

**Exercice** Triangularisation simultanée de deux endomorphismes

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est une base du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ .  $f$  et  $g$  sont les endomorphismes de  $E$  ayant respectivement pour matrices dans la base  $\mathcal{B}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Q1. a) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $g$ .

b) Calculer  $(A - I_3)^2$ ;  $f$  est-il diagonalisable? Montrer que les vecteurs propres de  $g$  sont des vecteurs propres de  $f$ .

Q2. Trouver une base de  $E$  par rapport à laquelle les matrices de  $f$  et  $g$  sont triangulaires. Déterminer les matrices de  $f$  et  $g$  dans cette base.

① Soit  $u = x e_1 + y e_2 + z e_3 \in E$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$u \in \text{Ker}(g - \lambda \text{Id}_E) \Leftrightarrow g(u) = \lambda u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda x + y + z = 0 \\ -x + (1-\lambda)y - z = 0 \\ x + y + (3-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$u \in \text{Ker}(g - \lambda \text{Id}_E) \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda x + y + z = 0 \\ -x + (1-\lambda)y - z = 0 \\ (2-\lambda)(y+z) = 0 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

1<sup>er</sup> cas...  $\lambda = 2$   $u \in \text{Ker}(g - \lambda \text{Id}_E) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y + z = 2x = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \end{cases}$

Alors  $\text{Ker } g - 2 \text{Id}_E = \text{Vect}(e_2 - e_3)$ .

2<sup>ème</sup> cas...  $\lambda \neq 2$   $u \in \text{Ker}(g - \lambda \text{Id}_E) \Leftrightarrow \begin{cases} z = -y \\ -\lambda x = 0 \\ x + (2-\lambda)y = 0 \end{cases}$

o)  $\lambda = 0$   $u \in \text{Ker}(g - \lambda \text{Id}_E) \Leftrightarrow \begin{cases} z = -y \\ x = 2y \end{cases}$

Alors  $\text{Ker } g = \text{Vect}(2e_1 + e_2 - e_3)$

n)  $\lambda \neq 0$   $u \in \text{Ker}(g - \lambda \text{Id}_E) \Leftrightarrow \begin{cases} z = -y \\ x = 0 \\ (2-\lambda)y = 0 \end{cases} \xrightarrow{\lambda \neq 2} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}; \lambda \notin \text{Sp } g.$

Ainsi  $\text{Sp } g = \{0, 2\}$ ,  $\text{SEP}(g, 0) = \text{Vect}(2e_1 + e_2 - e_3)$  et  $\text{SEP}(g, 2) = \text{Vect}(e_2 - e_3)$ .

Roncuque...  $\dim \text{SEP}(g, 0) + \dim \text{SEP}(g, 2) = 2 \neq 3 = \dim E$ .  $g$  n'est pas diagonalisable.

$$b) A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. (A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$(X-1)^2$  est un polynôme annulateur de  $A$  (rac de  $f$ ) d'où le seul  $\lambda$  est 1.

Alors  $S, A \subset \mathbb{C} \{1\}$  et  $S, f \subset \mathbb{C} \{1\}$ .

Notons que  $f$  n'est pas diagonalisable.

VI Supposons que  $f$  est diagonalisable. Alors  $f$  admet au moins une valeur propre. Comme  $S, f \subset \mathbb{C} \{1\}$  :  $S, f = \{1\}$  !

Alors  $E = \text{SEP}(f, 1) = \text{Ker}(f - 1 \text{Id}_E)$ . Or  $f - 1 \text{Id}_E = 0_{\mathbb{R}^3}$ ,  $f = 1 \text{Id}_E$ .

Ce  $f(e_1) = e_1$  ! Or  $f$  n'est pas diagonalisable.

V2 Soit  $u = x e_1 + y e_2 + z e_3 \in E$ .

$$u \in \text{Ker}(f - 1 \text{Id}_E) \Leftrightarrow f(u) = u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ -y = y \\ y + z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ -y = y \\ y + z = z \end{cases}$$

$\text{Ker}(f - 1 \text{Id}_E)$  est donc l'hyperplan d'équation  $y + z = 0$  dans le base  $\mathcal{B}$ .

Alors  $1 \in S, f$  et d'où  $\text{SEP}(f, 1) = 1$ .  $\text{Ker}(f - 1 \text{Id}_E) = \mathbb{R}^3$ .

Or  $S, f = \{1\}$  et d'où  $\text{SEP}(f, 1) = 2$  donc  $f$  n'est pas diagonalisable.

Soit  $u$  un vecteur propre de  $g$ .  $\exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $u = x e_1 + y e_2 + z e_3$ .

1<sup>er</sup> cas...  $u$  est associé à la valeur propre 0.

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^0, u = \lambda (2e_2 + e_1 - e_3) = 2\lambda e_2 + \lambda e_1 - \lambda e_3$$

$\lambda + (-\lambda) = 0$  donc  $u$  appartient à l'hyperplan de  $\mathcal{B}$  d'équation

$y + z = 0$  dans  $\mathcal{B}$  donc appartient à  $\text{SEP}(f, 1)$ .

$u$  est un vecteur propre de  $f$  car  $u \neq 0_E$ .

2<sup>nd</sup> cas...  $u$  est associé à la valeur propre 2.  $\exists \lambda \in \mathbb{R}^0, u = \lambda (e_2 - e_3)$ .

Comme  $\lambda + (-\lambda) = 0$   $u$  appartient aussi à  $\text{SEP}(f, 1)$ .

$u$  est un vecteur propre de  $f$  car  $u \neq 0_E$ .

des vecteurs propres de  $g$  sont des vecteurs propres de  $f$  ... associé à la valeur

propre  $\lambda$ .

Q2) Pour  $e'_1 = e_1 - e_3$  et  $e'_2 = 2e_1 + e_2 - e_3$ .

$e'_1$  et  $e'_2$  sont deux vecteurs propres de  $g$  associés respectivement aux valeurs propres  $\lambda$  et  $0$ . Comme  $\lambda \neq 0$  (!) :  $(e'_1, e'_2)$  est une famille libre de  $E$ . Notons que  $g(e'_1) = \lambda e'_1$ ,  $g(e'_2) = 0$ ,  $f(e'_1) = e'_1$  et  $f(e'_2) = e'_2$ . Ainsi ni  $e'_1$  et un vecteur de  $E$  tel que  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  soit une base de  $E$  : les matrices de  $f$  et  $g$  dans cette base sont triangulaires.

