EXERCICE 1

Exercice **N1-** **Diagonalisation d'un endomorphisme.**

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. f est l'endomorphisme de E de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f. Diagonaliser f si cela est possible.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E$.

$u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow (f - \lambda \mathrm{Id}_E)(u) = 0_E \Leftrightarrow (A - \lambda I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x - 3y + 3z = 0 \\ 3x - (5+\lambda)y + 3z = 0 \\ 6x - 6y + (4-\lambda)z = 0 \end{cases} \underset{\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (1-\lambda)x - 3y + 3z = 0 \\ (\lambda+2)(x-y) = 0 \\ (\lambda+2)(2y - z) = 0 \end{cases}$$

1er cas.. $\lambda = -2$

$u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow 3x - 3y + 3z = 0 \Leftrightarrow x - y + z = 0$.

Alors -2 est valeur propre de f et $\mathrm{SEP}(f, -2)$ est le plan d'équation $x - y + z = 0$ dans $\mathcal{B}$.

2e cas.. $\lambda \neq -2$

$$u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x - 3y + 3z = 0 \\ x - y = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 2y \\ 0 = (1-\lambda)y - 3y + 6y = (4-\lambda)y \end{cases}$$

a) $\lambda = 4$

$u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 2y \end{cases}$. ceci suffit pour dire que :

4 est valeur propre de f et $\mathrm{SEP}(f, 4)$ est la droite vectorielle engendrée par $e_1 + e_2 + 2e_3$

b) $\lambda \neq 4$

$$u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = y = 0 \\ z = 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

λ n'est pas valeur propre de f ... normal avec ce qui précède !

Finalement $\mathrm{Sp}\, f = \{2, 4\}$, $\mathrm{SEP}(f, 2)$ est le plan vectoriel d'équation $x - y + z = 0$ dans $\mathcal{B}$ et $\mathrm{SEP}(f, 4)$ est la droite vectorielle engendrée par $e_1 + e_2 + 2e_3$.

$\dim \mathrm{SEP}(f, 2) + \dim \mathrm{SEP}(f, 4) = 2 + 1 = 3 = \dim E$. f est diagonalisable.

...

$1-1+0=0$ et $0-1+1=0$ donc $(e_1+e_2,\ e_2+e_3)$ est une famille d'éléments de $SEP(f,2)$.

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\alpha(e_1+e_2)+\beta(e_2+e_3)=0_E$. $\alpha e_1+(\alpha+\beta)e_2+e_3=0_E$.

Alors $\alpha=\alpha+\beta=\beta=0$ car (e_1,e_2,e_3) est libre. Ainsi :

$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \alpha(e_1+e_2)+\beta(e_2+e_3)=0_E \Rightarrow \alpha=\beta=0$. Alors $\mathcal{B}_1=(e_1+e_2,e_2+e_3)$ est une famille libre de cardinal 2 de $SEP(f,2)$ qui est de dimension 2 donc $\mathcal{B}_1$ est une base de $SEP(f,2)$.

$e_1+e_2+2e_3\neq 0_E$ donc $\mathcal{B}_2=(e_1+e_2+2e_3)$ est une base de $SEP(f,4)$.

Comme $E=SEP(f,2)\oplus SEP(f,4)$, $\mathcal{B}'=$ "$\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$" est une base de E. Mieux :

<u>$\mathcal{B}'=(e_1+e_2,\ e_2+e_3,\ e_1+e_2+2e_3)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres 2, 2 et 4.</u>

<u>Remarque</u>.. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

$$P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix} \text{ et } P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}=\mathrm{Diag}(2,2,4).$$

<u>Exercice</u>.. Montrer que $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

R.

EXERCICE 2

Exercice **N1** **Calcul des puissances d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$..**

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de A. A est-elle diagonalisable ?

Calculer A^n pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$

Version 1 On cherche les valeurs propres de A puis ses sous-espaces propres

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Cherchons une réduite de Gauss de $A_\lambda = A - \lambda I_3$

$A_\lambda = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{pmatrix}$; $L_1 \leftrightarrow L_3$ donc $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ -1-\lambda & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{\lambda+1}{2} L_1$ donc :

$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & \lambda+1 & -\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}+2 \end{pmatrix}$; $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ donc $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -\lambda \\ 0 & 2 & -\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}+4 \\ 0 & \lambda+1 & -\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}+2 \end{pmatrix}$; $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{\lambda+1}{2} L_2$

donc : $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -\lambda \\ 0 & 2 & \frac{1}{2}(8-\lambda^2-\lambda) \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}$ avec $P(\lambda) = -\frac{\lambda+1}{2} \times \frac{1}{2} \times (8-\lambda^2-\lambda) - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} + 2$.

$P(\lambda) = \frac{\lambda+1}{4}(\lambda^2+\lambda-8) - \frac{1}{2}(\lambda^2+\lambda-4) = \frac{1}{4}(\lambda^3+\lambda^2-8\lambda+\lambda^2+\lambda-8-2\lambda^2-2\lambda+8) = \frac{1}{4}(\lambda^3-9\lambda) = \frac{1}{4}\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$

Ainsi $A'_\lambda = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -\lambda \\ 0 & 2 & (8-\lambda^2-\lambda)/2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\lambda(\lambda-3)(\lambda+3) \end{pmatrix}$ est une réduite de Gauss de $A_\lambda = A - \lambda I_3$.

$\lambda \in \mathrm{Sp}\, A \iff A_\lambda$ non inversible $\iff A'_\lambda$ non inversible $\overset{A'_\lambda \text{ est triangulaire supérieure}}{\iff} \frac{1}{4}\lambda(\lambda-3)(\lambda+3) = 0 \iff \lambda \in \{-3, 0, 3\}$.

Ainsi $\underline{\mathrm{Sp}\, A = \{-3, 0, 3\}}$. $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A admet trois valeurs propres distinctes donc

<u>A est diagonalisable.</u>

Cherchons les sous-espaces propres de A. On pourrait utiliser A'_λ mais je conseille de revenir à A_λ car A'_λ peut contenir des erreurs (souvent de recopie) n'ayant pas affectées la recherche des valeurs propres de A...

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. $X \in SEP(A, -3) \iff (A + 3I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$X \in SEP(A, -3) \iff \begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ 4y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = -z/2 \\ 0 = -2z - z + 3z \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = -\frac{1}{2}z \end{cases}$ Alors $\underline{SEP(A, -3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)}$

$X \in SEP(A,0) \Leftrightarrow AX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&2\\2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}-x+2z=0\\y+2z=0\\2x+2y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2z\\y=-2z\\4z-4z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2z\\y=-2z\end{cases}$.

Alors $\underline{SEP(A,0) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}}$.

$X \in SEP(A,3) \Leftrightarrow (A-3I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-4&0&2\\0&-2&2\\2&2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}-4x+2z=0\\-2y+2z=0\\2x+2y-3z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{2}z\\y=z\\z+2z-3z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{2}z\\y=z\end{cases}$

$\underline{SEP(A,3) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}$.

Version 2 On cherche simultanément les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. $(A-\lambda I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-1-\lambda&0&2\\0&1-\lambda&2\\2&2&-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

$(A-\lambda I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases}-(\lambda+1)x+2z=0\\(1-\lambda)y+2z=0\\2x+2y-\lambda z=0\end{cases}$.

