

Th. 6 et **déf. 6** A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ un élément de $\mathbb{K}$.

Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) Il existe une matrice colonne X **non nulle** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que : $AX = \lambda X$.

ii) $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Si l'une des assertions est vérifiée on dit que λ est une **valeur propre** de A.

★★ On se souviendra que l'on peut jouer sur i) ou sur ii) pour montrer que λ est valeur propre de A.

Déf. 7 Le **spectre** de A est l'ensemble des valeurs propres de A.

On le note : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ ou $\mathrm{Sp}(A)$ (si aucune confusion n'est à craindre). On peut encore le noter $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}} A$ ou $\mathrm{Sp}\, A$.

★★ Si A appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on ne confondra pas $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. De même on ne confondra pas les sous-espaces propres de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ceux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Déf. 8 Soient A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de A.

On appelle **vecteur propre** de A associé à la valeur propre λ, toute matrice colonne **non nulle** X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vérifiant : $AX = \lambda X$.

Th. 7 et **déf. 9** Soient A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de A.

$\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\}$ est sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

C'est **le sous-espace propre de A associé à la valeur propre** λ. On le note souvent SEP (A, λ).

★ Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ est la réunion de l'ensemble des vecteurs propres de A associés à λ et de $\{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\}$. Qu'on se le dise et redise.

Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ est dans certaine littérature noté $E_\lambda(A)$ et même E_λ.

On n'hésite pas dans des problèmes de concours (et dans les livres de cours) à écrire SEP $(A, \lambda) = \mathrm{Ker}(A - \lambda\, I_n)$...

▶ 2. Le lien avec les endomorphismes

Th. 8 E est de dimension n non nulle. $\mathcal{B}$ est une base de E et f est un endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$.

1. f et A ont même spectre.

2. Soit u un élément de E de matrice X dans $\mathcal{B}$ et λ un élément de $\mathbb{K}$.

X est un vecteur propre de A associé à λ si et seulement si u est un vecteur propre de f associé à λ.

3. Soit λ une valeur propre de f et A. Le sous-espace propre de f associé à λ a même dimension que le sous-espace propre de A associé à λ. Autrement dit :

$$\dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) = \dim \mathrm{SEP}\ (f, \lambda)$$

★★ On évitera de confondre les vecteurs propres d'un endomorphisme avec les vecteurs propres de l'une de ses matrices.

▶ 3. Propriétés

Prop. 4 A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ un élément de $\mathbb{K}$.

P 1. λ est valeur propre de A si et seulement si $\mathrm{rg}(A - \lambda\, I_n) < n$.

2. Si λ est valeur propre de A : **P** $\boxed{\dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda\, I_n)}$.

Th. 9 A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

λ_1, λ_2,..., λ_p sont p valeurs propres **distinctes** de A.

Attention ici λ_1, λ_2,..., λ_p ne sont pas nécessairement toutes les valeurs propres de A...

Pour tout i dans $[\![1,p]\!]$, X_i est un vecteur propre de A associé à la valeur λ_i et $\mathcal{F}_i$ est une famille **libre** du sous-espace propre SEP (A, λ_i) associé à λ_i.

1. $(X_1, X_2, \dots, X_p)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
2. "$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_p$" est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
3. SEP (A, λ_1), SEP (A, λ_2),..., SEP (A, λ_p) sont en somme directe.
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \dim \text{SEP } (A, \lambda_k) \leqslant n$.

Th. 10 Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. A a au plus n valeurs propres distinctes.
2. Les sous-espaces propres de A (s'il en existe) sont en somme directe.
3. La somme des dimensions des sous-espaces propres de A ne dépasse pas n.

Autrement dit : $\boxed{\displaystyle\sum_{\lambda \in \text{Sp } A} \dim \text{SEP } (A, \lambda) \leqslant n}$.

Th. 11 **P** Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure ou inférieure son spectre est l'ensemble des éléments de sa diagonale.

Th. 12 Deux matrices semblables ont même spectre.

Th. 13 **P** Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de A.

IV MATRICE DIAGONALISABLE

► 1. Définition

Déf. 10 Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Autrement dit s'il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Diagonaliser A c'est trouver une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $D = P^{-1}AP$ ou telle que $A = PDP^{-1}$.

► 2. Conditions pour qu'une matrice soit diagonalisable

Th. 14 **Lien entre diagonalisabilité d'un endomorphisme et d'une de ses matrices.**

E est de dimension n non nulle. $\mathcal{B}$ est une base de E et f est un endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$. **PP** A est diagonalisable si et seulement si f est diagonalisable.

Th. 15 **Une condition suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable.**

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si A possède n valeurs propres distinctes, A est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Th. 16 **Des conditions $\boxed{\textbf{nécessaires et suffisantes}}$ pour qu'une matrice soit diagonalisable.**

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) A est diagonalisable.

i') A est semblable à une matrice diagonale.

ii) $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la somme (directe) des sous-espaces propres de A, c'est à dire $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, A} \mathrm{SEP}\ (A, \lambda)$.

iii) La somme des dimensions des sous-espaces propres de A est égale à n, c'est à dire

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, A} \dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) = n.$$

iv) Il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A.

v) A est la matrice d'un endomorphisme diagonalisable.

vi) L'endomorphisme canoniquement associé à A est diagonalisable.

▸ 3. L'aspect pratique

Th. 17 $\boxed{\textbf{PPP}}$ Soit A une matrice $\boxed{\textbf{diagonalisable}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On obtient une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A en concaténant une base de chacun des sous-espaces propres de A.

2. Si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n et si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à la base $\mathcal{B}$ alors :

$$P^{-1}AP \text{ est la matrice diagonale } \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Th. 18 $\boxed{\textbf{PP}}$ **SD** Soit A une matrice $\boxed{\textbf{diagonalisable}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Ainsi il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ telles que $P^{-1}AP = D$. On note, pour tout j élément de $[\![1, n]\!]$, C_j la $j^{\text{ème}}$ colonne de P.

Alors $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n.

V POLYNÔMES D'ENDOMORPHISME OU DE MATRICE ET RÉDUCTION

▸ 0. Quelques rappels

Ici j'éviterai de noter P les polynômes pour ne pas faire de peine aux matrices de passage...

Déf. 11 $Q = \sum_{k=0}^{r} a_k\, X^k$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$.

1. Si f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : $Q(f) = \sum_{k=0}^{r} a_k\, f^k$.

2. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $Q(A) = \sum_{k=0}^{r} a_k\, A^k$.

Prop. 5 **P** α est un élément de $\mathbb{K}$ et, Q et R sont deux éléments de $\mathbb{K}[X]$.

1. Si f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel :

$\boxed{(\alpha\, Q + R)(f) = \alpha\, Q(f) + R(f)}$ et $\boxed{(QR)(f) = Q(f) \circ R(f)}$

2. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\boxed{(\alpha\, Q + R)(A) = \alpha\, Q(A) + R(A)}$ et $\boxed{(QR)(A) = Q(A)\, R(A)}$.

Prop. 6 1. f est un endomorphisme de E. $\{Q(f)\,;\, Q \in \mathbb{K}[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ stable par $\circ$.

2. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\{Q(A)\,;\, Q \in \mathbb{K}[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stable par $\times$.

Prop. 7 **P** λ est un élément de $\mathbb{K}$ et Q est le polynôme constant égal à λ.

1. Si f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, $Q(f) = \lambda\, \mathrm{Id}_E$

2. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $Q(A) = \lambda\, I_n$.

Prop. 8 **P** A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Q est un élément de $\mathbb{K}[X]$.

$$\boxed{\text{Si } B = P^{-1}AP \text{ alors } Q(B) = P^{-1}Q(A)P} \;.$$

Prop. 9 **P** Q est un élément de $\mathbb{K}[X]$ et D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\boxed{\text{Si } D = \mathrm{Diag}\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \text{ alors } Q(D) = \mathrm{Diag}\,\big(Q(\alpha_1), Q(\alpha_2), \ldots, Q(\alpha_n)\big)} \;.$$

Prop. 10 1. Si λ est un élément de $\mathbb{K}$, $X - \lambda$ est un polynôme annulateur de l'homothétie vectorielle $\lambda\, \mathrm{Id}_E$.

2. $X^2 - X$ est un polynôme annulateur d'une projection de E.

3. $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur d'une symétrie de E.

Prop. 11 Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie admet un polynôme annulateur non nul.

Prop. 12 Toute matrice carrée admet au moins un polynôme annulateur non nul.

▸ 1. Polynôme d'endomorphisme ou de matrice et spectre

Prop. 13 **P** f est un endomorphisme de E, u est un élément de E et λ un élément de $\mathbb{K}$.

1. $\boxed{f(u) = \lambda u \text{ donne } \forall k \in \mathbb{N},\ f^k(u) = \lambda^k u}$

2. Soit Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. $\boxed{f(u) = \lambda u \text{ donne } Q(f)(u) = Q(\lambda)\, u}$.

Prop. 14 **P** f est un endomorphisme de E, u est un élément de E et λ un élément de $\mathbb{K}$.