Pour  $e'_3 = e_3$  (... car clairement  $e_3 \notin \text{Vect}(e'_1, e'_2)$  ...).

$$\text{Vect}(e'_1, e'_2, e'_3) = \text{Vect}(e_1 - e_3, 2e_1 + e_2 - e_3, e_3) = \text{Vect}(e_1, 2e_1 + e_2, e_3)$$

$$\text{Vect}(e'_1, e'_2, e'_3) = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = E.$$

$B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  est une famille génératrice de cardinal 3 de  $E$  qui est de dimension 3.  $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  est une base de  $E$ .

soit  $(\alpha, \beta, \gamma)$  (resp.  $(a, b, c)$ ) les coordonnées de  $f(e'_3)$  (resp.  $g(e'_3)$ ) dans  $B'$ .

$$-e_2 + e_3 = f(e_3) = f(e'_3) = \alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 = \alpha(e_1 - e_3) + \beta(2e_1 + e_2 - e_3) + \gamma e_3.$$

$$\text{Avec } \begin{cases} 0 = \alpha + 2\beta \\ -1 = \alpha + \beta \\ 2 = -\alpha - \beta + \gamma \end{cases} ; \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = -1 \\ \gamma = 2 + \alpha + \beta = 1 \end{cases} \quad \cdot \quad \underline{f(e'_3) = -e'_1 + e'_3}.$$

$$e_1 - e_2 + 3e_3 = g(e_3) = g(e'_3) = a e'_1 + b e'_2 + c e'_3 = a(e_1 - e_3) + b(2e_1 + e_2 - e_3) + c e_3$$

$$\begin{cases} 1 = 2b \\ -1 = a + b \\ 3 = -a - b + c \end{cases} ; \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = -1 - b = -3/2 \\ c = 3 + a + b = 3 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\underline{g(e'_3) = -\frac{3}{2} e'_1 + \frac{1}{2} e'_2 + 2 e'_3}.$$

Alors  $\pi_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\pi_{B'}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

1°  $B' = (e_1 - e_3, 2e_1 + e_2 - e_3, e_3)$  et une base de  $E$ .

2° Les matrices de  $f$  et  $g$  dans  $B'$  sont triangulaires (supérieures).

3°  $\pi_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\pi_{B'}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

4° Soit  $P$  la matrice de passage de  $B \subset B'$ .

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

•  $P$  est inversible.

$$P^{-1} \pi_B(f) P = \pi_{B'}(f) \text{ et } P^{-1} \pi_B(g) P = \pi_{B'}(g)$$

Exercice.. Vérifier que  $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Résultats de l'espace !  $P = \text{res}(B, B')$  donc  $P^{-1} = \text{res}(B', B)$

$$e'_1 = e_1 - e_3, e'_2 = 2e_1 + e_2 - e_3, e'_3 = e_3.$$

$$\text{Ainsi } e_3 = e'_3, e_2 = e'_1 + e_3 = e'_1 + e'_3, e_1 = \frac{1}{2}(e'_2 - e_2 + e_3) = \frac{1}{2}(e'_2 - e'_1 - e'_3 + e'_3).$$

$$e_1 = \frac{1}{2}(e'_2 + e'_3), e_2 = e'_1 + e'_3, e_3 = e'_3.$$

$$P^{-1} = \text{res}(B', B) = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice N2 Une petite QSP d'HEC 2010

Q1. La matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est-elle diagonalisable ?

Q2. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 et  $u$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $u^2$  soit un projecteur de rang égal à 1.

- a) Montrer que 0 est valeur propre de  $u$  et que  $u$  possède une autre valeur propre, égale à 1 ou à  $-1$ .  
 b) Montrer que si  $u$  admet 1 pour valeur propre et n'est pas lui-même un projecteur, il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est  $A$ .

Q1)  $A$  est triangulaire supérieure d'où ses valeurs propres sont les éléments de la diagonale. Alors  $\text{Sp } A = \{0, 1\}$ .

Soit  $(E_1, E_2, E_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

$\text{rg } A = \dim \text{Vect}(0_{\mathbb{R}^3}, E_2, E_3) = \dim \text{Vect}(E_2, E_3) = 2$  car  $(E_2, E_3)$  est libre

puisque  $(E_1, E_2, E_3)$  est libre.

Alors  $\dim \text{SEP}(A, 0) = 3 - \text{rg } A = 3 - 2 = 1$ .  $\dim \text{SEP}(A, 0) = 1$ .

$A E_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$  d'où  $E_3$  est un élément non nul de  $\text{SEP}(A, 0)$  qui est de dimension 1.

Ainsi  $\text{SEP}(A, 0) = \text{Vect}(E_3)$ .

$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .  $\text{rg}(A - I_3) = \dim \text{Vect}(-E_1, 0_{\mathbb{R}^3}, E_3 - E_3) = \dim \text{Vect}(E_1, E_3 - E_3)$ .

$\text{rg}(A - I_3) = \dim \text{Vect}(E_1, E_3 - E_3) = \dim \text{Vect}(E_1, E_3) = 2$  car  $(E_1, E_3)$  est libre.

Ainsi  $\dim \text{SEP}(A - I_3) = 3 - \text{rg}(A - I_3) = 3 - 2 = 1$ .  $\dim \text{SEP}(A, 1) = 1$ .

De plus  $(A - I_3)E_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$  d'où  $E_2$  est un élément non nul de  $\text{SEP}(A, 1)$  qui est de dimension 1. Alors  $\text{SEP}(A, 1) = \text{Vect}(E_2)$ .

$\dim \text{SEP}(A, 0) + \dim \text{SEP}(A, 1) = 2 < 3$  et  $\text{Sp } A = \{0, 1\}$ . Alors  $A$  n'est pas diagonalisable.

Q2) g supposons que 0 n'est pas valeur propre de  $u$ . Alors  $\text{Ker } u = \{0_E\}$ .

d'où  $u$  est un endomorphisme injectif de  $E$  qui est de dimension 3.

Alors  $u$  est bijectif. d'où  $u^2 = u \circ u$  est également bijectif. Alors  $\text{rg } u^2 = 3$  !!

0 est valeur propre de  $u$ .

Supposons que  $1$  et  $-1$  ne sont pas valeurs propres. Un raisonnement analogue à celui qui vient d'être fait montre que  $u - \text{Id}_E$  et  $u + \text{Id}_E$  sont des automorphismes de  $E$ .

Alors  $u^2 - \text{Id}_E = (u - \text{Id}_E) \circ (u + \text{Id}_E)$  est un automorphisme de  $E$  comme composé de deux automorphismes de  $E$ .  
 $\uparrow$   
 $u \circ \text{Id}_E = \text{Id}_E \circ u$

Donc  $\text{Ker}(u^2 - \text{Id}_E) = \{0_E\}$ . Or  $u^2$  est un projecteur de rang  $1$ , donc

$\text{Ker}(u^2 - \text{Id}_E) = \text{Im } u^2$  et donc  $\text{Im } u^2 = \{0_E\}$ . Une légère contradiction apparaît.

Ainsi  $1$  ou  $-1$  est valeur propre de  $u$ .

$u$  possède une autre valeur propre que  $0$  qui est à  $1$  ou  $-1$ . Précisons...

Pour que'il n'y ait pas d'ambiguïté montrons que  $u$  ne peut pas avoir comme valeur propre  $1$  et  $-1$ . Supposons le contraire.

Alors d'un côté  $\text{Ker}(u - \text{Id}_E) \geq 1$  et d'un autre côté  $\text{Ker}(u + \text{Id}_E) \geq 1$ . Notons qu'alors  $1 \in \text{Sp } u$  et  $-1 \in \text{Sp } u$ .