$(A-\lambda I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases}z = \frac{\lambda+1}{2}x\\0 = 2x+2y-\lambda z = 2x+2y-\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}x = \frac{1}{2}\left(4y+(4-\lambda^2-\lambda)x\right)\\0 = (1-\lambda)y+2z = (1-\lambda)y+(\lambda+1)x\end{cases}$

$(A-\lambda I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases}z = \frac{\lambda+1}{2}x\\y = \frac{1}{4}(\lambda^2+\lambda-4)x\\0 = (1-\lambda)\frac{1}{4}(\lambda^2+\lambda-4)x+(\lambda+1)x = \frac{1}{4}\left(\lambda^2+\lambda-4-\lambda^3-\lambda^2+4\lambda+4\lambda+4\right)x = \frac{-\lambda^3+9\lambda}{4}x\end{cases}$

$(A-\lambda I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases}z = \frac{\lambda+1}{2}x\\y = \frac{1}{4}(\lambda^2+\lambda-4)x\\\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)x = 0\end{cases}$

1er cas. – $\lambda(\lambda-3)(\lambda+3) \neq 0$.

Alors $(A-\lambda I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\end{cases} \Leftrightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. λ n'est pas valeur propre.

2e cas. – $\lambda(\lambda-3)(\lambda+3) = 0$. $(A-\lambda I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases}y = \frac{1}{4}(\lambda^2+\lambda-4)x\\z = \frac{\lambda+1}{2}x\end{cases}$.

Alors $\lambda \in Sp\,A$ et $SEP(A,\lambda) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{4}(\lambda^2+\lambda-4)\\\frac{\lambda+1}{2}\end{pmatrix}\right)$

On retrouve $Sp\,A = \{-3, 0, 3\}$, $SEP(A,-3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4}(9-3-4) \\ \frac{-3+1}{2} \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$,

$SEP(A,0) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et

$SEP(A,3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4}(9+3-4) \\ \frac{3+1}{2} \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

Diagonalisons A. $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $SEP(A,-3)$;

$\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $SEP(A,0)$;

$\mathcal{B}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $SEP(A,3)$;

$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = SEP(A,-3) \oplus SEP(A,0) \oplus SEP(A,3)$.

Alors $\mathcal{B} =$ "$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$" est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $-3, 0, 3$.

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $-3, 0, 3$.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$.

1) $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

2) P est inversible car P est une matrice de passage ;

3) $P^{-1}AP = D$ où $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$A = PDP^{-1}$. Une récurrence simple donne $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Cherchons P^{-1}.

Comme P est inversible nous raisonnerons pas dans la suite par équivalences.

Soient $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux éléments de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que $PX=Y$. $\begin{pmatrix}2&2&1\\1&-2&2\\-2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}2x+2y+z=x'\\x-2y+2z=y'\\-2x+y+2z=z'\end{cases}$$

L_1+L_2 et L_2+2L_3 donnent : $\begin{cases}3x+3z=x'+y'\\-3x+6z=y'+2z'\end{cases}$

"(1)+(2)" donc $9z = x'+y'+y'+2z'$ et

$9x = 2x'+2y'-y'-2z'$.

2(1)-(2)

Ainsi $x=\frac{1}{9}(2x'+y'-2z')$ et $z=\frac{1}{9}(x'+2y'+2z')$.

L_1+L_3 donne : $3y+3z=x'+z'$ donc $y=\frac{1}{3}(x'+z'-3z)=\frac{1}{3}\left(x'+z'-\frac{1}{3}(x'+2y'+2z')\right)=\frac{1}{9}(3x'+3z'-x'-2y'-2z')$

Finalement $\begin{cases}x=\frac{1}{9}(2x'+y'-2z')\\y=\frac{1}{9}(2x'-2y'+z')\\z=\frac{1}{9}(x'+2y'+2z')\end{cases}$ ce qui permet de dire que $P^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2&1&-2\\2&-2&1\\1&2&2\end{pmatrix}$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons provisoirement $\alpha=(-3)^n$ et $\beta=3^n$ pour faciliter les écritures.

$$A^n=PD^nP^{-1}=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&-2&2\\-2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&0&0\\0&0&\beta\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}2\alpha&0&\beta\\\alpha&0&2\beta\\-2\alpha&0&2\beta\end{pmatrix}\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2&1&-2\\2&-2&1\\1&2&2\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4\alpha+\beta&2\alpha+2\beta&-4\alpha+2\beta\\2\alpha+2\beta&\alpha+4\beta&-2\alpha+4\beta\\-4\alpha+2\beta&-2\alpha+4\beta&4\alpha+4\beta\end{pmatrix}.$$

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $A^n=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4(-3)^n+3^n&2(-3)^n+2\times3^n&-4(-3)^n+2\times3^n\\2(-3)^n+2\times3^n&(-3)^n+4\times3^n&-2(-3)^n+4\times3^n\\-4(-3)^n+2\times3^n&-2(-3)^n+4\times3^n&4(-3)^n+4\times3^n\end{pmatrix}$.

On a aussi $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $A^n=\frac{1}{9}\left[(-3)^n\begin{pmatrix}4&2&-4\\2&1&-2\\-4&-2&4\end{pmatrix}+3^n\begin{pmatrix}1&2&2\\2&4&4\\2&4&4\end{pmatrix}\right]$.

EXERCICE 3

Exercice **N1⁻** **Diagonalisation d'une matrice de permutation et d'une matrice circulante.**

Oral ESCP 1997 2-4.

a b et c sont trois éléments de $\mathbb{C}$. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Diagonaliser A et M dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Thème abordé dans oral ESCP 1999 2-8, LYON 1991 MI Pb 1 (à l'ordre 4). On trouve dans HEC 2009 des matrices circulantes dans l'étude de suites définies par une réccurrence linéaire.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

$(A - \lambda I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -\lambda x + z = 0 \\ x - \lambda y = 0 \\ y - \lambda z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = \lambda x \\ y = \lambda z = \lambda^2 x \\ 0 = x - \lambda y = x - \lambda^3 x = (1-\lambda^3)x \end{cases}$

$(A - \lambda I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{cases} y = \lambda^2 x \\ z = \lambda x \\ (1-\lambda^3)x = 0 \end{cases}$.

<u>1er cas</u> $1 - \lambda^3 \neq 0$. $(A - \lambda I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. λ n'est pas valeur propre de A

<u>2e cas</u> $1 - \lambda^3 = 0$. Donc $(A - \lambda I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{cases} y = \lambda^2 x \\ z = \lambda x \end{cases}$.

Alors λ est valeur propre de A et $SEP(A, \lambda) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^2 \\ \lambda \end{pmatrix}\right)$.

Notons encore que $1 - \lambda^3 = 0 \iff \lambda^3 = 1 \iff \lambda \in \{1, j, j^2\}$ avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Ainsi <u>$Sp\, A = \{1, j, j^2\}$, $SEP(A, 1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $SEP(A, j) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}\right)$ et $SEP(A, j^2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}\right)$</u>

<u>Remarque</u> : $j^2 = \bar{j}$!

$A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A possède trois valeurs propres distinctes donc <u>A est diagonalisable.</u>

Posons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B}_1 = (X_1)$ est une base de $SEP(A, 1)$;

$\mathcal{B}_2 = (X_2)$ est une base de $SEP(A, j)$;

$\mathcal{B}_3 = (X_3)$ est une base de $SEP(A, j^2)$;

$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C}) = SEP(A, 1) \oplus SEP(A, j) \oplus SEP(A, j^2)$ car A est diagonalisable.

Alors $\mathcal{B} = $ "$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$" est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres associés aux valeurs propres 1, j et j^2.

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres 1, j et j^2.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ à la base $\mathcal{B}$.

1) $P = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&j^2&j\\1&j&j^2\end{pmatrix}$.

2) P est inversible comme matrice de passage.