Si u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, alors u est un vecteur propre de $Q(f)$ associé à la valeur propre $Q(\lambda)$.

★ Notons que $Q\,(\mathrm{Sp}(f)) \subset \mathrm{Sp}\,(Q(f))$ et si λ est une valeur propre de f : SEP $(f, \lambda) \subset$ SEP $(Q(f), Q(\lambda))$.

Prop. 15 **P** A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, X est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et λ un élément de $\mathbb{K}$.

1. $\boxed{AX = \lambda X \text{ donne } \forall k \in \mathbb{N},\ A^k X = \lambda^k X}$

2. Soit Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. $\boxed{AX = \lambda X \text{ donne } Q(A)X = Q(\lambda)\, X}$.

Prop. 16 **P** A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, X est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et λ un élément de $\mathbb{K}$.

Si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors X est un vecteur propre de $Q(A)$ associé à la valeur propre $Q(\lambda)$.

★ Notons que $Q\,(\mathrm{Sp}(A)) \subset \mathrm{Sp}\,(Q(A))$. et si λ est une valeur propre de A : SEP $(A, \lambda) \subset$ SEP $(Q(A), Q(\lambda))$.

▶ 2. Polynôme annulateur et spectre

Th. 19 **P** f est un endomorphisme de E et Q un polynôme annulateur de f.

L'ensemble des valeurs propres de f est **CONTENU** dans l'ensemble des zéros de Q.

Th. 20 **P** A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et Q un polynôme annulateur de A.

L'ensemble des valeurs propres de A est **CONTENU** dans l'ensemble des zéros de Q.

VI MATRICES SYMÉTRIQUES

Th. 21 Soit A une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(R)$.

1. Toutes les valeurs propres de A sont réelles. Autrement dit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$.
2. A est diagonalisable.

Nous y reviendrons au niveau des espaces vectoriels euclidiens

VII COMPLÉMENTS

▶ 1. Le cas des matrices d'ordre 2

Th. 22 **P** Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et λ un élément de $\mathbb{K}$.

λ est une valeur propre de A si et seulement si $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$.

▶ 2. Réduction et transposée

Prop. 17 **SD** Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. A et ${}^tA$ ont même spectre.
2. Si λ est une valeur propre de A (et donc de ${}^tA$) : $\boxed{\dim \mathrm{SEP}\ ({}^tA, \lambda) = \dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda)}$.
3. A et ${}^tA$ sont simultanément diagonalisables.

★★ A et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres mais n'ont pas nécessairement les mêmes sous-espaces propres.

▶ 3. Réduction et inverse

Prop. 18 **SD** Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. 0 n'est pas valeur propre de A.

2. Les valeurs propres de A^{-1} sont les inverses des valeurs propres de A.

3. A et A^{-1} ont les mêmes sous-espaces propres. Plus précisément si F est le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ, F est le sous-espace propre de A^{-1} associé à la valeur propre $1/\lambda$. En clair :

$$\boxed{\forall \lambda \in \operatorname{Sp} A,\ \text{SEP}\ \left(A^{-1}, \tfrac{1}{\lambda}\right) = \text{SEP}\ (A, \lambda)}.$$

4. A et A^{-1} sont simultanément diagonalisables.

5. On suppose que A est diagonalisable et que $\mathcal{B} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeur propres α_1, α_2, ..., α_n. P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à cette base $\mathcal{B}$.

Alors $\mathcal{B} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A^{-1} respectivement associés aux valeur propres $\dfrac{1}{\alpha_1}$, $\dfrac{1}{\alpha_2}$, ..., $\dfrac{1}{\alpha_n}$, $P^{-1}AP = \operatorname{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ et $P^{-1}A^{-1}P = \operatorname{Diag}\left(\dfrac{1}{\alpha_1}, \dfrac{1}{\alpha_2}, \ldots, \dfrac{1}{\alpha_n}\right)$.

6. "Même" chose pour un automorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie non nulle.

▶ 4. Spectre d'un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ qui n'augmente pas le degré

Prop. 19 f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que : $\forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ \deg f(P) \leqslant \deg P$.

Alors la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure.

PP Sa diagonale fournit les valeurs propres de f.

▶ 5. Valeurs propres et vecteurs propres d'une projection.

Prop. 20 F et G sont deux sous-espaces de E supplémentaires. Soit p la projection sur F parallèlement à G.

$F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$ et $G = \operatorname{Ker} p$.

1. Si $F = \{0_E\}$, $G = E$ et p est l'application linéaire nulle ; son spectre est $\{0\}$ et elle est diagonalisable !

2. Si $G = \{0_E\}$, $F = E$ et p est l'identité ; son spectre est $\{1\}$ et elle est diagonalisable !

3. On suppose que F et G ne sont pas réduits au vecteur nul.

   ▷ Le spectre de p est $\{0, 1\}$.

   ▷ F (resp. G) est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 (resp. 0).

   ▷ p est diagonalisable.

▶ 6. Valeurs propres et vecteurs propres d'une symétrie.

Prop. 21 F et G sont deux sous-espaces de E supplémentaires. Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

1. Si $F = \{0_E\}$, $G = E$ et s est $-\mathrm{Id}_E$; son spectre est $\{-1\}$ et elle est diagonalisable !

2. Si $G = \{0_E\}$, $F = E$ et s est Id_E ; son spectre est $\{1\}$ et elle est diagonalisable !

3. On suppose que F et G ne sont pas réduits au vecteur nul.

    ▷ Le spectre de s est $\{-1, 1\}$.

    ▷ F (resp. G) est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 (resp. -1).

    ▷ s est diagonalisable.

▶ 7. CNS pour qu'un endomorphisme ou matrice n'ayant qu'une valeur propre soit diagonalisable.

Prop. 22 **SD**

1. Un endomorphisme f de E n'ayant qu'une seule valeur propre λ est diagonalisable si et seulement si il est égal à $\lambda\,\mathrm{Id}_E$.

2. Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'ayant qu'une seule valeur propre λ est diagonalisable si et seulement si elle est égale à λI_n.

▶ 8. Une localisation des vecteurs propres...

Prop. 23 Soit λ une valeur propre d'un endomorphisme f de E.

Si $\lambda = 0$: SEP $(f, \lambda) = \mathrm{Ker}\, f$.

Si $\lambda \neq 0$: SEP $(f, \lambda) \subset \mathrm{Im}\, f$.

P Ainsi les valeurs propres non nulles de f sont les valeurs propres de la restriction de f à $\mathrm{Im}\, f$ (que l'on peut considérer comme un endomorphisme de $\mathrm{Im}\, f$).

★ Résultat intéressant pour trouver les valeurs propres d'un endomorphisme ayant une "petite" image.

▶ 9. Localisation des valeurs propres...

Prop. 24 **Disques de Gerschgorin.** $n \in [\![2, +\infty[\![$. $A = (a_{i,j})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour tout i élément de $[\![1, n]\!]$, on pose : $r_i = \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$ et $D_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{i,i}| \leqslant r_i\}$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}\, A \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i.}$$

En utilisant $\mathrm{Sp}\, A = \mathrm{Sp}\, {}^tA$ on obtient encore un résultat du même type. $r_i = \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$ est simplement remplacé par $r_i = \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{j,i}|$.

Prop. 25 **Ovales de Cassini**. $n \in [\![2,+\infty[\![$. $A=(a_{i,j})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour tout i élément de $[\![1,n]\!]$, on pose : $r_i=\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{i,j}|$.

Pour tout (i,j) élément de $[\![1,n]\!]^2$ on pose : $C_{ij}=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-a_{i,i}|\,|z-a_{j,j}|\leqslant r_i\,r_j\}$.

$$\boxed{\operatorname{Sp}A\subset\bigcup_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\\ i\neq j}}C_{i,j}}\quad \text{où}\quad \boxed{\operatorname{Sp}A\subset\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant n}C_{i,j}}$$

En utilisant $\operatorname{Sp}A=\operatorname{Sp}{}^tA$ on obtient encore un résutat du même type.

▸ 10. Droites vectorielles et hyperplans stables

Prop. 26 E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension non nulle n. f est un endomorphisme de E.

SD 1. Une droite vectorielle de E est stable par f si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de f.

2 A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ de E.

Un hyperplan de E d'équation $a_1\,x_1+a_2\,x_2+\cdots+a_n\,x_n=0$ dans $\mathcal{B}$ est stable par f si et seulement si $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$.

▸ 11. Trace et valeurs propres

Prop. 27 Soit A **une matrice diagonalisable** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

P La somme des valeurs propres de A est égale à sa trace. $\boxed{\sum\limits_{\lambda\in\operatorname{Sp}(A)}\lambda=\operatorname{tr}(A)}$.

★ Ceci peut aider dans la recherche des valeurs propres d'une matrice...

▸ 12. Spectre de AB et de BA

Prop. 28 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et B une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

L'ensemble des valeurs propres non nulles de AB coïncide avec l'ensemble des valeurs propres non nulles de BA.