Or  $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$  et  $\text{Ker}(u + \text{Id}_E)$  sont deux sous-espaces propres de  $u$  donc ils sont en somme directe. Soit  $x$  un élément non nul de  $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$  et  $y$  un élément non nul de  $\text{Ker}(u + \text{Id}_E)$ .  $(x, y)$  est une famille libre dans  $(\text{Ker}(u - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u + \text{Id}_E))$ .

$u(x) = x$  donc  $u^2(x) = x$ ;  $x \in \text{Ker}(u^2 - \text{Id}_E) = \text{Im } u^2$ .

$u(y) = -y$  donc  $u^2(y) = y$ ;  $y \in \text{Ker}(u^2 - \text{Id}_E) = \text{Im } u^2$ .

}  $u^2$  est une projection.

Les trois points précédents montrent alors que  $\text{rg } u = \text{dim } \text{Im } u^2 \geq 2$  !!

Finalement  $u$  ne peut pas avoir  $1$  et  $-1$  comme valeurs propres.

Alors plus loin encore.  $(u^2)^2 = \text{Id}_E$  car  $u^2$  est un projecteur.

Alors  $u^4 - u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .  $X^4 - X^2$  est un polynôme annulateur de  $u$  dont les racines sont  $-1, 0$  et  $1$ .

Ainsi  $\text{Sp } u \subset \{-1, 0, 1\}$ .

ce qui précède montre que  $\text{Sp } u = \{-1, 0\}$  ou  $\text{Sp } u = \{0, 1\}$ .

b) Supposons que  $1 \in \text{Sp} u$ . Alors comme nous venons de le voir  $\text{Sp} u = \{0, 1\}$ .  
 Faisons une petite analyse.

• Analyse. Supposons que  $B = (e_1, e_2, e_3)$  soit une base de  $E$  telle que  $\pi_B(u) = A$ .

Alors  $u(e_1) = 0_E, u(e_2) = e_2$  et  $u(e_3) = e_3$ .

donc  $e_1 \in \text{Ker} u \cap \text{Im} u, e_2 \in \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$  et  $e_3 = u(e_3)$ .

notons également que  $u^2(e_1) = u(e_1) = 0_E$  et  $u(e_3) = e_1 \neq 0_E$  donc  $e_3 \in \text{Ker} u^2$  et  $e_3 \notin \text{Ker} u$ .

• Synthèse Commençons par montrer que  $\text{Ker} u \not\subset \text{Ker} u^2$ .

L'inclusion  $\text{Ker} u \subset \text{Ker} u^2$  est vraie. Supposons que  $\text{Ker} u = \text{Ker} u^2$ .

Alors  $\dim \text{Ker} u = \dim \text{Ker} u^2 = 3 - 2g u^2 = 3 - 1 = 2$ . Or  $1$  est valeur propre de  $u$ .

Ainsi  $\dim \text{SEP}(u, 0) + \dim \text{SEP}(u, 1) = 2 + \dim \text{SEP}(u, 1) \geq 2 + 1 = \dim E$ .

Or la somme des dimensions des sous-espaces propres de  $u$  n'excède pas  $\dim E$ .

Ceci montre que  $\exists \text{Sp} u = \{0, 1\}$  (nous le savions déjà)

$\exists \dim \text{SEP}(u, 0) + \dim \text{SEP}(u, 1) = \dim E$

soit  $B_1 = (e'_1, e'_2)$  une base de  $\text{SEP}(u, 0)$  et  $B_2 = (e'_3)$  une base de  $\text{SEP}(u, 1)$ .

Alors  $B' = B_1 \cup B_2$  est une base de  $E$  et  $A' = \pi_{B'}(u) = \text{Diag}(0, 0, 1)$ .

donc  $A'^2 = \text{Diag}(0^2, 0^2, 1^2) = A'$ .  $u^2 = u$ .  $u$  est un projecteur !!

$\text{Ker} u = \text{Ker} u^2$  est triviale. donc  $\text{Ker} u \not\subset \text{Ker} u^2$ . On peut donc trouver un vecteur  $e_3$

qui appartient à  $\text{Ker} u^2$  mais pas à  $\text{Ker} u$ . Prenons alors  $e_3 = u(e_3)$ .

Notons que  $e_1 \neq 0$  et que  $u(e_1) = u^2(e_1) = 0_E$ . Choisissons aussi un vecteur propre  $e_2$

de  $u$  associé à la valeur propre  $1$ . Alors  $u(e_2) = e_2$ .

montrons que  $B = (e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $E$ . cette famille a pour cardinal la dimension de  $E$  donc pour montrer que c'est une base de  $E$  il suffit de prouver qu'elle est libre.

soit  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_E$ .

Alors  $0_E = u^2(0_E) = \alpha u^2(e_1) + \beta u^2(e_2) + \gamma u^2(e_3) = \alpha u(0_E) + \beta u(e_2) + \gamma 0_E = \beta e_2$ .

comme  $e_2 \neq 0_E$  :  $\beta = 0$ .

$$\begin{array}{l} \uparrow u(e_1) = 0_E \\ \uparrow u(e_2) = e_2 \\ \uparrow u^2(e_3) = 0_E \end{array}$$

$$\text{Ainsi } \alpha e_1 + \delta e_3 = 0_E.$$

$$\text{Dac } 0_E = u(0_E) = \alpha u(e_1) + \delta u(e_3) = \alpha \cdot 0_E + \delta u(e_3) = \delta u(e_3).$$

$$\text{Or } u(e_3) = e_1 \neq 0_E \text{ dac } \underline{\delta = 0}.$$

$$\text{Alors } \alpha e_1 = 0_E \text{ et } e_1 \neq 0_E \text{ dac } \underline{\alpha = 0}.$$

$$\forall (\alpha, \beta, \delta) \in \mathbb{R}^3, \alpha e_1 + \beta e_2 + \delta e_3 = 0_E \Rightarrow \alpha = \beta = \delta = 0.$$

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $E$  car elle admet 3 vecteurs linéairement indépendants et  $\dim E = 3$ . Alors  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $E$ .

$$\text{Rappelons que } u(e_1) = 0_E, u(e_2) = e_2 \text{ et } u(e_3) = e_1 \text{ dac } \pi_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

si j'ai une valeur propre de  $u$  et si  $u$  n'est pas un projecteur j'écris une base de  $E$

dans laquelle la matrice de  $u$  est  $A$ .

**Exercice** Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

A est-elle diagonalisable ?

Q2. Montrer que A est semblable à  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $B^n$  et  $A^n$  pour tout  $n$  dans  $\mathbb{Z}$ .

Q1) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . cherchons une réduite de  $A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$L_2 \leftrightarrow L_3$  puis  $L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_2$  donne  $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_2} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & 0 & -(\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$  qui est une réduite de  $A - \lambda I_3$  que nous noterons  $R_\lambda$ .