3) $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(1,j,j^2) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&j&0\\0&0&j^2\end{pmatrix}$.

<u>En plus</u>... Inversons P. Ce n'est pas utile dans ce qui suit de raisonner par équivalences car P est inversible. Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ tels que $PX = Y$.

Alors $\begin{cases} x+y+z = x' & L_1 \\ x+j^2y+jz = y' & L_2 \\ x+jy+j^2z = z' & L_3 \end{cases}$. Rappelons que $1+j+j^2=0$.

$L_1+L_2+L_3$, $L_1+jL_2+j^2L_3$ et $L_1+j^2L_2+jL_3$ donnent immédiatement :

$3x = x'+y'+z'$, $3y = x'+jy'+j^2z'$ et $3z = x'+j^2y'+jz'$.

Plus de doute $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&j&j^2\\1&j^2&j\end{pmatrix}$.

<u>Diagonalisons M.</u> $M = aI_3 + b\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} + cA$.

Or $A^2 = \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$. Alors $M = aI_3 + bA^2 + A$.

VI) $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres 1, j et j^2. Alors $AX_1 = X_1$, $AX_2 = jX_2$, $AX_3 = j^2X_3$, $A^2X_1 = X_1$, $A^2X_2 = j^2X_2$ et $A^2X_3 = (j^2)^2X_3 = jX_3$.

Donc $MX_1 = aI_3X_1 + bA^2X_1 + cAX_1 = (a+b+c)X_1$.

$MX_2 = aI_3X_2 + bA^2X_2 + cAX_2 = (a+bj^2+cj)X_2$.

$MX_3 = aI_3X_3 + bA^2X_3 + cAX_3 = (a+bj+cj^2)X_3$.

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de M respectivement associés aux valeurs propres $a+b+c$, $a+bj^2+cj$ et $a+bj+cj^2$.

comme P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ à la base $\mathcal{B}$:

$P^{-1}MP = \mathrm{Diag}(a+b+c,\ a+bj^2+cj,\ a+bj+cj^2)$.

(V2) $P^{-1}AP = D$ avec $D = \mathrm{Diag}(1, j, j^2)$.

Alors $P^{-1}MP = P^{-1}(aI_3 + bA^2 + cA)P = a\,P^{-1}I_3P + b\,P^{-1}A^2P + c\,P^{-1}AP = a\,I_3 + b(P^{-1}AP)^2 + c\,D$.

$P^{-1}MP = a\,I_3 + b\,D^2 + c\,D = a\,\mathrm{Diag}(1,1,1) + b\,\mathrm{Diag}(1, j^2, j^4) + c\,\mathrm{Diag}(1, j, j^2)$.

$P^{-1}MP = \mathrm{Diag}(a+b+c,\ a+bj^2+cj,\ a+bj+cj^2)$.

M est semblable à la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(a+b+c,\ a+bj^2+cj,\ a+bj+cj^2)$.

Alors 1°) M est diagonalisable

2°) $\mathrm{Sp}\,M = \{a+b+c,\ a+bj^2+cj,\ a+bj+cj^2\}$

3°) comme $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de M respectivement associés aux valeurs propres $a+b+c$, $a+bj^2+cj$ et $a+bj+cj^2$.

Exercice Trouver les sous-espaces propres de M ! (M n'a pas nécessairement trois valeurs propres distinctes ...).

R.

EXERCICE 4

Exercice N1⁻ QSP ESCP 2011.

x, y et z sont trois réels. $A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 2 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

A est triangulaire supérieure donc son spectre est l'ensemble de ses éléments diagonaux.

Ainsi $\mathrm{Sp}\, A = \{1, 2\}$. Soit $U = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$U \in SEP(A, 2) \Longleftrightarrow (A - 2I_3)U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + x\beta + y\gamma = 0 \\ \gamma z = 0 \\ -\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha = x\beta \end{cases}.$

Alors $SEP(A, 2)$ est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\dim SEP(A, 2) = 1$.

$U \in SEP(A, 1) \Leftrightarrow (A - I_3)U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x\beta + y\gamma = 0 \\ \beta + z\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -z\gamma \\ (y - xz)\gamma = 0 \end{cases}$

__1er cas.__ $y - xz \neq 0$.

$U \in SEP(A, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$. $SEP(A, 1)$ est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\dim SEP(A, 1) = 1$

__2ème cas..__ $y - xz = 0$

$U \in SEP(A, 1) \Leftrightarrow \beta = -z\gamma \Leftrightarrow \beta + z\gamma = 0$. Alors $SEP(A, 1)$ est un plan vectoriel donc

$\dim SEP(A, 1) = 2$.

Finalement $\dim SEP(A, 1) + \dim SEP(A, 2) = \begin{cases} 2 & \text{si } y - xz \neq 0 \\ 3 & \text{si } y - xz = 0 \end{cases}$.

Plus de doute : __A est diagonalisable si et seulement si $y = xz$.__

R.

EXERCICE 5

Exercice **N1⁻** **La réduction au service d'une suite définie par une relation de récurrence linéaire d'ordre 3.**

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 = -4$, $u_1 = -1$, $u_2 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = \frac{1}{3}\left(u_{n+2} + 3u_{n+1} - u_n\right).$$

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

Déterminer une matrice A telle que, pour tout n dans $\mathbb{N}$: $U_{n+1} = AU_n$. Trouver une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A et déterminer les coordonnées de U_0 dans cette base.

En déduire U_n, puis u_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ -\frac{1}{3}u_n + u_{n+1} + \frac{1}{3}u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} U_n$.

Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = AU_n$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$(A - \lambda I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3}-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda x + y = 0 \\ -\lambda y + z = 0 \\ -\frac{1}{3}x + y + \left(\frac{1}{3}-\lambda\right)z = 0 \end{cases}$.

$(A - \lambda I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x \\ z = \lambda y = \lambda^2 x \\ 0 = -\frac{1}{3}x + \lambda x + \left(\frac{1}{3}-\lambda\right)\lambda^2 x = x\left(-\lambda^3 + \frac{1}{3}\lambda^2 + \lambda - \frac{1}{3}\right) = x\left(\lambda - \frac{1}{3}\right)\left(1-\lambda^2\right) \end{cases}$.

$(A - \lambda I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x \\ z = \lambda^2 x \\ -\left(\lambda - \frac{1}{3}\right)(\lambda-1)(\lambda+1)x = 0 \end{cases}$.

__1er cas__. $\lambda \notin \left\{-1, \frac{1}{3}, 1\right\}$. Alors $-\left(\lambda-\frac{1}{3}\right)(\lambda-1)(\lambda+1) \neq 0$.

donc $(A - \lambda I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x \\ z = \lambda^2 x \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0 \Leftrightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

donc λ n'est pas valeur propre de A.

__2ème cas__. $\lambda \in \left\{-1, \frac{1}{3}, 1\right\}$. Alors $-\left(\lambda-\frac{1}{3}\right)(\lambda-1)(\lambda+1) = 0$. $(A - \lambda I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x \\ z = \lambda^2 x \end{cases}$

R.

donc λ est valeur propre de A et $SEP(A,\lambda) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\ \lambda\\ \lambda^2\end{pmatrix}\right)$.

Ainsi $Sp\,A = \{-1, \frac{1}{3}, 1\}$.

$SEP(A,-1) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$. $SEP(A,\frac{1}{3}) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1/3\\1/9\end{pmatrix}\right) = Vect\left(\begin{pmatrix}9\\3\\1\end{pmatrix}\right)$ et $SEP(A,1) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

A est diagonalisable car $A \in M_3(\mathbb{R})$ et A admet trois valeurs propres deux à deux distinctes.