Même type de résultat pour des applications linéraires.

Prop. 29 Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $\operatorname{Sp}(AB)=\operatorname{Sp}(BA)$.
2. Si λ est une valeur propre non nulle de AB (et de BA) : $\dim\operatorname{SEP}\,(AB,\lambda)=\dim\operatorname{SEP}\,(BA,\lambda)$.
3. Si A et B sont inversibles : AB est diagonalisable si et seulement si BA est diagonalisable.

Même type de résultat pour les endomorphismes.

★Notons que AB et BA ne sont pas toujours simultanèment diagonalisables.

▸ 13. Matrices stochastiques et valeurs propres

Prop. 30 Soit $A = (a_{k,\ell})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{k,\ell} \geqslant 0$ et $\forall k \in [\![1,n]\!], \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} = 1$.

On dit que A est une matrice **stochastique**.

1. $\boxed{\textbf{SD}}$ 1 est valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

2. $\boxed{\textbf{SD}}$ Les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ ont un module inférieur ou égal à 1.

3. Si λ est une valeur propre de A de module 1, il existe un élément q de $\mathbb{N}^*$ tel que $\lambda^q = 1$.

4. On suppose en plus que $\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{k,\ell} > 0$. Alors 1 est la seule valeur propre de A de module 1 et son sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

▸ 14. Projecteurs spectraux d'un endomorphisme diagonalisable

Prop. 31 f est un endomorphisme **diagonalisable** d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n.

λ_1, λ_2, ..., λ_s sont les valeurs propres distinctes de f. On suppose que $s \geqslant 2$.

1. Pour tout i dans $[\![1,s]\!]$, SEP (f,λ_i) et $\displaystyle\bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} \text{SEP } (f,\lambda_j)$ sont suplémentaires dans E.

Pour tout i dans $[\![1,s]\!]$, on note p_i la projection sur SEP (f,λ_i) parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} \text{SEP } (f,\lambda_j)$.

p_1, p_2, ..., p_s sont **les projecteurs spectraux de** f.

2. a) $\boxed{\forall r \in \mathbb{N},\ f^r = \lambda_1^r\, p_1 + \lambda_2^r\, p_2 + \cdots + \lambda_p^r\, p_s = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^r\, p_i}$.

Les puristes valideront ce qui précède avec $r \in \mathbb{N}^*$.

b) Si Q est un élément de $\mathbb{K}[X]$, $\boxed{Q(f) = \sum_{i=1}^{s} Q(\lambda_i)\, p_i.}$

3. Soit j un élément de $[\![1,s]\!]$.

Il existe un élément L_j de $\mathbb{K}_{s-1}[X]$ et un seul tel que $\forall i \in [\![1,s]\!],\ L_j(\lambda_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$\boxed{p_j = L_j(f)}$. p_j est donc un polynôme de f.

▸ 15. Spectre et polynôme annulateur again

Prop. 32 f est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E et Q est un polynôme annulateur non nul de f.

1. Au moins une des racines de Q est valeur propre de f.

2. f possède au moins une valeur propre.

★ Bien noter qu'ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Prop. 33 A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et Q est un polynôme annulateur non nul de A.

1. Au moins une des racines de Q est valeur propre de A.
2. A possède au moins une valeur propre.

★ Bien noter qu'ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Prop. 34 f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension non nulle n.

Q est un polynôme annulateur non nul de f de degré minimal.

Le spectre de f coïncide avec l'ensemble des zéros de Q.

Prop. 35 A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et Q est un polynôme annulateur non nul de A de degré minimal.

Le spectre de A coïncide avec l'ensemble des zéros de Q.

Prop. 36 f est un endomorphisme **diagonalisable** d'un espace vectoriel de dimension n. λ_1, λ_2, ..., λ_p sont les valeurs propres distinctes de f.

$(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_p)$ est un polynôme annulateur non nul de f de degré minimal.

★ Nous irons plus loin dans 18...

Prop. 37 A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **diagonalisable**. λ_1, λ_2, ..., λ_p sont les valeurs propres distinctes de A.

$(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_p)$ est un polynôme annulateur non nul de A de degré minimal.

★ Nous irons plus loin dans 18...

▶ 16. Spectre d'un polynôme d'endomorphisme ou de matrice again

Prop. 38 f est un endomorphisme de E.

1. $Q(\mathrm{Sp}(f)) \subset \mathrm{Sp}(Q(f))$ (c'est du cours).
2. Soit λ une valeur propre de f. SEP $(f, \lambda) \subset$ SEP $(Q(f), Q(\lambda))$ (c'est encore du cours).
3. $\boxed{\text{Si } \mathbb{K} = \mathbb{C}}$: $Q(\mathrm{Sp}(f)) = \mathrm{Sp}(Q(f))$

Prop. 39 A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $Q(\mathrm{Sp}(A)) \subset \mathrm{Sp}(Q(A))$ (c'est du cours).
2. Soit λ une valeur propre de A. SEP $(A, \lambda) \subset$ SEP $(Q(A), Q(\lambda))$ (c'est encore du cours).
3. $\boxed{\text{Si } \mathbb{K} = \mathbb{C}}$: $Q(\mathrm{Sp}(A)) = \mathrm{Sp}(Q(A))$.

▶ 17. Diagonalisation d'un polynôme d'endomorphisme (ou d'une matrice) diagonalisable

Th. 23 $\boxed{\textbf{SD}}$ E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension non nulle n. Soit f un endomorphisme de E et Q un élément de $\mathbb{K}[X]$. **On suppose que f est diagonalisable**.

1. $Q(f)$ est diagonalisable et $\boxed{\mathrm{Sp}\,\big(Q(f)\big) = \{Q(\lambda)\,;\,\lambda \in \mathrm{Sp}(f)\}}$.
2. Si $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n alors $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de $Q(f)$ respectivement associés aux valeurs propres $Q(\alpha_1)$, $Q(\alpha_2)$, ..., $Q(\alpha_n)$.

★★ Attention on peut avoir $Q(f)$ diagonalisable sans que f soit diagonalisable.

Th. 24 $\boxed{\textbf{SD}}$ Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et Q un élément de $\mathbb{K}[X]$. **on suppose que A est diagonalisable**.

1. $Q(A)$ est diagonalisable et $\boxed{\mathrm{Sp}\big(Q(A)\big) = \{Q(\lambda)\,;\,\lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}}$.

2. Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n alors $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de $Q(A)$ respectivement associés aux valeurs propres $Q(\alpha_1)$, $Q(\alpha_2)$, ..., $Q(\alpha_n)$.

3. Si D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $D = P^{-1}AP$ alors $Q(D)$ est diagonale et $Q(D) = P^{-1}Q(A)P$.

★★ Attention on peut avoir $Q(A)$ diagonalisable sans que A soit diagonalisable.

▶ 18. Encore une CNS de diagonalisation

Prop. 40 E est de dimension n non nulle et f est un endomorphisme de E dont les valeurs propres distinctes sont λ_1, λ_2, ..., λ_p.

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable si et seulement si } \prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k) \text{ est un polynôme annulateur de } f}.$$

Même chose pour une matrice.

Prop. 41 E est de dimension n non nulle et f est un endomorphisme de E.

1. $\boxed{f \text{ est diagonalisable si et seulement si } f \text{ possède un polynôme annulateur scindé à racine simple}}$.

2. f est diagonalisable si et seulement si il existe des scalaires γ_1, γ_2, ..., γ_r **deux à deux distincts** tels que $(f-\gamma_1\,\mathrm{Id}_E)\circ(f-\gamma_2\,\mathrm{Id}_E)\circ\cdots\circ(f-\gamma_r\,\mathrm{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Même chose pour une matrice.

▶ 19. La trigonalisation

Déf. 12 E est de dimension n non nulle et f est un endomorphisme de E.

f est **trigonalisable** s'il existe une base de E telle que la matrice de f dans cette base soit triangulaire (supérieure).

Déf. 13 Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice triangulaire (supérieure).

Prop. 42 E est de dimension n non nulle et f est un endomorphisme de E.

1. $\boxed{f \text{ est trigonalisable si et seulement si } f \text{ possède un polynôme annulateur scindé}}$.

2. f est trigonalisable si et seulement si il existe des scalaires γ_1, γ_2, ..., γ_p tels que $(f-\gamma_1\,\mathrm{Id}_E)\circ(f-\gamma_2\,\mathrm{Id}_E)\circ\cdots\circ(f-\gamma_p\,\mathrm{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Même chose pour une matrice.

Prop. 43 1. Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n non nulle $\boxed{\text{sur } \mathbb{C}}$ est trigonalisable.

2. Toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

▶ 20. CNS pour qu'une matrice de rang 1 soit diagonalisable

Th. 25 $n \in [\![2, +\infty[\![$ et A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) A est diagonalisable.

ii) A possède une autre valeur propre que 0.

iii) A^2 n'est pas nulle.

iv) $\operatorname{tr} A \neq 0$.