$\lambda \in \text{Sp}(A) \Leftrightarrow A - \lambda I_3$  non inversible  $\Leftrightarrow R_\lambda$  non inversible car  $1-\lambda = 0$  ou  $-(\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ .

$\text{Sp}(A) = \{1\}$ . Comme A n'est pas  $3 \times 3$ , A n'est pas diagonalisable.

Caractériser. Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  lib.  $AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = -y$ .

$\text{SEP}(A, \mathcal{B})$  est le plan vectoriel d'équation  $z = -y$ .

$\text{SEP}(A, \mathcal{B}) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ .  $\text{Sp}(A) = \{1\}$  et dim  $\text{SEP}(A, \mathcal{B}) = 2$ ; A n'est pas diagonalisable!

Q2) Soit  $E = \mathbb{R}^3$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $E$  et  $f$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est A. Pour montrer que A et B sont semblables il suffit de trouver une base  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  de  $E$  telle que  $\pi_{\mathcal{B}'}(f) = B$ .

Analyse.. Supposons  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  réduite.  $f(e'_1) = e'_1$ ,  $f(e'_2) = e'_2$  et  $f(e'_3) = e'_2 + e'_3$ .

Ainsi  $e'_1 \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ ,  $e'_2 \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$  et  $(f - \text{Id}_E)(e'_3) = e'_2$ .

Donc  $e'_1 \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ ,  $e'_2 \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \cap \text{Im}(f - \text{Id}_E)$  et  $(f - \text{Id}_E)(e'_3) = e'_2$ .

Synthèse..  $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A) = \{1\}$ .  $\pi_{\mathcal{B}}(f) = A$  et  $\text{SEP}(A, \mathcal{B}) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ ; ainsi

$\text{SEP}(f, \mathcal{B}) = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \text{Vect}(e_1, e_2 - e_3)$ .

Cherchons  $\mathcal{B}'$  dans  $\text{Im}(f - \text{Id}_E)$ .  $\pi_{\mathcal{B}}(f - \text{Id}_E) = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

$\text{Im}(f - \text{Id}_E) = \text{Vect}((f - \text{Id}_E)(e_1), (f - \text{Id}_E)(e_2), (f - \text{Id}_E)(e_3)) = \text{Vect}(0, -e_2 - e_3, -e_1 + e_3)$ .

$\text{Im}(f - \text{Id}_E) = \text{Vect}(e_2 - e_3) \subset \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ . Ainsi  $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \text{Vect}(e_2 - e_3)$ .

On choisit pour  $\mathcal{B}'$   $e'_1 = e_1$ ,  $e'_2 = e_2 - e_3$  et cherchons  $e'_3$  tel que  $(f - \text{Id}_E)(e'_3) = e'_2$ .

Pour  $e'_3 = x e_3 + y e_2 + z e_1$  avec  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

$$(f - Sd_E)(e'_3) = e'_2 \Leftrightarrow (A - S) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -y - z = 1 \\ y + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow y + z = -1$$

Pour  $x=0, y=0, z=-1$ .

Alors  $e'_3 = -e_3$  et  $(f - Sd_E)(e'_3) = e'_2$ .

Soit  $P$  la matrice de la famille  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  dans  $\mathcal{B}$ ;  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

$P$  est triangulaire inférieure non nulle le diagonal.  $P$  est donc inversible ce qui prouve que  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  est une base de  $E$ .

de plus  $\pi_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$  car  $f(e'_1) = e'_1, f(e'_2) = e'_2$  et  $f(e'_3) = e'_2 + e'_3$ .

$A$  et  $B$  sont donc semblables.

Par la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  donc  $\pi_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} \pi_{\mathcal{B}}(f) P$  et  $B = P^{-1} A P$

$B = P^{-1} A P$  avec  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$  un calcul très simple donne  $P^{-1} = P$  !!

Pour  $C = B - I, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Ainsi  $\forall t \in \mathbb{C}, t \neq 0, C^k = 0$

$\forall n \in \mathbb{Z}, t \neq 0, B^n = (C + I)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} C^k I_3^{n-k} = \binom{n}{0} C^0 I_3^n + \binom{n}{1} C I_3^{n-1} = I + n C$ .

$\forall n \in \mathbb{Z}, t \neq 0, B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  car on a vu pour  $n=0$  et  $\pm 1$ .

$\forall n \in \mathbb{N}, B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Or  $\text{esp}(B)$  donc  $B$  est inversible. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  montrons que  $B^{-n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Il suffit de montrer que  $B^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$  car  $B^{-n} = (B^n)^{-1}$ .

$$B^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3. B^{-n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi  $\forall n \in \mathbb{Z}, B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .  $\forall n \in \mathbb{Z}, A^n = (P B P^{-1})^n = P B^n P^{-1} = P B^n P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-n & -n \\ 0 & n & n+1 \end{pmatrix}$ .

Exercice N1 Matrices semblables 2.

Q1.  $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $A$  est semblable à  $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

Q2. Calculer  $A^n$  pour tout  $n$  dans  $\mathbb{Z}$ .

Q1) Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  de matrice  $A$  dans la base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$ .  
 Pour montrer que  $A$  est semblable à  $B$  nous allons construire une base  $\mathcal{B}'$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que  
 $\pi_{\mathcal{B}'}(f) = B$ .

• Analyse... Supposons que  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  soit une base de  $\mathbb{R}^3$  telle que  $\pi_{\mathcal{B}'}(f) = B$ .

$$\text{Alors } f(e'_1) = 4e'_1, f(e'_2) = 3e'_2 + 4e'_1 \text{ et } f(e'_3) = 2e'_3.$$

$$\text{Ainsi } \underline{e'_1 \in \text{Ker}(f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^3})}, \underline{e'_3 \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3})} \text{ et } \underline{e'_2 = \frac{1}{3}(f - 3\text{Id}_{\mathbb{R}^3})(e'_2) = (f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^3})\left(\frac{1}{3}e'_2\right) \in \text{Im}(f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^3})}.$$

• Synthèse... construisons une telle base.

$$\pi_{\mathcal{B}}(f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = A - 4I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Alors } \text{Im}(f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}(4e_1 - 2e_2 + 4e_3, -e_1 - e_2 - e_3, -5e_1 + e_2 - 5e_3).$$

$$\text{Im}(f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}(2e_1 - e_2 + 2e_3, e_1 + e_2 + e_3, -5e_1 + e_2 - 5e_3).$$

$$\text{Im}(f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3, 2e_1 - e_2 + 2e_3 - 2(e_1 + e_2 + e_3), -5e_1 + e_2 - 5e_3 + 5(e_1 + e_2 + e_3)).$$

$$\text{Im}(f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3, -3e_2, 0e_2) = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3, e_2) = \text{Vect}(e_1 + e_3, e_2).$$

La famille  $(e_1 + e_3, e_2)$  étant clairement e.c.m.e.,  $\dim \text{Im}(f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 2$ .

Alors  $\dim \text{Ker}(f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 1$ . Ainsi  $4 \in \text{Sp } f$  et  $\dim \text{SEP}(f, 4) = 1$ .