Posons $X_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix}9\\3\\1\end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

(X_1) est une base de $SEP(A,-1)$, (X_2) est une base de $SEP(A,\frac{1}{3})$ et (X_3) est une base de $SEP(A,1)$.

A étant diagonalisable, $M_{3,1}(\mathbb{R}) = SEP(A,-1) \oplus SEP(A,\frac{1}{3}) \oplus SEP(A,1)$.

Alors $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $(-1, \frac{1}{3}, 1)$. $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$. Une récurrence simple donne $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.

Evitons de calculer A^n en décomposant U_0 sur la base $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$.

Soit (α, β, δ) la famille des coordonnées de U_0 dans la base $\mathcal{B}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0 = A^n(\alpha X_1 + \beta X_2 + \delta X_3) = \alpha A^n X_1 + \beta A^n X_2 + \delta A^n X_3$.

Or $AX_1 = -X_1$, $AX_2 = \frac{1}{3}X_2$ et $AX_3 = X_3$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n X_1 = (-1)^n X_1$, $A^n X_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^n X_2$ et $A^n X_3 = X_3$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \alpha(-1)^n X_1 + \beta\left(\frac{1}{3}\right)^n X_2 + \delta X_3$. Déterminons α, β et δ.

$\begin{pmatrix}-4\\-1\\0\end{pmatrix} = U_0 = \alpha X_1 + \beta X_2 + \delta X_3 = \alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}9\\3\\1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Alors $\begin{cases}\alpha + 9\beta + \delta = -4\\ -\alpha + 3\beta + \delta = -1\\ \alpha + \beta + \delta = 0\end{cases}$

Il n'est pas utile de raisonner par équivalence pour trouver α, β et δ !

$L_1 - L_3$ donne $8\beta = -4$ donc $\beta = -\frac{1}{2}$.

$L_2 + L_3$ donne $4\beta + 2\delta = -1$ et $L_3 - L_2$ donne $2\alpha - 2\beta = 1$. Alors $\begin{cases}\delta = -\frac{1}{2}(4\beta + 1) = \frac{1}{2}\\ \alpha = \frac{1}{2}(2\beta + 1) = 0\end{cases}$.

La famille des coordonnées de U_0 dans la base (X_1, X_2, X_3) est $\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \alpha(-1)^n X_1 + \beta\left(\frac{1}{3}\right)^n X_2 + \gamma X_3 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - 9\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 1 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2} - \frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Remarques. 1. Trop souvent dans ce type de question les concepteurs font calculer A^n ! Voici quelques pistes pour s'y entraîner !

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$.

- $P = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ • P est inversible comme matrice de passage • $P^{-1}AP = D$ avec $D = \mathrm{Diag}(-1, \frac{1}{3}, 1)$

Alors $A = PDP^{-1}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1} = P\,\mathrm{Diag}\left((-1)^n, \left(\frac{1}{3}\right)^n, 1\right)P^{-1}$.

Un calcul assez simple donne $P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (1/3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Ce qui donne après calculs :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad A^n = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} (-1)^n + 9\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2 & -4(-1)^n + 4 & 3(-1)^n - 9(1/3)^n + 6 \\ -(-1)^n + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2 & 4(-1)^n + 4 & -3(-1)^n - 3(1/3)^n + 6 \\ (-1)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2 & -4(-1)^n + 4 & 3(-1)^n - (1/3)^n + 6 \end{pmatrix}.$$

Le calcul de la première ligne de A^nU_0 redonne le résultat.

2. Tout cela est du pipo ! $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} - \frac{1}{3}u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$. Alors les suites $\left(u_{2p+2} - \frac{1}{3}u_{2p+1}\right)_{p\geqslant 0}$ et $\left(u_{2p+1} - \frac{1}{3}u_{2p}\right)_{p\geqslant 0}$ sont constantes. Or $u_2 - \frac{1}{3}u_1 = \frac{1}{3}$ et $u_1 - \frac{1}{3}u_0 = \frac{1}{3}$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n = \frac{1}{3}$ et nous sommes ramené à une suite arithmético-géométrique qui se traite en deux lignes !

R.

EXERCICE 6

Exercice **N1⁻** **La réduction au service d'une suite définie par une relation de récurrence linéaire d'ordre 3 again. ESSEC MIII Éco 2003 Partie I**

Soit a un nombre réel. On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$, et F le sous- ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3a\, u_{n+1} + (1-3a)\ u_n.$$

(L'objet de ce problème est l'étude de l'ensemble F.) .

I. Étude du cas particulier a = 1.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par ses trois premiers termes $u_0,\ u_1, u_2$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3\, u_{n+1} - 2\, u_n.$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et on note M la matrice carrée $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Reconnaître, pour tout entier naturel n, le produit $M\,X_n$.

En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices M, X_0 et de l'entier naturel n.

2. a) Déterminer les valeurs propres de la matrice M et leur sous-espace propre associé.

b) La matrice M est-elle diagonalisable ?

3. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M, c'est-à-dire tel que M soit la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Déterminer une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ telle que la matrice T de f dans $\mathcal{B}'$ vérifie $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que les vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 aient respectivement pour première composante 1, 1 et 0.

b) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de T^n.

4. Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Exprimer M en fonction de T , P et P^{-1}, puis M^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n.

5. a) Calculer P^{-1}(les calculs devront figurer sur la copie).

b) Pour tout entier naturel n, calculer les coefficients de la première ligne de M^n ; en déduire l'expression de u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et de l'entier naturel n.

I Etude du cas particulier $a=1$.

Q1 Soit $n\in\mathbb{N}$. $MX_n=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\\u_{n+2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\u_{n+2}\\-2u_n+3u_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\u_{n+2}\\u_{n+3}\end{pmatrix}=X_{n+1}$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ MX_n=X_{n+1}$.

Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ X_n=M^nX_0$

→ C'est clair pour $n=0$ car $M^0=I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

→ Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$M^{n+1}X_0=M(M^nX_0)\underset{HR}{=}MX_n=X_{n+1}$. Ceci achève la récurrence.

Q2 a) Soit λ un réel et $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un élément de $M_{3,1}(\mathbb{R})$

$MX=\lambda X\iff\begin{cases}y=\lambda x\\z=\lambda y\\-2x+3y=\lambda z\end{cases}\iff\begin{cases}y=\lambda x\\z=\lambda^2x\\0=\lambda z+2x-3y=\lambda^3x+2x-3\lambda x\end{cases}\iff\begin{cases}y=\lambda x\\z=\lambda^2x\\(\lambda^3-3\lambda+2)x\end{cases}$

1er cas.. $\lambda^3-3\lambda+2\neq0$.

$MX=\lambda X\iff\begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\end{cases}$; λ n'est pas valeur propre.

2e cas.. $\lambda^3-3\lambda+2=0$. $MX=\lambda X\iff y=\lambda x$ et $z=\lambda^2x$.

$\{X\in M_{3,1}(\mathbb{R})\mid MX=\lambda X\}=\{\begin{pmatrix}x\\\lambda x\\\lambda^2x\end{pmatrix};x\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}\right)\neq\{0_{M_{3,1}(\mathbb{R})}\}$

Alors λ est valeur propre de M et $SEP(M,\lambda)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}\right)$.

Notons que $\lambda^3-3\lambda+2=0\iff(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2)=0\iff(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+2)=0\iff\lambda=1$ ou $\lambda=-2$

Alors M possède deux valeurs propres 1 et -2.

$SEP(M,1)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $SEP(M,-2)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}\right)$.

b) La somme des dimensions des sous-espaces propres est 2 et $2\neq3$.