▶ 21. Sous-vectoriels stables par endomorphisme diagonalisable

Prop. 44 E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}^*$). G est un sous-espace vectoriel de E.

f est un endomorphisme **diagonalisable** de E. λ_1, λ_2, ..., λ_p sont les p valeurs propres de f.

G est stable par f si et seulement si $G = \bigoplus_{k=1}^{p} G_k$ où G_1, G_2, ..., G_p sont p sous-espaces respectifs de SEP (f, λ_1), SEP (f, λ_2), ..., SEP (f, λ_p).

▶ 22. Ensemble des polynômes d'un endomorphisme (resp. d'une matrice) diagonalisable

Prop. 45 E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

f est un endomorphisme **diagonalisable** de E. λ_1, λ_2, ..., λ_p sont les p valeurs propres distinctes de f.

1. $\{P(f)\ ;\ P \in \mathbb{K}[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. $(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^{p-1})$ est une base de $\{P(f)\ ;\ P \in \mathbb{K}[X]\}$.
3. $\dim \Big(\{P(f)\ ;\ P \in \mathbb{K}[X]\}\Big) = p$.

Même choses pour une matrice diagonalisable.

▶ 23. Commutateur d'un endomorphisme (resp. d'une matrice) diagonalisable

Prop. 46 **SD** f et g sont deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$.

Tout sous-espace propre de f (resp. g) est stable par g (resp. f).

★ On peut presque considérer cela comme un résulat de cours.

Prop. 47 E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

f est un endomorphisme **diagonalisable** de E. λ_1, λ_2, ..., λ_p sont les p valeurs propres distinctes de f.

$\mathcal{C}(f)$ est le commutant de f donc $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$.

1. $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. Soit g un endomorphisme E.

g commute avec f si et seulement si g laisse stable SEP (f, λ_1), SEP (f, λ_2), ..., SEP (f, λ_p).

3. $\dim \mathcal{C}(f) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \dim \mathrm{SEP}\ (f, \lambda_k)$.

Même choses pour une matrice diagonalisable.

Prop. 48 $\boxed{\text{SD}}$ E est de dimension n non nulle. f est un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes.

1. $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si il existe une base de E constituée de vecteurs propres communs à f et à g.

2. $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si f et g se diagonalisent dans la même base.

Même résultat pour les matrices.

Prop. 49 E est de dimension n non nulle. f et g sont deux endomorphismes **diagonalisables** de E.

1. $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si il existe une base de E constitués de vecteurs propres communs à f et à g.

2. $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si f et g se diagonalisent dans la même base.

'Même résultat" pour les matrices.

▶ 24. Rayon spectral

Prop. 50 A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On rappelle que A possède au moins une valeur propre et on appelle **rayon spectral** de A le réel noté $\rho(A)$ et égal à $\underset{\lambda \in \operatorname{Sp} A}{\operatorname{Max}} |\lambda|$.

La suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge ver $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ si et seulement si $\rho(A) < 1$.

▶ 25. Valeurs propres d'une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{R})$.

Prop. 51 A est une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}} A \subset \{0\}$ (autrement dit 0 est la seule valeur propre réelle possible de A).
2. $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}} A \subset i\,\mathbb{R}$ (autrement dit une valeur propre de A est nécessairement un imaginaire pur).

▶ 26. Autour de la matrice "J"

Prop. 52 On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose $\boxed{n \geqslant 2}$.

1. $\operatorname{Sp} J = \{0, n\}$.
2. J est diagonalisable.
3. SEP $(J, 0)$ est l'hyperplan de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ d'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et SEP (J, n) est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Prop. 53 α et β sont deux éléments de $\mathbb{K}$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On suppose $n \geqslant 2$ et $\beta \neq 0$.

1. $\operatorname{Sp} A = \{\alpha - \beta, \alpha - \beta + n\beta\}$.
2. A est diagonalisable.
3. SEP $(A, \alpha - \beta)$ est l'hyperplan de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ d'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ dans la base canonique

de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et SEP $(A, \alpha - \beta + n\beta)$ est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

▸ 27. Lien entre réduction de f et réduction de f^2.

Prop. 54 E est de dimension n non nulle sur $\mathbb{K}$ et f est un endomorphisme de E.

1. Si f est diagonalisable, f^2 est diagonalisable.
2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que f^2 est diagonalisable.

f est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ (ou $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker} f^2$).

▸ 28 Restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace vectoriel stable.

Prop. 55 E est de dimension n non nulle et f est un endomorphisme **diagonalisable** de E.

Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension non nulle et stable par f, la restriction de f à F (considérée comme un endomorphisme de F) est diagonalisable.

▸ 29. En vrac...

Prop. 56 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\boxed{\mathbb{R}})$. Soit λ un élément de $\mathbb{C}$.

On suppose que λ est une valeur propre de A.

1. $\overline{\lambda}$ est encore une valeur propre de A.
2. SEP $\left(A, \overline{\lambda}\right) = \{\overline{X}\,;\, X \in \text{SEP } (A, \lambda)\}$.
3. $\dim \text{SEP } \left(A, \overline{\lambda}\right) = \dim \text{SEP } (A, \lambda)$.

Prop. 57 A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, A est nilpotente si et seulement si 0 est la seule valeur propre de A.

On trouvera le détail de ces compléments dans les exercices plus d'autres compléments.

VIII SAVOIR FAIRE

- Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres d'un endomorphisme et d'une matrice.
- Diagonaliser un endomorphisme ou une matrice.
- Utiliser la trace d'une matrice pour avoir des informations sur ses valeurs propres.
- Utiliser un polynôme annulateur d'un endomorphisme ou d'une matrice dans la recherche des valeurs propres.

- Calculer la puissance $p^{\text{ème}}$ d'une matrice.
- Trouver les racines $p^{\text{ème}}$ d'une matrice.

IX DES ERREURS À NE PAS FAIRE

Dans la suite le plus souvent f est un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et A est une une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

★ $\text{Ker}(f - \lambda\,\text{Id}_E)$ n'est pas vide donc λ est valeur propre de f. "Même chose" pour les matrices.

★ Écrire $\boxed{\text{le}}$ vecteur propre associé à la valeur propre λ...

★ Dans la recherche des valeurs propres faire l'opération $L_i \leftarrow \alpha\, L_i + \beta\, L_j$ sans supposer que α n'est pas nul.

★ $\lambda \in \text{Sp}\, A$ si et seulement $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ (A - \lambda\, I_n)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$. Même chose pour les endomorphismes.

★ $X \in \text{SEP}\ (A, \lambda)$ donc $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ et $AX = \lambda\, X$. Même chose pour les endomorphismes.

★ • La matrice A se diagonalise (ou est diagonale) dans la base...

• La matrice A s'écrit dans la base $\mathcal{B}$: ...

• $\boxed{\text{La}}$ base de vecteurs propres de f (ou A)...

• La base $\boxed{\text{DES}}$ vecteurs propres de f (ou A)...

★ A et P sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. P est inversible et $D = P^{-1}AP$ est diagonale.

• P est la matrice des vecteurs propres de A.

• D est LA matrice diagonale semblable à A.

★ A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Q est un polynôme annulateur de A donc le spectre de A **est l'ensemble** des zéros de Q. Même chose pour un endomorphisme.

★ Toute famille de vecteurs propres d'un endomorphisme f est libre. Même chose pour une matrice.

★ Pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, confondre $\text{Sp}_{\mathbb{R}}\, A$ et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}\, A$.

★ Confondre les sous-espaces propres de f avec les sous-espaces d'une matrice associée.

★ A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'ayant pas n valeurs propres donc A n'est pas diagonalisable. Même chose pour un endomorphisme.

★ A' étant une réduite de Gauss de A, A a les mêmes valeurs propres que A'.

★ $f - \lambda\ \text{Id}_E$ n'est pas inversible donc λ est valeur propre de f sans dire que E est de dimension finie.

★ A est une matrice symétrique donc A est diagonalisable sans dire que A est à coefficients réels.

X QUELQUES CONSIDERATIONS PRATIQUES

▶ 1. Recherche des valeurs propres et des vecteurs propres d'une matrice

Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour trouver les valeurs propres de A on utilise usuellement l'une des méthodes suivantes.

→ On se donne λ dans $\mathbb{K}$ et on cherche le rang de $A - \lambda I_n$.

λ est valeur propre de A si et seulement si $\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$.

Pour chaque valeur propre λ de A on détermine ensuite le sous-espace propre associé en recherchant les X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que : $AX = \lambda X$.

→ On se donne λ dans $\mathbb{K}$ et on cherche une réduite de Gauss de $A - \lambda I_n$. λ est valeur propre de A si et seulement si cette réduite n'est pas inversible ; autrement dit si et seulement si elle a au moins un zéro sur sa diagonale.

On est prié de faire attention aux opérations $L_i \longleftarrow aL_i + bL_j$ (ou $C_i \longleftarrow aC_i + bC_j$) avec a "quelconque".

Pour chaque valeur propre λ de A on détermine ensuite le sous-espace propre associé en recherchant les X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que : $AX = \lambda X$.