Notons que  $(f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^3})(e_1 - e_2 + e_3) = (f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^3})(e_1) - (f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^3})(e_2) + (f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^3})(e_3) = 4e_1 - 2e_2 + 4e_3 + e_1 + e_2 + e_3 - 5e_1 + e_2 - 5e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ . Donc  $e_1 - e_2 + e_3$  est un élément non nul de  $\text{SEP}(f, 4)$  qui est de dimension 1. Alors  $\text{SEP}(f, 4) = \text{Vect}(e_1 - e_2 + e_3)$ . Notons que  $e_1 - e_2 + e_3 \in \text{Vect}(e_1 + e_3, e_2)$ .

Alors  $\text{Ker}(f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{SEP}(f, 4) \subset \text{Im}(f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ .

Posons alors  $\underline{e'_1 = e_1 - e_2 + e_3}$ .  $e'_1 \in \text{SEP}(f, 4)$  donc  $\underline{f(e'_1) = 4e'_1}$ .

Cherchons  $e'_2$  dans  $E$  tel que  $f(e'_2) = 3e'_1 + 4e'_2$  et  $e'_2 \neq 0$  !

soit  $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E$ .

$$f(u) = 3e'_1 + 4u \Leftrightarrow (f - 4\text{Id}_E)(u) = 3e'_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y - 5z = 3 \\ -2x - y + z = -3 \\ 4x - y - 5z = 3 \end{cases}$$

$$f(u) = 3e'_1 + 4u \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y + z = -3 \\ 4x - y - 5z = 3 \end{cases} \xrightarrow{L_2 + L_1} \begin{cases} -2x - y + z = -3 \\ 6x - 6z = 6 \end{cases} \xrightarrow{L_2 : \div 6} \begin{cases} -2x - y + z = -3 \\ x - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x - 1 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

Notons que  $(1, 1, 0)$  est solution du dernier système. Posons alors  $e'_2 = e_1 + e_2$ .

$f(e'_2) = 3e'_1 + 4e'_2$ . Cherchons maintenant  $\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$ . Soit  $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E$ .

$$u \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E) \Leftrightarrow (f - 2\text{Id}_E)(u) = 0 \Leftrightarrow (A - 2I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -1 & -5 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - y - 5z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \\ 4x - y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ 6x - y - 5z = 0 \\ 4x - y - 3z = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 + L_1} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ 4x - 4z = 0 \\ 4x - y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ 4x - 4z = 0 \\ 0 = -2x + y + x \end{cases}$$

$$u \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases} \quad \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

Alors  $\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E) = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$ . Posons  $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$ .  $f(e'_3) = 2e'_3$ .

Posons  $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  et montrons que  $B'$  est une base de  $E$ .  $e_1 + e_2 + e_3 = (e_3 + e_2)$   
 $\downarrow$

$$\text{Vect}(e'_1, e'_2, e'_3) = \text{Vect}(e_1 - e_2 + e_3, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3) = \text{Vect}(e_3 - e_2 + e_3, e_1 + e_2, e_3)$$

$$\text{Vect}(e'_1, e'_2, e'_3) = \text{Vect}(e_1 - e_2, e_1 + e_2, e_3) = \text{Vect}(e_1 - e_2, 2e_2, e_3) = \text{Vect}(e_1, -e_2, e_3)$$

Ainsi  $\text{Vect}(e'_1, e'_2, e'_3) = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = E$ .  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  est une famille génératrice de  $E$  dont le cardinal coïncide avec la dimension de  $E$ .

Ainsi  $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  est une base de  $E$ . Or pour  $\pi_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = B$ .

Ceci adéquat de montrer que  $A$  est semblable à  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

(Q2) Soit  $P$  la matrice de passage de  $B$  à  $B'$ .  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$B = PBP^{-1} = P^{-1}BP = P^{-1}AP.$$

$$\text{Alors } A = PBP^{-1}. \text{ Donc } \forall n \in \mathbb{N}, A^n = (PBP^{-1})^n = PB^nP^{-1}.$$

$A$  et  $B$  sont inversibles car 0 n'est pas valeur propre de ces deux matrices.

$$A^{-1} = (PBP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}B^{-1}P^{-1} = PB^{-1}P^{-1}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^{-n} = (A^{-1})^n = (PB^{-1}P^{-1})^n = P(B^{-1})^n P^{-1} = PB^{-n}P^{-1}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PB^nP^{-1} \text{ et } A^{-n} = PB^{-n}P^{-1} \text{ donc } \forall n \in \mathbb{Z}, \underline{\underline{A^n = PB^nP^{-1}}}.$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^2 & 2 \times 4 \times 3 & 0 \\ 0 & 4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}.$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^2 & 2 \times 4 \times 3 & 0 \\ 0 & 4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^3 & 3 \times 4^2 \times 3 & 0 \\ 0 & 4^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}. \text{ Par récurrence que pour}$$

$$\text{tout } n \text{ dans } \mathbb{N} \quad B^n = \begin{pmatrix} 4^n & n \times 4^{n-1} & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}. \text{ C'est vrai pour } n=0. \text{ Supposons l'égalité}$$

vrai pour  $n$  dans  $\mathbb{N}$  et montrons la pour  $n+1$ .

$$B^{n+1} = BB^n = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & n \times 4^{n-1} & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^{n+1} & (n+1)4^n & 0 \\ 0 & 4^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}. \text{ Ceci achève la récurrence.}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, B^n = \begin{pmatrix} 4^n & n \times 4^{n-1} & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}. \text{ Par conséquent ce résultat vaut pour tout } n \text{ dans } \mathbb{Z}.$$

$$\text{Soit } \underline{\underline{n \in \mathbb{Z} \text{ et } n < 0}}. \quad B^n = (B^{-n})^{-1}. \text{ Notons que } B^{-n} = \begin{pmatrix} 4^{-n} & n \times 4^{-n-1} & 0 \\ 0 & 4^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-n} \end{pmatrix} \text{ car } -n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{pmatrix} 4^{-n} & n \times 4^{-n-1} & 0 \\ 0 & 4^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^{-n} & n \times 4^{-n-1} & 0 \\ 0 & 4^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3n+3n}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

$$\text{Alors } (B^{-n})^{-1} = \begin{pmatrix} 4^n & n \times 4^{n-1} & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \text{ donc } B^n = \begin{pmatrix} 4^n & n \times 4^{n-1} & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

$$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{Z}, B^n = \begin{pmatrix} 4^n & n \times 4^{n-1} & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}}$$

chercher  $P^{-1}$ . Par la nature de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  d'ac  $P^{-1}$  et la nature de passage de  $\mathcal{B}'$  à  $\mathcal{B}$ .

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 - e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 + e_2 \\ e'_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

Alors  $e_3 = e_1 + e_2 + e_3 - (e_1 + e_2) = e'_3 - e'_2$  ;  $e_3 = e'_3 - e'_2$ .

$2e_2 = e_1 + e_2 + e_3 - (e_1 - e_2 + e_3) = e'_3 - e'_1$  ;  $e_2 = \frac{1}{2}(e'_3 - e'_1)$ .