Ainsi M n'est pas diagonalisable.

Q3 a) Nous notons $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Une petite analyse s'impose.

* Supposons que $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3)$ soit solution du problème.

$f(e'_1)=-2e'_1$ donc $e'_1\in SEP(f,-2)=\mathrm{Vect}(e_1-2e_2+4e_3)$.

$f(e'_2)=e'_2$ donc $e'_2\in SEP(f,1)=\mathrm{Vect}(e_1+e_2+e_3)=\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$

$f(e'_3)=e'_2+e'_3$; alors $e'_2=(f-\mathrm{Id}_E)(e'_3)$ donc $e'_2\in\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

Notons que $M_{\mathcal{B}}(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\-2&3&-1\end{pmatrix}$

la somme des trois vecteurs est nulle

$\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})=\mathrm{Vect}(-e_1-2e_3,\ e_1-e_2+3e_3,\ e_2-e_3)=\mathrm{Vect}(e_1-e_2+3e_3,\ e_2-e_3)$.

$\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})=\mathrm{Vect}(e_1-e_2+3e_3+2(e_2-e_3),\ e_2-e_3)=\mathrm{Vect}(e_1+e_2+e_3,\ e_2-e_3)$.

Notons alors que $\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\cap\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})=\mathrm{Vect}(e_1+e_2+e_3)$.

* Amorçons alors la synthèse.

Posons $\underline{e'_1=e_1-2e_2+4e_3}$ et $\underline{e'_2=e_1+e_2+e_3}$. $e'_1\in SEP(f,-2)$ donc $\underline{f(e'_1)=-2e'_1}$

et $e'_2\in SEP(f,1)$ donc $\underline{f(e'_2)=e'_2}$.

Cherchons alors e'_3 tel que $f(e'_3)=e'_2+e'_3$ et tel que sa première composante soit .

Soit $u=xe_2+ye_3$ un élément de $\mathbb{R}^3$

$f(u)=e'_2+u \iff \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&3&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\x\\y\end{pmatrix}\iff\begin{cases}x=1\\y=1+x\\3x=1+y\end{cases}\iff\begin{cases}x=1\\y=2\\3=3\ !\end{cases}$

$f(u)=e'_2+u\iff x=1$ et $y=2$.

Posons alors $\underline{e'_3=e_2+2e_3}$. $\underline{f(e'_3)=e'_2+e'_3}$.

Vérifions que (e'_1,e'_2,e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Il suffit de montrer que cette famille est libre car elle est de cardinal 3 qui est la dimension de $\mathbb{R}^3$. Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\alpha e'_1+\beta e'_2+\gamma e'_3=0_{\mathbb{R}^3}$.

$0_{\mathbb{R}^3}=\alpha(e_1-2e_2+4e_3)+\beta(e_1+e_2+e_3)+\gamma(e_2+2e_3)$. Ainsi $\begin{cases}\alpha+\beta=0\\-2\alpha+\beta+\gamma=0\\4\alpha+\beta+2\gamma=0\end{cases}$

$$\begin{cases} \beta = -\alpha \\ 0 = -2\alpha - \alpha + \gamma = -3\alpha + \gamma \\ 0 = 4\alpha - \alpha + 2\gamma = +3\alpha + 2\gamma \end{cases} ; \quad \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \gamma = 3\alpha \\ 3\alpha + 6\alpha = 0 \end{cases} ; \quad \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Ainsi $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3) = (e_1 - 2e_2 + 4e_3, e_1 + e_2 + e_3, e_2 + 2e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ telle que $T = M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et telle que e'_1, e'_2, e'_3 aient respectivement pour première composante 1, 1 et 0.

D) V1. Posons $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}(-2,1,1)$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'abord $T = D + N$. De plus $DN = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = ND$

On peut donc appliquer la formule du binôme et dire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k$.

Notons que $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $N^k = 0_{M_3(\mathbb{R})}$.

Alors $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $T^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^n + n D^{n-1} N = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} (-2)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Notons que ce résultat vaut encore pour $n=0$ et $n=1$.

V2 $T^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $T^3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Montrons alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- c'est clair pour $n=0$
- supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}$ et montrons-la pour $n+1$.

$T^{n+1} = T T^n = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ceci achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q4 $T = P^{-1} M P$ donc $M = P T P^{-1}$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = P T^n P^{-1}$.

- $PT^0P^{-1} = PI_3P = PP^{-1} = I_3 = \Pi^0$; la propriété est vraie pour $n=0$.
- Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}$ et montrons-la pour $n+1$.

$\Pi^{n+1} = \Pi\Pi^n \underset{HR}{=} PTP^{-1}PT^nP^{-1} = PTT^nP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$. Ceci achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N},\ \Pi^n = PT^nP^{-1}$.

Q5 a) P est une matrice de passage ; P est donc inversible. Il n'est pas utile de raisonner par équivalence pour trouver P^{-1}.

Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que $PX = X'$.

Alors $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x+y = x' \\ -2x+y+z = y' \\ 4x+y+2z = z' \end{cases}$

$L_1 + L_3 - 2L_2$ donne $x+y+4x+y+2z+4x-2y-2z = x'+z'-2y' \Rightarrow x = \frac{1}{9}(x'-2y'+z')$.

L_1 donne $y = x'-x = x' - \frac{1}{9}(x'-2y'+z') = \frac{1}{9}(8x'+2y'-z')$.

L_2 donne $z = y'+2x-y = \frac{1}{9}(9y'+2x'-4y'+2z'-8x'-2y'+z') = \frac{1}{9}(-6x'+3y'+3z')$

Dans ces conditions $P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$

b) $\Pi^n = PT^nP^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} (-2)^n & 1 & n \\ (-2)^{n+1} & 1 & n+1 \\ (-2)^{n+2} & 1 & n+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

La première ligne de Π^n est : $\frac{1}{9}\left((-2)^n+8-6n \quad (-2)^{n+1}+2+3n \quad (-2)^n-1+3n\right)$

$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = X_n = \Pi^n X_0 = \Pi^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$. Alors u_n est le produit de la première ligne de Π^n par $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$.

Donc $u_n = \frac{1}{9}\left((-2)^n-6n+8\right)u_0 + \frac{1}{9}\left((-2)^{n+1}+3n+2\right)u_1 + \frac{1}{9}\left((-2)^n+3n-1\right)u_2$.

Remarque... Il est alors fortement conseillé de vérifier que ce résultat trouvé vaut au moins pour $n=0$, 1 et 2...

R/

EXERCICE 7

Exercice **N1⁻**

Trouver a, b, c, a', b' et c' pour que $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a' \\ 1 & b & b' \\ 1 & c & c' \end{pmatrix}$ admette $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour vecteurs propres.

Posons $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Notons que U, V, W sont des éléments non nuls de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Alors U, V, W vecteurs propres de $A \iff \exists (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$, $AU = \alpha U$, $AV = \beta V$ et $AW = \gamma W$.

U, V, W vecteurs propres de $A \iff \exists (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$, $\begin{cases} 1+a+a' = \alpha \\ 1+b+b' = \alpha \\ 1+c+c' = \alpha \end{cases}$, $\begin{cases} 1-a' = \beta \\ 1-b' = 0 \\ 1-c' = -\beta \end{cases}$ et $\begin{cases} 1-a = \gamma \\ 1-b = -\gamma \\ 1-c = 0 \end{cases}$.