→ On se donne λ dans $\mathbb{K}$ et on résoud l'équation : $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $AX = \lambda X$. λ est valeur propre de A si et seulement si cette équation admet une solution non nulle.

Cette méthode fournit au passage les sous-espaces propres de A.

→ On suppose que l'on connaît un polynôme annulateur non nul P de A.

On cherche les zéros de P et on regarde ceux qui sont valeurs propres de A.

→ Si A est triangulaire les valeurs propres de A sont ses éléments diagonaux. Ne reste plus alors qu'à trouver ses sous-espaces propres.

→ On commence par chercher les valeurs propres et les sous-espaces propres d'un endomorphisme de matrice A.

▶ 2. Recherche des valeurs propres et des vecteurs propres d'un endomorphisme

f est un endomorphisme de E.

→ Si E est de dimension quelconque, pour trouver les valeurs propres de f, on cherche pour λ dans $\mathbb{K}$, le noyau de $f - \lambda \text{Id}_E$. λ est valeur propre de f si et seulement si ce noyau n'est pas réduit au vecteur nul. On obtient alors simultanément les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

→ Si E est de dimension finie n non nulle on se donne λ dans $\mathbb{K}$ et on cherche le rang de $f - \lambda \text{ Id}_E$.

λ est valeur propre de f si et seulement si $\text{rg}(f - \lambda \text{ Id}_E) < \dim E$.

Si λ est valeur propre de f, on détermine le sous-espace propre associé en cherchant par exemple $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$.

→ Si E est de dimension finie n non nulle, on peut encore déterminer la matrice A de f dans une base de E et rechercher vecteurs propres et valeurs propres de A.

→ On suppose que l'on connaît un polynôme annulateur non nul P de f.

On cherche les zéros de P et on regarde ceux qui sont valeurs propres de f.

▶ 3. Savoir si un endomorphisme est diagonalisable et le diagonaliser.

On suppose que f est endomorphisme de E et que E est de dimension n non nulle.

→ 1^{er} cas. f possède n valeurs propres distinctes.

f est alors diagonalisable et on obtient une base de E constituée de vecteurs propres de f en prenant un vecteur propre associé à chacunes des n valeurs propres de f.

→ $2^{\text{ème}}$ cas. f a moins de n valeurs propres.

f est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est n ou si et seulement si la somme des sous-espaces propres est E.

Si f est diagonalisable on obtient une base de vecteurs propres de f en concaténant une base de chacun des sous-espaces propres de f.

▶ 4. Savoir si une matrice est diagonalisable et la diagonaliser.

A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Diagonaliser A c'est trouver une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

On commence donc par montrer que la matrice A est diagonalisable en utilisant un des critères proposés ci-dessus.

On construit ensuite P. A ce niveau, si la pratique est convenable, la dialectique est souvent calamiteuse. Il est fréquent d'entendre “parler” de la matrice de A dans la base...

Essayons de mettre les choses au point et distinguons deux méthodes.

→ Méthode 1. On se cale sur un endomorphisme.

On appelle f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ est A. f est diagonalisable puisque A est sensée l'être.

On construit alors une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{K}^n$ constituée de vecteurs propres de f.

La matrice D de f dans $\mathcal{B}'$ est diagonale et si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, P est inversible et $D = P^{-1}AP$.

→ Méthode 2. On raisonne de manière purement matricielle.

On construit une base $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A en concaténant une base de chacun des sous-espaces propres de A.

On note alors P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à la base $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ (qui n'est autre que la matrice dont les colonnes sont : X_1, X_2, $\cdots$, X_n). On peut alors dire que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.

Plus précisémént, si X_1, X_2, $\cdots$, X_n sont des vecteurs propres respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, $\cdots$, α_n alors :

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

▶ 5. Une condition d'arrêt.

Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Il arrive que l'on puisse trouver rapidement p valeurs propres λ_1, λ_2,$\cdots$, λ_p pour A avec des sous-espaces propres de dimensions respectivement supérieures ou égales à n_1, n_2,$\cdots$, n_p (c'est par exemple le cas si l'on connaît DES vecteurs propres sans nécessairement connaître LES vecteurs propres).

Si : $n_1 + n_2 + \cdots + n_p \geqslant n$ on peut alors dire que :

1. Le spectre de A est exactement $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p\}$.
2. Les sous-espaces propres respectivement associés à λ_1, λ_2,$\cdots$, λ_p sont de dimensions exactement n_1, n_2,$\cdots$, n_p.
3. A est diagonalisable.

Même chose pour un endomorphisme.

XI DES RHÉTORIQUES TOUTES FAITES

▶ 1. Semblablité

Soit à montrer que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $E = \mathbb{K}^n$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A. Cherchons une base $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle la matrice de f est B. On fait une analyse du problème en commençant par supposer que $\mathcal{B}'$ existe et on termine par une synthèse.

▶ 2. Recherche simultanée des valeurs propres et des sous-espaces propres d'un endomorphisme

Soit f un endomorphisme de E ($\dim E \in \mathbb{N}^*$).

Moyen : on se donne λ dans $\mathbb{K}$ et on cherche $\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$. Si cet ensemble n'est pas réduit à $\{0_E\}$, λ est valeur propre de f ; dans le cas contraire λ n'est pas valeur propre de f.

Pratiquement : soit λ un élément de $\mathbb{K}$ et et soit u un élément de E.

$$f(u) = \lambda u \Longleftrightarrow \cdots$$

Il ne reste plus qu'à résoudre (le plus souvent) un système avec beaucoup de lucidité. Les valeurs propres de f sont les λ qui donnent à ce système une solution non nulle. Il est préférable dans cette phase étudier le cas de $\boxed{\text{tous}}$ les éléments λ de $\mathbb{K}$..

▶ 3. Recherche des valeurs propres d'une matrice avec le pivot de Gauss

A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit λ un élément de $\mathbb{K}$. Cherchons une réduite de Gauss de $A - \lambda I_n$.

Suit cette recherche en utilisant des opérations élémentaires licites.

A'_λ est une réduite de Gauss de $A - \lambda I_n$. λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_n$ est non inversible donc si et seulement si A'_λ est non inversible. Ainsi λ est valeur propre de A si et seulement si l'un des éléments de la diagonale de A'_λ est nul donc si et seulement si ...

▶ 4. Recherche simultanée des valeurs propres et des sous-espaces propres d'une matrice

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Moyen : on se donne λ dans $\mathbb{K}$ et on cherche $\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda\, X\}$. Si cet ensemble n'est pas réduit à $\{0_E\}$, λ est valeur propre de A ; dans le cas contraire λ n'est pas valeur propre de A.

Pratiquement : soit λ un élément de $\mathbb{K}$ et et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

$$AX = \lambda X \Longleftrightarrow \cdots$$

Il ne reste plus qu'à résoudre le système... avec beaucoup de lucidité. Les valeurs propres de A sont les λ qui donnent à ce système une solution non nulle. Il faut dans cette phase étudier le cas de $\boxed{\text{tous}}$ les éléments λ de $\mathbb{K}$.

Même chose pour un endomorphisme.

▶ 5. Diagonalisation d'un endomorphisme diagonalisable

f est un endomorphisme diagonalisable de E. $\mathcal{B}$ est une base de E. $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$.

Pour tout i élément de $[\![1, p]\!]$ on construit une base $\mathcal{B}_i$ de SEP (f, λ_i).

Comme $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p}$ SEP (f, λ_i), $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2,..., α_n (ok pour alpha ?).

$M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

▶ 6. Diagonalisation d'une matrice diagonalisable

A est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$.

Pour tout i élément de $[\![1, p]\!]$ on construit une base $\mathcal{B}_i$ de SEP (A, λ_i).

Comme $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p}$ SEP (A, λ_i), $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2,..., α_n (ok pour alpha ?).

Soit P la matrice de passage de la base canonique à cette base $\mathcal{B}'$.

$\boxed{\text{Alors}}$ $P^{-1} A P = D$ avec $D =$Diag$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

XII QUELQUES THÈMES CLASSIQUES DU CHAPITRE RÉDUCTION

T. 1 • Calcul de la puissance $p^{\text{ème}}$ d'un endomorphisme ou d'une matrice.

T. 2 • Recherche des racines $p^{\text{ème}}$ d'un endomorphisme ou d'une matrice.

T. 3 • Trigonalisation d'un endomorphisme ou d'une matrice.

T. 4 • $\operatorname{Sp} A^{-1} = \{\frac{1}{\lambda} \mid \lambda \in \operatorname{Sp} A\}$, SEP $(A, \lambda) =$ SEP $\left(A^{-1}, \frac{1}{\lambda}\right)$ et A^{-1} diagonalisable si et seulement si A diagonalisable.

T. 5 • $\operatorname{Sp} {}^tA = \operatorname{Sp} A$, $\dim(\text{SEP } ({}^tA, \lambda)) = \dim(\text{SEP } (A, \lambda))$ et ${}^tA$ diagonalisable si et seulement si A diagonalisable.