$e_1 = e'_2 - e_2 = e'_2 - \frac{1}{2}(e'_3 - e'_1) = \frac{1}{2}e'_1 + e'_2 - \frac{1}{2}e'_3$ .  $e_1 = \frac{1}{2}(e'_1 + 2e'_2 - e'_3)$ .

Alors  $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Soit  $n \in \mathbb{Z}$ .  $A^n = P B^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & 3n 4^{n-1} & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$ .

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4^n & 3n 4^{n-1} + 4^n & 2^n \\ -4^n & -3n 4^{n-1} + 4^n & 2^n \\ 4^n & 3n 4^{n-1} & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{3(n+2)}{2} 4^n - 2^n & -4^n + 2^n & -\frac{4+3n}{2} 4^n + 2^{n+1} \\ \frac{2-3n}{2} 4^n - 2^n & 4^n + 2^n & \frac{3n-4}{2} 4^n + 2^{n+1} \\ \frac{3n+2}{2} 4^n - 2^n & -4^n + 2^n & -\frac{3n}{2} 4^n + 2^{n+1} \end{pmatrix} \text{ et ce pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

# EXERCICE 15

Exercice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$  est un élément de  $M_4(\mathbb{K})$ .

- Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de  $A$ . Montrer que  $A$  est semblable à  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .
- Q3. Calculer  $A^n$  pour  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ ... ou pour  $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ .

Q1) Soit  $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4$  (r.l.) et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda I_4)x = 0 \text{ sur } \mathbb{K}^4 \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x - y + z - t = 0 \\ x + (1-\lambda)y + z + t = 0 \\ -x + y - (1+\lambda)z + t = 0 \\ -x + y - 3z + (3-\lambda)t = 0 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x - y + z - t = 0 \\ x + (1-\lambda)y + z + t = 0 \\ -\lambda(x+z) = 0 \\ -x + y - 3z + (3-\lambda)t = 0 \end{cases}$$

1<sup>er</sup> cas...  $\lambda = 0$   $Ax = \lambda x \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ -x + y - 3z + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+z) = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ -x + y - 3z + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ t = -y \\ 0 = -x + y + 3x - 3y \end{cases}$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = -x \\ t = -x \end{cases} \quad \bullet \quad 0 \in \text{Sp}(A) \text{ et } \text{SEP}(A, 0) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} x \\ x \\ -x \\ -x \end{pmatrix} \right)$$

2<sup>em</sup> cas...  $\lambda \neq 0$   $Ax = \lambda x \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ -\lambda x - y - t = 0 \\ t = (\lambda - 1)y \\ 0 = -x + y + 3x + (3-\lambda)(\lambda - 1)y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ t = (\lambda - 1)y \\ 0 = -\lambda x - y - (\lambda - 1)y = -\lambda(x+y) \\ 0 = x + y + 3x + (3-\lambda)(\lambda - 1)y \end{cases}$

$\lambda \neq 0$

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ t = (\lambda - 1)y \\ y = -x \\ 0 = x[\lambda + \lambda^2 - 4\lambda + 6] = (\lambda - 2)^2 x \end{cases}$$

a)  $\lambda = 2$   $Ax = \lambda x \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = -x \\ t = y = -x \end{cases} \quad \bullet \quad 2 \in \text{Sp}(A) \text{ et } \text{SEP}(A, 2) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

b)  $\lambda \neq 2$   $Ax = \lambda x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad \bullet \quad A \notin \text{Sp}(A)$

Finalement  $\text{Sp}(A) = \{0, 1\}$ ,  $\text{SEP}(A, 0) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$  et  $\text{SEP}(A, 1) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ .

Ainsi,  $A$  n'est pas diagonalisable car  $\dim \text{SEP}(A, 0) + \dim \text{SEP}(A, 1) = 2 < 4$ .

Soit  $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  une base de  $E = \mathbb{R}^4$ .

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans la base  $B$  est  $A$ .

Pour prouver que  $A$  est semblable à la matrice  $B$  il suffit de trouver une base

$B' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$  de  $E$  telle que:  $M_{B'}(f) = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  (1)

Notons que  $01 \Leftrightarrow \begin{cases} f(e'_1) = 0_E & (e'_1 \in \text{Ker}(f)) \\ f(e'_2) = e'_1 \\ f(e'_3) = 2e'_3 & (e'_3 \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)) \\ f(e'_4) = e'_3 + e'_4 \end{cases}$

Notons aussi que  $\text{Sp}(f) = \{0, 1\}$ ,  $\text{SEP}(f, 0) = \text{Vect}(e_1 + e_2 - e_3 - e_4)$  et  $\text{SEP}(f, 1) = \text{Vect}(-e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$ .

On en déduit  $e'_3 = e_3 + e_2 - e_3 - e_4$  et  $e'_4 = -e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ .  $f(e'_3) = 0_E$  et  $f(e'_4) = 2e'_3$ .

On cherche alors  $e'_2$  et  $e'_1$  dans  $E$  tels que  $f(e'_2) = e'_1$  et  $f(e'_1) = e'_3 + e'_4$ .

Soit  $u = x e_1 + y e_2 + z e_3 + t e_4$ .

$f(u) = e'_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ x + y + z + t = 1 \\ -x + y - z + t = -1 \\ -x + y - z + 3t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ 2x + 2z = 2 \\ -2y + 2t = 0 \\ -y - t = 1 + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = t \\ z = 1 - x \\ -y - t = 1 + 4z = 0 \end{cases}$

$f(u) = e'_2 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - x \\ t = 1 - x \\ y = x - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} z = -t_1 \\ t_2 = t_2 + t_1 \\ t_4 = t_4 + t_1 \end{cases}$

En posant  $x = 1, y = z = t = 0$  on a  $u = e_1$  et  $f(e_1) = e'_1 \dots$  ce qui était visible dès le départ!

On en déduit  $e'_2 = e_1$ ;  $f(e'_1) = e'_2$ .

Reprenons  $u = x e_1 + y e_2 + z e_3 + t e_4$ .

$f(u) = e'_3 + t e'_4 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z - t = -1 + t x \\ x + y + z + t = 1 + t y \\ -x + y - z + t = 1 + t z \\ -x + y - z + 3t = 1 + t t \end{cases}$

$$f(u) = e'_3 + 1u \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y + z - t = -1 \\ x - y + z + t = 1 \\ -x + y - 3z + t = 1 \\ -x + y - 3z + t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y + z - t = -1 \\ -2y + 2z = 0 \\ -x + y - 3z + t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = y \\ x + t = 1 \\ -x - 2y + t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 &= L_1 \end{aligned}$$

$$f(u) = e'_3 + 1u \Leftrightarrow \begin{cases} z = y \\ t = 1 - x \\ -x - 2y + 1 - x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = y \\ t = 1 - x \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = -x \\ t = 1 - x \end{cases}$$

Posons  $x = 0, y = 0, z = 0$  et  $t = 1$ . Alors  $u = e_4$  et  $f(u) = f(e_4) = e'_3 + 2e_4$ .