U, V, W vecteurs propres de A

$\iff \exists (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$, $\begin{cases} \alpha = 1+a+a' \\ 1+b+b' = 1+a+a' \\ 1+c+c' = 1+a+a' \end{cases}$, $\begin{cases} \beta = 1-a' \\ b' = 1 \\ 1-c' = -(1-a') \end{cases}$ et $\begin{cases} \gamma = 1-a \\ 1-b = -(1-a) \\ c = 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} b+b' = a+a' \\ c+c' = a+a' \end{cases}$, $\begin{cases} b' = 1 \\ c' = 2-a' \end{cases}$ et $\begin{cases} c = 1 \\ b = 2-a \end{cases}$

$\iff \begin{cases} b' = 1 \\ c = 1 \\ b = 2-a \\ c' = 2-a' \end{cases}$ et $\begin{cases} 2-a+1 = a+a' \\ 1+(2-a') = a+a' \end{cases}$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$\iff \begin{cases} b' = 1 \\ c = 1 \\ b = 2-a \\ c' = 2-a' \end{cases}$ et $\begin{cases} 2a+a' = 3 \\ a+2a' = 3 \end{cases}$. Notons que $\begin{cases} 2a+a' = 3 \\ a+2a' = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a+a' = 3 \\ -3a = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ a' = 1 \end{cases}$.

Alors : U, V, W sont des vecteurs propres de A si et seulement si $\begin{cases} a = 1 \\ a' = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} b' = 1 \\ c = 1 \\ b = 2-a = 1 \\ c' = 2-a' = 1 \end{cases}$

Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a' \\ 1 & b & b' \\ 1 & c & c' \end{pmatrix}$ si et seulement si $a = b = c = a' = b' = c' = 1$.

Exercice.. Notons que si $a = b = c = a' = b' = c' = 1$, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres 3, 0 et 0.

Exercice 8

Exercice N1 **Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec paramètre.**

t est dans $\mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ?

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Cherchons une réduite de Gauss de $A-\lambda I_3$.

$A-\lambda I_3 = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1+t \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t-\lambda \end{pmatrix}$. $L_1 \leftrightarrow L_3$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 3-\lambda & 1 & 1+t \end{pmatrix}$.

$L_3 \leftarrow L_3 + (\lambda-3)L_1$ donne : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 0 & \lambda-2 & \varphi(\lambda) \end{pmatrix}$ avec $\varphi(\lambda) = 1+t+(\lambda-3)(4+2t-\lambda)$.

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ conduit à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 0 & 0 & \varphi(\lambda)-1-t \end{pmatrix}$.

la matrice est triangulaire supérieure.

$\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow A-\lambda I_3$ non inversible $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 0 & 0 & \varphi(\lambda)-1-t \end{pmatrix}$ non inversible $\Leftrightarrow \begin{cases} 2-\lambda = 0 \\ \text{ou} \\ \varphi(\lambda)-1-t = 0 \end{cases}$

$\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \text{ou} \\ 0 = \varphi(\lambda)-1-t = (\lambda-3)(4+2t-\lambda)+1+t-1-t = (\lambda-3)(4+2t-\lambda). \end{cases}$

$\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \lambda = 2$ ou $\lambda = 3$ ou $\lambda = 4+2t$. $Sp\,A = \{2, 3, 4+2t\}$.

$4+2t = 2 \Leftrightarrow t = -1$ et $4+2t = 3 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$.

Si $t \neq -1$ et $t \neq -\frac{1}{2}$, A possède trois valeurs propres distinctes deux à deux et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc A est diagonalisable.

Supposons que $t = -1$. $Sp\,A = \{2, 3\}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$AX = 2X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y = 2x \\ 2y = 2y \\ x+y+2z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow x+y = 0.$

Alors $SEP(A,2)$ est le plan d'équation $x+y=0$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Alors $3 \underset{\text{cours}}{\geqslant} \dim SEP(A,2) + \dim SEP(A,3) = 2 + \dim SEP(A,3) \underset{SEP(A,3) \neq \{0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}}{\geqslant} 2 + \ = 3$

Alors $\dim SEP(A,2) + \dim SEP(A,3) = 3$. **A est diagonalisable.**

- **Exercice.** - Diagonaliser A.

"Si $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$: $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(2,2,3)$ ... et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Tout est dit !"

Supposons que $t = -\frac{1}{2}$. Soit $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. Notons que $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1/2 \\ 0 & 2 & -1/2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$AX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y+\frac{1}{2}z = 2x \\ 2y - \frac{1}{2}z = 2y \\ x+y+3z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ x+y=0 \\ x+y=0\ (!) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=0. \end{cases}$$

Alors $SEP(A,2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Donc $\dim SEP(A,2)=1$.

$$AX = 3X \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y+\frac{1}{2}z = 3x \\ 2y - \frac{1}{2}z = 3y \\ x+y+3z = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2y \\ z=-2y \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ z=-2y \end{cases}$$

Alors $SEP(A,3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$. Donc $\dim SEP(A,3)=1$.

$\mathrm{Sp} A = \{2,3\}$ et $\dim SEP(A,2) + \dim SEP(A,3) = 2 < 3$. **A n'est pas diagonalisable.**

Finalement **A est diagonalisable si et seulement si $t \neq -\frac{1}{2}$.**

- **Exercice.** - Diagonaliser A lorsque $t \neq -1$ et $t \neq -\frac{1}{2}$.

quelques réponses.. $SEP(A,2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $SEP(A,3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -t \\ -1-t \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $SEP(A,4+2t) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

Si $P=\begin{pmatrix} 1 & -t & 1 \\ -1 & -1-t & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, P est inversible, $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(2,3,4+2t)$ et $P^{-1} = \frac{1}{2(2t+1)}\begin{pmatrix} (2t+1) & -(2t+1) & -(2t+1) \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & (2t+1) \end{pmatrix}$

Si l'on pose $\alpha = 2t+1$: $P^{-1} = \frac{1}{2\alpha}\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & -\alpha \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

Exercice .. $\dim_{\mathbb{R}} E = 2$. $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$ est une base de E. $u\in\mathcal{L}(E)$ et $M_{\mathcal{B}}(u)=\begin{bmatrix}1&4\\1&1\end{bmatrix}$

Q1.. Trouver le spectre de u et ses sous-espaces propres.

Q2.. $\forall f\in\mathcal{L}(E)$. $\varphi(f)=u\circ f$. Prouver que $\varphi\in\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$. Trouver le spectre et les sous-espaces propres de φ.

Q1– Soit $v=xe_1+ye_2$ un élément de E. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Dans la suite $F_\lambda=\mathrm{Ker}(u-\lambda\, Id_E)$.

$u(v)=\lambda v \iff \begin{bmatrix}1&4\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \iff \begin{cases}x+4y=\lambda x\\x+y=\lambda y\end{cases}\iff\begin{cases}x=(\lambda-1)y\\0=(1-\lambda)x+4y=(1-\lambda)(\lambda-1)y+4y=(-\lambda^2+2\lambda+3)y\end{cases}$

$u(v)=\lambda v\iff\begin{cases}x=(\lambda-1)y\\-(\lambda+1)(\lambda-3)y=0\end{cases}$

1er cas.. $\lambda\in\mathbb{R}-\{-1,3\}$. $u(v)=\lambda v\iff x=y=0$; $\lambda\notin Spec(u)$

2ème cas.. $\lambda=-1$. $u(v)=\lambda v\iff x=-2y$; $\lambda\in Spec(u)$ et $F_\lambda=Ker(u-\lambda\, Id_E)=Vect(2e_1-e_2)$.

3ème cas.. $\lambda=3$. $u(v)=\lambda v\iff x=2y$; $\lambda\in Spec(u)$ et $F_\lambda=Vect(2e_1+e_2)$.