T. 6 • Matrices semblables.

T. 7 • CNS de diagonalisation d'une matrice ou d'un endomorphisme n'ayant qu'une seule valeur propre.

T. 8 • f et g sont deux endomorphismes diagonalisables de E. CNS pour que $f \circ g = g \circ f$

T. 9 • $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comparaison $\operatorname{Sp} Q(A)$ et de $Q(\operatorname{Sp} A)$.

T. 10 • Diagonalisation d'un polynôme d'un endomorphisme ou d'une matrice diagonalisable.

T. 11 • Etude de l'ensemble des polynômes annulateurs de A. Polynôme minimal.

T. 12 • Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{Sp} AB = \operatorname{Sp} BA$.

T. 13 • Lien entre la diagonalisation de A et de A^2 (ou de f et de f^2).

T. 14 • Réduction d'une matrice circulante.

T. 15 • Réduction d'un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

T. 16 • Réduction d'un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ qui n'augmente pas le degré.

T. 17 • Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de fonctions.

T. 18 • Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de suites.

T. 19 • Réduction d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $f(M) = AM$ ou $f(M) = AM - MA$ par exemple.

T. 20 • Localisation des valeurs propres. Disques de Gerschgorin et ovales de Cassini.

T. 21 • Valeurs propres d'une matrice stochastique.

T. 22 • Eléments propres d'une projection ou d'une symètrie.

T. 23 • Réduction de "la matrice J".

T. 24 • Réduction des "matrices CL". Réduction des matrices de rang 1.

T. 25 • Projecteurs spectraux.

T. 26 • Commutant d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant n valeurs propres distinctes. Commutant d'une matrice ou d'un endomorphisme diagonalisable .

T. 27 • Droites stables par un endomorphisme. Hyperplans stables par un endomorphisme. Sous-espaces vectoriels stables par endomorphisme diagonalisable.

T. 28 • Ensemble des polynômes d'un endomorphisme ou d'une matrice diagonalisable.

T. 29 • Rayon spectral.

T. 30 • Diagonalisation et polynôme annulateur scindé à racines simples.

T. 31 • Trigonalisation et polynôme annulateur scindé.

T. 32 • Endomorphisme cyclique.

T. 33 • CNS pour qu'un endomorphisme ou une matrice de rang 1 soit diagonalisable.

XIII UN RÉSUMÉ DES BONS COUPS DU PÈRE JIVAROS POUR AMÉLIORER TA RÉDUCTION ATTITUDE

Niveau 1

C. 1 A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ un élément de $\mathbb{K}$.

1. λ est valeur propre de A si et seulement si il existe un élément non nul X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = \lambda\, X$.
2. λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda\, I_n$ n'est pas inversible.
3. λ est valeur propre de A si et seulement si $\mathrm{rg}(A - \lambda\, I_n) < n$.

C. 2 A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de A.

$$\dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n).$$

C. 3 f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n non nulle.

1. λ est valeur propre de f si et seulement si $f - \lambda\, \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif (resp. n'est pas surjectif, resp. n'est pas bijectif).
2. λ est valeur propre de f si et seulement si $\mathrm{rg}(f - \lambda\, \mathrm{Id}_E) < \dim E$.

C. 4 f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie et λ une valeur propre de f.

$$\dim \mathrm{SEP}\ (f, \lambda) = \dim E - \mathrm{rg}(f - \lambda\, \mathrm{Id}_E).$$

C. 5 E est de dimension n non nulle. $\mathcal{B}$ est une base de E et f est un endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$.

1. f et A ont même spectre.

2. Soit u est un élément de E de matrice X dans $\mathcal{B}$ et λ un élément de $\mathbb{K}$.

X est un vecteur propre de A associé à λ si et seulement si u est un vecteur propre de f associé à λ.

3. Soit λ une valeur propre de f et A. Le sous-espace propre de f associé à λ a même dimension que le sous-espace propre de A associé à λ. Autrement dit :

$$\dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) = \dim \mathrm{SEP}\ (f, \lambda)$$

.

C. 6 A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. 0 est valeur propre de A si et seulement si il existe un élément non nul X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.
2. 0 est valeur propre de A si et seulement si A n'est pas inversible.

3. 0 est valeur propre de A si et seulement si $\operatorname{rg} A < n$.

C. 7 f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n non nulle.

1. 0 est valeur propre de f si et seulement si f n'est pas injectif (resp. n'est pas surjectif, resp. n'est pas bijectif).
2. 0 est valeur propre de f si et seulement si $\operatorname{rg} f < \dim E$.

C. 8 f est un endomorphisme de E. λ_1, λ_2,..., λ_p sont p valeurs propres **distinctes** de f.

Attention λ_1, λ_2,..., λ_p ne sont pas nécessairement toutes les valeurs propres de f...

Pour tout i dans $[\![1,p]\!]$, u_i est un vecteur propre de f associé à la valeur λ_i et $\mathcal{F}_i$ est une famille **libre** du sous-espace propre SEP (f,λ_i) associé à λ_i.

1. $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une famille libre de E.
2. "$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_p$" est une famille libre de E.
3. SEP (f,λ_1), SEP (f,λ_2),..., SEP (f,λ_p) sont en somme directe.
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \dim \text{SEP } (f,\lambda_k) \leqslant \dim E$.

C. 9 On suppose que E est de dimension n non nulle. f est un endomorphisme de E.

1. f possède au plus n valeurs propres distinctes.
2. Les sous-espaces propres de f (s'il en existe) sont en somme directe.
3. La somme des dimensions des sous-espaces propres de f (s'il en existe) ne dépasse pas n.

Autrement dit : $\boxed{\displaystyle\sum_{\lambda\in \operatorname{Sp} f} \dim \text{SEP } (f,\lambda) \leqslant \dim E}$.

C. 10 E est de dimension n non nulle et f est un endomorphisme de E.

Si f possède n valeurs propres distinctes, f est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

C. 11 E est de dimension finie non nulle et f est un endomorphisme de E .

Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est diagonalisable.

i') Il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f.

i") Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

ii) E est la somme (directe) des sous-espaces propres de f ; c'est à dire : $E = \displaystyle\bigoplus_{\lambda\in \operatorname{Sp}(f)} \text{SEP } (f,\lambda)$.

iii) **P** $\displaystyle\sum_{\lambda\in \operatorname{Sp} f} \dim \text{SEP } (f,\lambda) = \dim E$, autrement dit la somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à la dimension de E. q

---

C. 12 E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n non nulle.

f est un endomorphisme **diagonalisable** de E.

1. On obtient une base de E constituée de vecteurs propres de f en concaténant une base de chacun des sous-espaces propres de f.

2. Si $\mathcal{B}$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

C. 13 A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

λ_1, λ_2,..., λ_p sont p valeurs propres **distinctes** de A.

Attention λ_1, λ_2,..., λ_p ne sont pas nécessairement toutes les valeurs propres de A...

Pour tout i dans $[\![1, p]\!]$, X_i est un vecteur propre de A associé à la valeur λ_i et $\mathcal{F}_i$ est une famille **libre** du sous-espace propre SEP (A, λ_i) associé à λ_i.

1. $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
2. "$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_p$" est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
3. SEP (A, λ_1), SEP (A, λ_2),..., SEP (A, λ_p) sont en somme directe.
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda_k) \leqslant n$.

C. 14 Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. A a au plus n valeurs propres distinctes.
2. Les sous-espaces propres de A (s'il en existe) sont en somme directe.
3. La somme des dimensions des sous-espaces propres de A ne dépasse pas n.

Autrement dit : $\boxed{\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, A} \dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) \leqslant n}$.

C. 15 A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si A possède n valeurs propres distinctes, A est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

C. 16 A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) A est diagonalisable.

i') A est semblable à une matrice diagonale.

ii) $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la somme (directe) des sous-espaces propres de A ; autrement dit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \mathrm{SEP}\ (A, \lambda)$.

iii) La somme des dimensions des sous-espaces propres de A est égale à n ; autrement dit $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, A} \dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) = n$.

iv) Il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A.

v) A est la matrice d'un endomorphisme diagonalisable.

vi) L'endomorphisme canoniquement associé à A est diagonalisable.

C. 17 Soit A une matrice **diagonalisable** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On obtient une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A en concaténant une base de chacun des sous-espaces propres de A.

2. Si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n et si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à la base $\mathcal{B}$ alors :

$$P^{-1}AP \text{ est la matrice diagonale } \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

C. 18 Soit A une matrice **diagonalisable** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Ainsi il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ telles que $P^{-1}AP = D$. On note, pour tout j élément de $[\![1, n]\!]$, C_j la $j^{\text{ème}}$ colonne de P.

Alors $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n.

C. 19 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

λ est une valeur propre de A si et seulement si $(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$.

C. 20 A appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est triangulaire les valeurs propres de A sont les éléments de sa diagonale.

C. 21 Soit A **une matrice diagonalisable** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La somme des valeurs propres de A est égale à sa trace. $\boxed{\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda = \mathrm{tr}(A)}$.