Posons alors  $e'_4 = e_4$ .  $f(e'_4) = e'_3 + 2e'_4$ .

Ainsi si  $e'_1 = e_1 + e_2 - e_3 - e_4, e'_2 = e_1, e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3 + e_4$  et  $e'_4 = e_4$ .

alors  $f(e'_1) = 0_E, f(e'_2) = e'_1, f(e'_3) = 2e'_3$  et  $f(e'_4) = e'_3 + 2e'_4$ .

Il reste plus qu'à montrer que  $B' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$  est une base de  $E$ .

Comme dim  $E = 4$  il suffit de prouver que  $(e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$  est libre.

Soit  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$  tel que  $\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 + \delta e'_4 = 0_E$ .

$$\alpha(e_1 + e_2 - e_3 - e_4) + \beta(e_1) + \gamma(-e_1 + e_2 + e_3 + e_4) + \delta e_4 = 0_E.$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + \gamma = 0 \\ -\alpha + \gamma + \delta = 0 \end{cases} ; \begin{cases} \alpha = \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \delta = 0 \end{cases} ; \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0.$$

Ainsi  $B'$  est une base de  $E$  et  $M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = B$ .

Alors  $B = P^{-1}AP$  où  $P$  est la matrice de passage de  $B$  à  $B'$ .  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

avec A est semblable à B.

(9)  $B = \begin{pmatrix} U & O_2 \\ O_2 & V \end{pmatrix}$  avec  $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Un produit d'itération par blocs donne  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $B^n = \begin{pmatrix} U^n & 0_L \\ 0_L & V^n \end{pmatrix}$ .

$$U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_L \dots \forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, U^n = 0$$

$$V = 2I_2 + U. \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \neq 0, V^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} U^k (2I_2)^{n-k} = 2^n I_2 + 2^{n-1} n U = \begin{pmatrix} 2^n & n 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

$\uparrow$   
si  $U = US_L = 0$

Alors  $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ ,  $B^n = \begin{pmatrix} 0_L & 0_L \\ 0_L & V^n \end{pmatrix}$  avec  $V^n = \begin{pmatrix} 2^n & n 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ .

Un calcul simple donne  $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Alors  $\forall n \in \mathbb{Z}, \neq 0, A^n = (P B P^{-1})^n = P B^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & n 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Alors  $\forall n \in \mathbb{Z}, \neq 0, A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & n-1 & -n \\ 0 & 1 & -(n-1) & n \\ 0 & 1 & -(n-1) & n \\ 0 & 1 & -(n+1) & n+2 \end{pmatrix}$ .

EXERCICE 16

Exercice

Q1. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  dans  $\mathbb{C}$ .

Q2. Calculer  $A^2$  et  $A^4$ .

Q3. Montrer que  $A$  est semblable à  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Q1) Soit  $\kappa = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \Pi_{4,1}(\mathbb{C})$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

$$A\kappa = \lambda\kappa \Leftrightarrow \begin{cases} t = \lambda x \\ x = \lambda y \\ y = \lambda z \\ z = \lambda t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \lambda t \\ y = \lambda^2 t \\ x = \lambda^3 t \\ t = \lambda^4 t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \lambda^4)t = 0 \\ x = \lambda^3 t \\ y = \lambda^2 t \\ z = \lambda t \end{cases}$$

1<sup>er</sup> cas  $\lambda^4 \neq 1$ .  $A\kappa = \lambda\kappa \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \kappa = 0_{\Pi_{4,1}(\mathbb{R})}$

$\lambda$  n'est pas valeur propre de  $A$ .

2<sup>em</sup> cas  $\lambda^4 = 1$ .  $A\kappa = \lambda\kappa \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda^3 t \\ y = \lambda^2 t \\ z = \lambda t \end{cases}$

Alors  $\lambda \in Sp A$  et  $SEP(A, \lambda) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} \lambda^3 \\ \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .

Notons que  $\lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda \in \{1, -1, i, -i\}$ .

Donc  $Sp A = \{1, -1, i, -i\}$ .  $SEP(A, 1) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ,  $SEP(A, -1) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$SEP(A, i) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  et  $SEP(A, -i) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Remarque... Le nombre de dimensions des sous-espaces propres de  $A$  est 4 et  $A \in M_4(\mathbb{C})$ .

Donc  $A$  est diagonalisable dans  $\Pi_4(\mathbb{C})$ .

Notons que  $A$  n'est pas diagonalisable dans  $\Pi_4(\mathbb{R})$ , car  $Sp_{\mathbb{R}} A = \{1, -1\}$  et

donc  $SEP(A, 1) \cup SEP(A, -1) = 2 < 4$ .

$$\textcircled{Q2} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4.$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{A^4 = I_4.}}$$

$\textcircled{Q3}$  Soit  $E = \mathbb{R}^4$ . Soit  $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique de  $E$ .

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  de matrice  $A$  dans  $B$ .

Pour montrer que  $A$  et  $B$  sont semblables, il suffit de trouver une base  $B'$  de  $E$  telle que  $\pi_{B'}(f) = B$ .

Avant de commencer noter que  $\text{Sp} f = \{1, -1\}$ , que  $\text{SEP}(f, 1) = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$  et  $\text{SEP}(f, -1) = \text{Vect}(-e_1 + e_2 - e_3 + e_4)$ .

\* Une petite idée. Supposons que  $B' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$  soit une base de  $E$

telle que  $\pi_{B'}(f) = B$ . Alors  $f(e'_1) = e'_1$ ,  $f(e'_2) = e'_2$ ,  $f(e'_3) = e'_3$  et  $f(e'_4) = -e'_3$ .

Donc  $e'_1 \in \text{SEP}(f, 1)$ ,  $e'_2 \in \text{SEP}(f, 1)$ ,  $e'_4 = f(e'_1)$  et  $e'_3 = -f(e'_4) = -f^2(e'_1)$

Donc  $e'_1 \in \text{SEP}(f, 1)$ ,  $e'_2 \in \text{SEP}(f, -1)$ ,  $e'_4 = f(e'_3)$  et  $e'_3 \in \text{SEP}(f^2, -1)$ .

\* Construction d'une base adaptée.

Pour  $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ ,  $e'_1 \in \text{SEP}(f, 1)$  donc  $f(e'_1) = e'_1$ .

Pour  $e'_2 = -e_1 + e_2 - e_3 + e_4$ ,  $e'_2 \in \text{SEP}(f, -1)$  donc  $f(e'_2) = -e'_2$ .

↑  
si -1 est valeur propre de  $f^2$ !