Finalement : $Spec(u)=\{-1,3\}$, $F_{-1}=Vect(2e_1-e_2)$ et $F_3=Vect(2e_1+e_2)$.

Notons que u est diagonalisable. $\mathcal{B}'=(2e_1-e_2,2e_1+e_2)$ est une base de E et $M_{\mathcal{B}'}(u)=\begin{bmatrix}-1&0\\0&3\end{bmatrix}$

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P=\begin{bmatrix}2&2\\-1&1\end{bmatrix}$; $P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac14&-\frac12\\\frac14&\frac12\end{bmatrix}$.

Q2.. Notons que si $f\in\mathcal{L}(E)$, $u\circ f\in\mathcal{L}(E)$ (composée de deux endomorphismes de E), par conséquent φ est une application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$. Montrons que φ est linéaire.

$\forall(f,g)\in\mathcal{L}(E)^2$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\varphi(\lambda f+g)=u\circ(\lambda f+g)\underset{\text{linéarité de } u}{=}\lambda\, u\circ f+u\circ g=\lambda\varphi(f)+\varphi(g)$

Par conséquent : $\varphi\in\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.

Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. Posons $M_{\mathcal{B}}(f)=A=\begin{bmatrix}x&z\\y&t\end{bmatrix}$

$\varphi(f)=\lambda f\iff u\circ f=\lambda f\iff M_{\mathcal B}(u)A=\lambda A\iff \begin{bmatrix}1&4\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&z\\y&t\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x&z\\y&t\end{bmatrix}\iff\begin{cases}x+4y=\lambda x\\x+y=\lambda y\\z+4t=\lambda z\\z+t=\lambda t\end{cases}$

Nous pourrions résoudre le système, trop banal (et occultant le fond du débat) ... de plus nous l'avons déjà fait dans Q1. Justement ...!

Posons $R=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ et $S=\begin{bmatrix}z\\t\end{bmatrix}$

$\varphi(f)=\lambda f\iff\begin{bmatrix}1&4\\1&1\end{bmatrix}[R,S]=\lambda[R,S]\iff\begin{cases}M_{\mathcal B}(u)R=\lambda R\\M_{\mathcal B}(u)S=\lambda S\end{cases}\iff$ R et S sont dans $\hat F_\lambda=\{X\in M_{2,1}(\mathbb{R})\mid M_{\mathcal B}(u)X=\lambda X\}$

1er cas.. $\lambda\notin\{-1,3\}$. $\hat F_\lambda=\{0\}$; $\varphi(f)=\lambda f\iff f=0_{\mathcal{L}(E)}$; $\lambda\notin Spec\,\varphi$.

2ème Cas.. $\lambda = -1$.

$\varphi(f) = -f \Leftrightarrow R \in \hat{F}_{-1}$ et $S \in \hat{F}_{-1}$; donc $\underline{-1 \in \mathrm{Spec}\,\varphi}$.

Précisons. $\hat{F}_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$ (c'est le sous-espace propre de $M_B(u)$ associé à la valeur propre -1.

Donc $\varphi(f) = -f \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ R = \alpha\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $S = \beta\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ M_B(f) = \begin{bmatrix} 2\alpha & 2\beta \\ -\alpha & -\beta \end{bmatrix}$

$\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)}) = \{f\in\mathcal{L}(E) \mid \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ M_B(f) = \begin{bmatrix} 2\alpha & 2\beta \\ -\alpha & -\beta \end{bmatrix}\}$

$\underline{\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)}) = \{f\in\mathcal{L}(E) \mid M_B(f)\in\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)\}}$

3ème Cas. $\lambda = 3$.

$\varphi(f) = 3f \Leftrightarrow R$ et S sont dans $\hat{F}_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ R = \alpha\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $S = \beta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\varphi(f) = 3f \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, M_B(f) = \begin{bmatrix} 2\alpha & 2\beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \Leftrightarrow M_B(f)\in\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

donc $\underline{3\in\mathrm{Spec}\,\varphi \text{ et } \mathrm{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)}) = \{f\in\mathcal{L}(E) \mid M_B(f)\in\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\}}$.

Finalement : $\mathrm{Spec}\,\varphi = \{-1, 3\} = \mathrm{Spec}\,u$

$\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)}) = \{f\in\mathcal{L}(E) \mid M_B(f)\in\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)\}$ et

$\mathrm{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)}) = \{f\in\mathcal{L}(E) \mid M_B(f)\in\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\}$

Remarques 1.. $\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)})$ est isomorphe à $\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)$ qui est un sous-espace de $M_2(\mathbb{R})$ de dimension 2 ; donc $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)})) = 2$

De même : $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)})) = 2$.

On a alors : $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)})) + \dim(\mathrm{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)})) = 2+2 = 4 = \dim\mathcal{L}(E)$; $\underline{\varphi \text{ est diagonalisable}}$.

2.. Tout cela n'est pas nouveau. Retrouvons les résultats précédents à travers une démonstration généralisée.

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et soit $f\in\mathcal{L}(E)$: $F_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{Id}_E)$.

$\varphi(f) = \lambda f \Leftrightarrow u\circ f = \lambda f \Leftrightarrow \forall x\in E,\ u(f(x)) = \lambda f(x) \Leftrightarrow \forall w\in \mathrm{Im}\,f,\ u(w) = \lambda w \Leftrightarrow \mathrm{Im}\,f \subset F_\lambda$

ou $F_\lambda = \{0_E\}$ et : $\{f\in\mathcal{L}(E) \mid \varphi(f) = \lambda f\} = \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$

ou $F_\lambda \neq \{0_E\}$ et : $\{f\in\mathcal{L}(E) \mid \varphi(f) = \lambda f\} \neq \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$.

Par conséquent : $\mathrm{Spec}\,\varphi = \mathrm{Spec}\,u = \{-1, 3\}$.

De plus : $\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)}) = \{f\in\mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}\,f \in \mathrm{Vect}(2e_1 - e_2)\}$

et $\mathrm{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)}) = \{f\in\mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}\,f \in \mathrm{Vect}(2e_1 + e_2)\}$

ce qui confirme les résultats précédents.

Exercice α est un réel. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de l'espace vectoriel réel E. Φ_α est l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ 2 & \alpha-2 & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

Q1 Montrer que 1 est valeur propre de Φ_α et donner une base du sous-espace propre associé $E_1(\alpha)$ (on sera amené à discuter suivant les valeurs de α).

Q2 On pose $f_1 = e_1 + e_2 - e_3$ et $f_2 = e_1 + e_2 - 2e_3$.

a) Préciser la dimension du sous-espace vectoriel F de E engendré par f_1 et f_2.

b) Montrer que F est stable par Φ_α.

c) On note φ_α l'endomorphisme de F induit par Φ_α, c'est à dire défini par : $\forall u \in F,\ \varphi_\alpha(u) = \Phi_\alpha(u)$.

Donner la matrice de φ_α dans la base (f_1, f_2).

Q3 Montrer que $\alpha - 1$ est une valeur propre de Φ_α et que l'on peut trouver une vecteur f_3 de E, indépendant de α qui soit un vecteur propre de Φ_α associé à la valeur propre $\alpha - 1$.

Q4 a) Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de E.

b) Trouver la matrice de Φ_α dans cette base. Φ_α est-il diagonalisable ?

ESCP-E-VIII-2000

Q1 Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ un élément de E.