C. 22 f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que : $\forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ \deg f(P) \leqslant \deg P$.

Alors la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure.

Sa diagonale fournit les valeurs propres de f.

C. 23 Deux matrices semblables ont même spectre et sont simultanément diagonalisables..

C. 24 E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension non nulle n. f est un endomorphisme de E.

Une droite vectorielle de E est stable par f si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de f.

C. 25 Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n ayant n valeurs propres deux à deux distinctes alors les sous-espaces propres de f sont des droites vectorielles et f est diagonalisable.

"Même chose" pour les matrices.

C. 26 f est un endomorphisme de E et λ est une valeur propre **non nulle** de f. Alors SEP $(f, \lambda) \subset \mathrm{Im}\, f$.

Ainsi les valeurs propres non nulles de f sont les valeurs propres de la restriction de f à $\mathrm{Im}\, f$ qui est (presque...) un endomorphisme de $\mathrm{Im}\, f$.

C. 27 A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- $\mathrm{Sp}({}^tA) = \mathrm{Sp}(A)$.
- Si λ est une valeur propre de A : $\dim\Big(\text{SEP } ({}^tA, \lambda)\Big) = \dim\Big(\text{SEP } (A, \lambda)\Big)$.
- ${}^tA$ est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

C. 28 A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• 0 n'est pas valeur propre de A.

• $\mathrm{Sp}(A^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.

• Si λ est une valeur propre de A : $\mathrm{SEP}\ \left(A^{-1}, \frac{1}{\lambda}\right) = \mathrm{SEP}\ (A, \lambda)$.

• A^{-1} est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

• On suppose que A est diagonalisable et que $\mathcal{B} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeur propres α_1, α_2, ..., α_n. P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à cette base $\mathcal{B}$.

Alors $\mathcal{B} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A^{-1} respectivement associés aux valeur propres $\dfrac{1}{\alpha_1}$, $\dfrac{1}{\alpha_2}$, ..., $\dfrac{1}{\alpha_n}$, $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ et $P^{-1}A^{-1}P = \mathrm{Diag}\left(\dfrac{1}{\alpha_1}, \dfrac{1}{\alpha_2}, \ldots, \dfrac{1}{\alpha_n}\right)$.

C. 29 Soit p une projection de E. p est diagonalisable et si p n'est ni $0_{\mathcal{L}(E)}$ ni Id_E alors $\mathrm{Sp}\, p = \{0, 1\}$.

C. 30 Soit s une symétrie de E. s est diagonalisable et si s n'est ni Id_E ni $-\mathrm{Id}_E$ alors $\mathrm{Sp}\, s = \{-1, 1\}$.

C. 31 E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$). f et g sont deux endomorphismes de E.

Si $f \circ g = g \circ f$ les sous-espaces propres de f (resp. g) sont stables par g (resp. f).

"Même chose" pour les matrices.

C. 32 E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$). f et g sont deux endomorphismes de E.

On suppose que f admet n valeurs propres deux à deux distinctes. f est donc diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

1. $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si il existe une base de E constituée de vecteurs propres pour f et pour g.
2. $f \circ g = g \circ f$ si et seulement f et g se diagonalisent dans la même base.

"Même chose" pour les matrices.

C. 33 A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $Q\,(\mathrm{Sp}(A)) \subset \mathrm{Sp}\,(Q(A))$ (c'est du cours).
2. Soit λ une valeur propre de A. $\mathrm{SEP}\ (A, \lambda) \subset \mathrm{SEP}\ (Q(A), Q(\lambda))$ (c'est du cours).

"Même chose" pour les endomorphismes...

C. 34 A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et Q est un élément de $\mathbb{K}[X]$.

On suppose que A est diagonalisable et que $\mathcal{B} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeur propres α_1, α_2, ..., α_n. P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à cette base $\mathcal{B}$. Q est un élément de $\mathbb{K}[X]$.

• $Q(A)$ est diagonalisable.

• $\mathcal{B} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est encore une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de $Q(A)$ respectivement associés aux valeur propres $Q(\alpha_1)$, $Q(\alpha_2)$, ..., $Q(\alpha_n)$.

• $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ et $P^{-1}Q(A)P = \mathrm{Diag}(Q(\alpha_1), Q(\alpha_2), \ldots, Q(\alpha_n))$.

• $\mathrm{Sp}\, Q(A) = \{Q(\alpha_1), Q(\alpha_2), \ldots, Q(\alpha_n)\}$ ou $\mathrm{Sp}\, Q(A) = Q(\mathrm{Sp}\, A)$.

"Même chose" pour les endomorphismes...

C. 35 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'ayant qu'une seule valeur propre λ.

A est diagonalisable si et seulement si $A = \lambda\, I_n$.

"Même chose" pour les endomorphismes...

C. 36 Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède au moins un polynôme annulateur non nul.

"Même chose" pour les endomorphismes...

C. 37 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P un polynôme annulateur non nul de A.

Le spectre de A est contenu dans l'ensemble des zéros de P.

"Même chose" pour les endomorphismes...

C. 38 Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Tout multiple d'un polynôme annulateur de A est un polynôme annulateur de A.

"Même chose" pour les endomorphismes...

C. 39 $f \in \mathcal{L}(E)$. f est **diagonalisable** et λ_1, ..., λ_p sont les valeurs propres distinctes de f.

$(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\ldots(X-\lambda_p)$ est un polynôme annulateur de f.

C. 40 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est **diagonalisable** et λ_1, ..., λ_p sont les valeurs propres distinctes de A.

$(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\ldots(X-\lambda_p)$ est un polynôme annulateur de A.

C. 41 Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n(\boxed{\mathbb{C}})$ et Q un polynôme annulateur non nul de A.

L'une au moins des racines de Q est une valeur propre de A.

Même chose pour les endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$.

C. 42 Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\boxed{\mathbb{C}})$ possède au moins une valeur propre.

Même chose pour les endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$.

C. 43 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\boxed{\mathbb{R}})$. Soit λ un élément de $\mathbb{C}$.

On suppose que λ est une valeur propre de A.

1. $\overline{\lambda}$ est encore une valeur propre de A.
2. $\mathrm{SEP}\ \left(A,\overline{\lambda}\right) = \{\overline{X}\,;\, X \in \mathrm{SEP}\ (A,\lambda)\}$.
3. $\dim \mathrm{SEP}\ \left(A,\overline{\lambda}\right) = \dim \mathrm{SEP}\ (A,\lambda)$.

C. 44 On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose $\boxed{n \geqslant 2}$.

1. $\mathrm{Sp}\, J = \{0, n\}$.
2. J est diagonalisable.

3. SEP $(J,0)$ est l'hyperplan de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ d'équation $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et SEP (J,n) est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$.

C. 45 $A=(a_{ij})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij}\geqslant 0 \text{ et } \forall i\in[\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij}=1$$

• 1 est valeur propre de A.

• Si λ est un élément de $\mathbb{C}$ valeur propre de A : $|\lambda|\leqslant 1$.

Niveau 2

C. 46 A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. P est un élément de $\mathbb{C}[X]$. $P\big(\mathrm{Sp}(A)\big)=\mathrm{Sp}\,\big(P(A)\big)$.

Même chose pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$.

C. 47 E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ ($n\in\mathbb{N}^*$). G est un sous-espace vectoriel de E.

f est un endomorphisme **diagonalisable** de E. λ_1, λ_2, ..., λ_p sont les p valeurs propres de f.

G est stable par f si et seulement si $G=\displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} G_k$ où G_1, G_2, ..., G_p sont p sous-espaces respectifs de SEP (f,λ_1), SEP (f,λ_2), ..., SEP (f,λ_p).

C. 48 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• Tout multiple d'un polynôme annulateur de A est un polynôme annulateur de A.

• Si P_0 est un polynôme annulateur non nul de A de degré minimum, l'ensemble des polynômes annulateurs de A est l'ensemble des multiples de P_0.

• Si P_0 est un polynôme annulateur non nul de A de degré minimum, LES valeurs propres de A sont LES racines de P_0.

• Il existe un unique polynôme normalisé P_1 de $\mathbb{K}[X]$ tel que l'ensemble des polynômes annulateurs de A est l'ensemble des multiples de P_1. P_1 est le polynôme minimal de A. P_1 est l'unique polynôme annulateur normalisé de degré minimal de A.

"Même chose" pour les endomorphismes...

C. 49 A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathrm{Sp}(AB)=\mathrm{Sp}(BA)$.

1. $\mathrm{Sp}(AB)=\mathrm{Sp}(BA)$.
2. Si λ est une valeur propre non nulle de AB (et de BA) : $\dim \mathrm{SEP}\ (AB,\lambda)=\dim\mathrm{SEP}\ (BA,\lambda)$.
3. Si A et B sont inversibles : AB est diagonalisable si et seulement si BA est diagonalisable.

Même type de résultat pour les endomorphismes.

C. 50 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et B une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Notons que $AB\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $BA\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

L'ensemble des valeurs propres non nulles de AB coïncide avec l'ensemble des valeurs propres non nulles de BA.

Même type de résultat pour les endomorphismes.

C. 51 A est une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\, A \subset \{0\}$ (autrement dit 0 est la seule valeur propre réelle possible de A).
2. $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\, A \subset i\,\mathbb{R}$ (autrement dit une valeur propre de A est nécessairement un imaginaire pur).

C. 52 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

A est diagonalisable si et seulement si A possède une autre valeur propre que 0.

A est diagonalisable si et seulement si A^2 n'est pas nulle.

A est diagonalisable si et seulement si la trace de A n'est pas nulle.

C. 53 $A = (a_{ij})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} \geqslant 0 \text{ et } \forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$

• 1 est valeur propre de A.

• Si λ est un élément de $\mathbb{C}$ valeur propre de A : $|\lambda| \leqslant 1$.

• Si de plus $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} > 0$, 1 est la seule valeur propre de A dans $\mathbb{C}$ de module 1 et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

C. 54 **Disques de Gerschgorin**. $n \in [\![2, +\infty[\![$. $A = (a_{i,j})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour tout i élément de $[\![1,n]\!]$, on pose : $r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$ et $D_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{i,i}| \leqslant r_i\}$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}\, A \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i.}$$

En utilisant $\mathrm{Sp}\, A = \mathrm{Sp}\, {}^tA$ on obtient encore un résultat du même type. $r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$ est simplement remplacé par $r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{j,i}|$.

C. 55 α et β sont deux éléments de $\mathbb{K}$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On suppose $n \geqslant 2$ et $\beta \neq 0$.

1. $\mathrm{Sp}\, A = \{\alpha - \beta, \alpha - \beta + n\beta\}$.
2. A est diagonalisable.

3. SEP $(A, \alpha - \beta)$ est l'hyperplan de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ d'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et SEP $(A, \alpha - \beta + n\beta)$ est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

C. 56 f est un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n.

λ_1, λ_2, ..., λ_s sont les valeurs propres distinctes de f. On suppose que $s \geqslant 2$.

1. Pour tout i dans $[\![1, s]\!]$, SEP (f, λ_i) et $\displaystyle\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s}$ SEP (f, λ_j) sont suplémentaires dans E.

Pour tout i dans $[\![1, s]\!]$, on note p_i la projection sur SEP (f, λ_i) parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s}$ SEP (f, λ_j).

p_1, p_2, ..., p_s sont **les projecteurs spectraux de** f.

2. a) $\boxed{\forall r \in \mathbb{N},\ f^r = \lambda_1^r\, p_1 + \lambda_2^r\, p_2 + \cdots + \lambda_p^r\, p_s = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \lambda_i^r\, p_i}$.

Les puristes valideront ce qui précède avec $r \in \mathbb{N}^*$.

b) Si Q est un élément de $\mathbb{K}[X]$, $\boxed{Q(f) = \sum_{i=1}^{s} Q(\lambda_i)\, p_i.}$

3. Soit j un élément de $[\![1, s]\!]$.

Il existe un élément L_j de $\mathbb{K}_{s-1}[X]$ et un seul tel que $\forall i \in [\![1, s]\!],\ L_j(\lambda_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$\boxed{p_j = L_j(f)}$. p_j est donc un polynôme de f.

Niveau 3

C. 57 f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ de dimension n.

F est un sous-espace vectoriel de E, de dimension non nulle, stable par f.

Si f est diagonalisable, la restriction de f à F définit un endomorphisme de F qui est diagonalisable.

C. 58 E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}^*$). G est un sous-espace vectoriel de E.

f est un endomorphisme **diagonalisable** de E. λ_1, λ_2, ..., λ_p sont les p valeurs propres de f.

G est stable par f si et seulement si $G = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} G_k$ où G_1, G_2, ..., G_p sont p sous-espaces respectifs de SEP (f, λ_1), SEP (f, λ_2), ..., SEP (f, λ_p).

C. 59 E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

f est un endomorphisme **diagonalisable** de E. λ_1, λ_2, ..., λ_p sont les p valeurs propres de f.

$\mathcal{C}(f)$ est le commutant de f donc $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(|) f \circ g = g \circ f\}$.

1. $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

2. Soit g un endomorphisme E.

g commute avec f si et seulement si g laisse stable SEP (f,λ_1), SEP (f,λ_2), ..., SEP (f,λ_p).

3. $\dim \mathcal{C}(f) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \dim \text{SEP } (f,\lambda_k)$.

Même chose pour une matrice diagonalisable.

$\boxed{\textbf{C. 60}}$ E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n ($n\in\mathbb{N}^*$). f et g sont deux endomorphismes **diagonalisables** de E.

1. $f\circ g = g\circ f$ si et seulement si il existe une base de E constituée de vecteurs propres communs à f et à g.

2. $f\circ g = g\circ f$ si et seulement f et g se diagonalisent dans la même base.

"Même chose" pour les matrices.

$\boxed{\textbf{C. 61}}$ E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ ($n\in\mathbb{N}^*$).

f est un endomorphisme **diagonalisable** de E. λ_1, λ_2, ..., λ_p sont les p valeurs propres de f.

1. $\{P(f)\ ;\ P\in\mathbb{K}[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. $(\text{Id}_E, f, f^2, \dots, f^{p-1})$ est une base de $\{P(f)\ ;\ P\in\mathbb{K}[X]\}$.
3. $\dim \Big(\{P(f)\ ;\ P\in K[X]\}\Big) = p$.

Même chose pour matrice diagonalisable.

$\boxed{\textbf{C. 62}}$ E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension non nulle n. f est un endomorphisme de E.

A est la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ de E.

Un hyperplan de E d'équation $a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + \cdots + a_n\,x_n = 0$ dans $\mathcal{B}$ est stable par f si et seulement si $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$.

$\boxed{\textbf{C. 63}}$ E est de dimension n non nulle et f est un endomorphisme de E dont les valeurs propres distinctes sont λ_1, λ_2, ..., λ_p.

$\boxed{f \text{ est diagonalisable si et seulement si } \displaystyle\prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k) \text{ est un polynôme annulateur de } f}$.

Même chose pour une matrice.

$\boxed{\textbf{C. 64}}$ E est de dimension n non nulle et f est un endomorphisme de E.

1. $\boxed{f \text{ est diagonalisable si et seulement si } f \text{ possède un polynôme annulateur scindé à racine simple}}$.

2. f est diagonalisable si et seulement si il existe des scalaires γ_1, γ_2, ..., γ_r **deux à deux distincts** tels que $(f-\gamma_1\ \text{Id}_E)\circ(f-\gamma_2\ \text{Id}_E)\circ\cdots\circ(f-\gamma_r\ \text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Même chose pour une matrice.

$\boxed{\textbf{C. 65}}$ E est de dimension n non nulle et f est un endomorphisme de E.

$\boxed{1.\ f \text{ est trigonalisable si et seulement si } f \text{ possède un polynôme annulateur scindé}}$.

2. f est trigonalisable si et seulement si il existe des scalaires γ_1, γ_2, ..., γ_p tels que $(f - \gamma_1 \operatorname{Id}_E) \circ (f - \gamma_2 \operatorname{Id}_E) \circ \cdots \circ (f - \gamma_p \operatorname{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Même chose pour une matrice.

$\boxed{\textbf{C. 66}}$ 1. Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n non nulle $\boxed{\text{sur } \mathbb{C}}$ est trigonalisable.

2. Toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

$\boxed{\textbf{C. 67}}$ $A = (a_{ij})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} \geqslant 0 \text{ et } \forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$

• 1 est valeur propre de A.

• Si λ est un élément de $\mathbb{C}$ valeur propre de A : $|\lambda| \leqslant 1$.

• Si λ est une valeur propre de A dans $\mathbb{C}$ de module 1, il existe un élément r de $\mathbb{N}^*$ tel que λ soit une racine $r^{\text{ème}}$ de l'unité.

$\boxed{\textbf{C. 68}}$ A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On rappelle que A possède au moins une valeur propre et on appelle **rayon spectral** de A le réel noté $\rho(A)$ et égal à $\underset{\lambda \in \operatorname{Sp} A}{\operatorname{Max}} |\lambda|$.

La suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge ver $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ si et seulement si $\rho(A) < 1$.

$\boxed{\textbf{C. 69}}$ **Ovales de Cassini**. $n \in [\![2, +\infty[\![$. $A = (a_{i,j})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour tout i élément de $[\![1,n]\!]$, on pose : $r_i = \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$.

Pour tout (i,j) élément de $[\![1,n]\!]^2$ on pose : $C_{ij} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{i,i}|\,|z - a_{j,j}| \leqslant r_i\, r_j\}$.

$$\boxed{\operatorname{Sp} A \subset \bigcup_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i\neq j}} C_{i,j}} \quad \text{où} \quad \boxed{\operatorname{Sp} A \subset \bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant n} C_{i,j}}$$

En utilisant $\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} {}^t A$ on obtient encore un résultat du même type.