$\Phi_\alpha(u) = u \iff A_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x + (2-\alpha)y - \alpha z = x \\ -\alpha x + y - \alpha z = y \\ 2x + (\alpha-2)y + (\alpha+1)z = z \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + (2-\alpha)y - \alpha z = 0 \\ -\alpha x - \alpha z = 0 \\ 2x + (\alpha-2)y + \alpha z = 0 \end{cases}$ $L_3 := -L_1$

$\Phi_\alpha(u) = u \iff \begin{cases} \alpha(x+z) = 0 \quad (-\alpha z = \alpha x \dots) \\ -2x + (2-\alpha)y + \alpha x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha(x+z) = 0 \\ (\alpha-2)(x-y) = 0 \end{cases}$ (1)

Notons que $(1, 1, -1)$ est solution de (1).

Ainsi si $u = e_1 + e_2 - e_3$: $u \neq 0_E$ et $\Phi_\alpha(u) = u$.

Alors <u>1 est valeur propre de Φ_α.</u> et <u>$e_1 + e_2 - e_3 \in SEP(\Phi_\alpha, 1) = E_1(\alpha)$.</u>

1er cas <u>$\alpha \notin \{0, 2\}$.</u> $\Phi_\alpha(u) = u \iff \begin{cases} \alpha(x+z) = 0 \\ (\alpha-2)(x-y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -x \\ y = x \end{cases}$.

<u>$E_1(\alpha) = SEP(\Phi_\alpha, 1) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 - e_3)$.</u> <u>$\dim E_1(\alpha) = 1$.</u>

2e cas <u>$\alpha = 0$.</u> $\Phi_\alpha(u) = u \iff x = y$. <u>$E_1(\alpha) = SEP(\Phi_\alpha, 1) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2, e_3)$ et $\dim E_1(\alpha) = 2$</u>

3e cas <u>$\alpha = 2$</u> $\Phi_\alpha(u) = u \iff x + z = 0$ <u>$E_1(\alpha) = SEP(\Phi_\alpha, 1) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_3, e_2)$ et $\dim E_1(\alpha) = 2$</u>

Q2 a) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $af_1+bf_2=0_E$.

$a(e_1+e_2-e_3)+b(e_1+e_2-2e_3)=0_E$.

$(a+b)e_1+(a+b)e_2-(a+2b)e_3=0_E$. $a+b=-(a+2b)=0$, $a=b=0$.

Ainsi (f_1,f_2) est une famille libre de E donc de F et $F=\mathrm{Vect}(f_1,f_2)$.

Alors (f_1,f_2) est une base de F et $\dim F=2$.

b) $$A_\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2-\alpha&-\alpha\\-\alpha&1&-\alpha\\2&\alpha-2&\alpha+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+2-\alpha+\alpha\\-\alpha+1+\alpha\\2+\alpha-2-\alpha-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$; $\varphi_\alpha(f_1)=f_1$ ce

qui n'est pas une surprise (!!) voir Q1.

$$A_\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2-\alpha&-\alpha\\-\alpha&1&-\alpha\\2&\alpha-2&\alpha+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+2-\alpha+2\alpha\\-\alpha+1+2\alpha\\2+\alpha-2-2\alpha-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha+1\\\alpha+1\\-\alpha-2\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

Ainsi $\varphi_\alpha(f_2)=\alpha f_1+f_2$.

$\varphi_\alpha(F)=\varphi_\alpha(\mathrm{Vect}(f_1,f_2))=\mathrm{Vect}(\varphi_\alpha(f_1),\varphi_\alpha(f_2))=\mathrm{Vect}(f_1,\alpha f_1+f_2)\overset{!}{=}\mathrm{Vect}(f_1,f_2)=F$

En particulier $\varphi_\alpha(F)\subset F$ et F est stable par φ_α.

c) $\psi_\alpha(f_1)=\varphi_\alpha(f_1)=f_1$ et $\psi_\alpha(f_2)=\varphi_\alpha(f_2)=\alpha f_1+f_2$.

Alors $M_{(f_1,f_2)}(\psi_\alpha)=\begin{pmatrix}1&\alpha\\0&1\end{pmatrix}$.

Q3 Soit $u=xe_1+ye_2+ze_3$ un élément de E.

$$\varphi_\alpha(u)=(\alpha-1)u\iff\begin{cases}-x+(2-\alpha)y-\alpha z=(\alpha-1)x\\-\alpha x+y-\alpha z=(\alpha-1)y\\2x+(\alpha-2)y+(\alpha+1)z=(\alpha-1)z\end{cases}\iff\begin{cases}-\alpha x+(2-\alpha)y-\alpha z=0\\-\alpha x+(2-\alpha)y-\alpha z=0\\2x+(\alpha-2)y+2z=0\end{cases}$$

$$\varphi_\alpha(u)=(\alpha-1)u\iff\begin{cases}-\alpha x+(2-\alpha)y-\alpha z=0\\(2-\alpha)(x+z)=0\end{cases}\iff\begin{cases}-\alpha(x+z)+(2-\alpha)y=0\\(2-\alpha)(x+z)=0.\end{cases}\quad(2)$$

$\left.\begin{array}{l}L_2=L_1\,!\\L_3\leftarrow L_1+L_3\end{array}\right\}$

$(1,0,-1)$ est solution de (2) et ceci pour tout α !

Ainsi $f_3=e_1-e_3$ est un vecteur non nul indépendant de α tel que $\varphi_\alpha(f_3)=(\alpha-1)f_3$.

Alors $\alpha-1$ est valeur propre de φ_α et $f_3=e_1-e_3$ est un vecteur propre associé indépendant de α.

Q4 a) Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $af_1+bf_2+cf_3=0_E$;

$a(e_1+e_2-e_3)+b(e_1+e_2-2e_3)+c(e_1-e_3)=0_E$;

$(a+b+c)e_1+(a+b)e_2+(-a-2b-c)e_3=0$; $\begin{cases}a+b+c=0\\a+b=0\\-a-2b-c=0\end{cases}$ $\begin{cases}a+b=0\\c=0\\-a-2b=0\end{cases}$;

$a=b=c=0$.

(f_1,f_2,f_3) est donc une famille libre de trois vecteurs de E qui est de dimension 3.

(f_1,f_2,f_3) est une base de E.

$M_{(f_1,f_2,f_3)}(\varphi_\alpha)=\begin{pmatrix}1&\alpha&0\\0&1&0\\0&0&\alpha-1\end{pmatrix}$. $Sp(\varphi_\alpha)=\{1,\alpha-1\}$.

1er cas... $\alpha=0$. La matrice précédente est diagonale. φ_α est diagonalisable.

2e cas... $\alpha=2$. $Sp(\varphi_\alpha)=\{1\}$ et $\dim SEP(\varphi_\alpha,1)=2$ (Q3)

φ_α n'est pas diagonalisable.

3ème cas... $\alpha\notin\{0,2\}$. $Sp(\varphi_\alpha)=\{1,\alpha-1\}$ et $1\neq\alpha-1$.

$\dim SEP(\varphi_\alpha,1)=1$. Voir Q3 !

Soit $u=xe_1+ye_2+ze_3\in E$. $\varphi_\alpha(u)=(\alpha-1)u \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases}-\alpha(x+z)+(2-\alpha)y=0\\(2-\alpha)(x+z)=0\end{cases} \overset{\alpha\neq2}{\Leftrightarrow} \begin{cases}z=-x\\y=0\end{cases}$.

Alors $SEP(\varphi_\alpha,\alpha-1)=\mathrm{Vect}(f_3)$.

$\dim SEP(\varphi_\alpha,\alpha-1)=1$. $1+1<3$ donc φ_α n'est pas diagonalisable.

φ_α est diagonalisable si et seulement si $\alpha=0$.