Cherchons  $e'_3$  tel que  $f^2(e'_3) = -e'_3$ . Soit  $u = x e_1 + y e_2 + z e_3 + t e_4 \in E$ .

$$f^2(u) = -u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \\ -t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ t = -y \\ x = -z \\ y = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ t = -y \end{cases}$$

Posons  $e'_3 = e_1 - e_3$ ;  $f^2(e'_3) = -e'_3$ . Notons que  $-1$  est p.p. et que  $e'_3 \in \text{SEK}(f, -1)$

Posons  $e'_4 = f(e'_3)$ .  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ;  $e'_4 = e_2 - e_4$

Il reste donc à vérifier: 1)  $f(e'_4) = -e'_3$  2)  $B = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$  est une base de  $E$ .  $e'_3 \in \text{SEK}(f, -1)$

1)  $f(e'_4) = f^2(e'_3) = -e'_3$ .  $f(e'_4) = -e'_3$

et soit  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$  tel que:  $\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 + \delta e'_4 = 0_E$ .

$$0_E = \alpha(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) + \beta(e_1 + e_2 - e_3 + e_4) + \gamma(e_1 - e_3) + \delta(e_2 - e_4) = (\alpha + \beta + \gamma)e_1 + (\alpha + \beta + \delta)e_2 + (\alpha - \gamma)e_3 + (\alpha + \beta - \delta)e_4$$

Ainsi  $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 & (1) \\ \alpha + \beta + \delta = 0 & (2) \\ \alpha - \gamma = 0 & (3) \\ \alpha + \beta - \delta = 0 & (4) \end{cases}$  (1)+(3) et (1)-(3) donnent  $\alpha = \beta$  et  $\gamma = 0$ .  
(2)+(4) et (2)-(4) donnent  $\alpha = -\beta$  et  $\delta = 0$ .  $\begin{cases} \gamma = \delta = 0 \\ \alpha = \beta \\ \beta = -\alpha \end{cases}$

Alors  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ .

$B = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$  est une famille libre de cardinal 4 de  $E$  qui est de dimension 4

$B'$  est une base de  $E$  et  $\pi_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B$ . Ainsi  $A$  et  $B$  sont semblables.

Remarque: Posons  $P = P_{B'}(B, B')$ .  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

$B = P^{-1}AP$

Un calcul simple donne:  $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

EXERCICE 17

Exercice

N1

Racines carrées d'une matrice.

Q1.  $C = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Soit  $D$  un élément de  $M_3(\mathbb{R})$ . Montrer que si  $D$  commute avec  $C$  :  $D$  est diagonale.

En déduire que si  $D^2 = C$  alors  $D$  est diagonale.

Q2. Déterminer le nombre d'éléments  $D$  de  $M_3(\mathbb{R})$  tels que  $D^2 = C$ .

Q3.  $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Déterminer le nombre d'éléments  $B$  de  $M_3(\mathbb{R})$  tels que  $B^2 = A$ .

Q1) Soit  $D$  une matrice de  $M_3(\mathbb{R})$  qui commute avec  $C$  et soit  $(E_1, E_2, E_3)$  la base canonique.

Si  $C = \{9, 4, 1\}$ . Alors  $\text{SEP}(A, 9)$ ,  $\text{SEP}(A, 4)$ ,  $\text{SEP}(A, 1)$  sont respectivement de dimension 1.

Pour tout  $j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $CE_j$  est la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $C$ . Alors  $CE_1 = 9E_1$ ,  $CE_2 = 4E_2$  et  $CE_3 = E_3$ .

Alors  $E_1 \in \text{SEP}(C, 9)$ ,  $E_2 \in \text{SEP}(C, 4)$  et  $E_3 \in \text{SEP}(C, 1)$ . Reciproquement :

$\text{SEP}(C, 9) = \text{Vect}(E_1)$ ,  $\text{SEP}(C, 4) = \text{Vect}(E_2)$  et  $\text{SEP}(C, 1) = \text{Vect}(E_3)$  car  $E_1, E_2, E_3$  sont non

nuls et les sous-espaces propres de  $C$  sont de dimension 1.

$CDE_1 = DCE_1 = 9DE_1$  donc  $DE_1 \in \text{SEP}(C, 9) = \text{Vect}(E_1)$ ;  $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $DE_1 = \alpha E_1$ .

$CDE_2 = DCE_2 = 4DE_2$  donc  $DE_2 \in \text{SEP}(C, 4) = \text{Vect}(E_2)$ ;  $\exists \beta \in \mathbb{R}$ ,  $DE_2 = \beta E_2$ .

$CDE_3 = DCE_3 = DE_3$  donc  $DE_3 \in \text{SEP}(C, 1) = \text{Vect}(E_3)$ ;  $\exists \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $DE_3 = \gamma E_3$ .

Alors  $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ ;  $D$  est diagonale. Si  $D \in M_3(\mathbb{R})$  et si  $D$  commute avec  $C$  :  $D$  est diagonale.

Les matrices de  $M_3(\mathbb{R})$  qui commutent avec  $C$  sont les matrices diagonales de  $M_3(\mathbb{R})$ .

Exercice.. Retrouver le résultat précédent à partir de  $D = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ .

Reprenant  $D$  dans  $M_3(\mathbb{R})$  et supposant que  $D^2 = C$ .

Alors  $DC = DD^2 = D^3 = D^2D = CD$ .  $D$  commute avec  $C$ .  $D$  est diagonale.

Si  $D \in M_3(\mathbb{R})$  et si  $D^2 = C$ ,  $D$  est diagonale.

Q2)  $\{D \in M_3(\mathbb{R}) \mid D^2 = C\} = \{D \in M_3(\mathbb{R}) \mid D \text{ diagonale et } D^2 = C\}$ .

Soit  $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .  $D^2 = C \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = 9 \\ \beta^2 = 4 \\ \gamma^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \text{ ou } -3 \\ \beta = 2 \text{ ou } -2 \\ \gamma = 1 \text{ ou } -1 \end{cases}$

Posons  $\mathcal{J}_C = \{D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid D^2 = C\}$ .  $\mathcal{J} = \left\{ \begin{pmatrix} 3\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon' & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon'' \end{pmatrix}; (\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'') \in \{0, 1\}^3 \right\}$ .

Alors card  $\mathcal{J}_C = \text{card } \{0, 1\}^3 = 2^3 = 8$ .

\* Il y a exactement huit éléments  $D$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  tels que  $D^2 = C$ .

Q3) A triangulaire supérieure d'ac ses valeurs propres sont les éléments de sa diagonale.

Alors  $S_p A = \{9, 4, 1\}$ . A est diagonalisable car  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et A admet trois valeurs propres deux à deux distinctes. Il existe donc une matrice inversible  $P$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que :

$P^{-1}AP = \text{diag}(9, 4, 1) = C$ . Posons  $\mathcal{J}_A = \{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid B^2 = A\}$ .

Rappelons que  $\mathcal{J}_C = \{D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid D^2 = C\}$  a 8 éléments et notons que  $\mathcal{J}_A$  est équivalent à  $\mathcal{J}_C$ .

Alors posons  $\forall B \in \mathcal{J}_A, \psi(B) = P^{-1}BP$ .

$\forall B \in \mathcal{J}_A, (\psi(B))^2 = (P^{-1}BP)^2 = P^{-1}B^2P = P^{-1}AP = C$ .  $\forall B \in \mathcal{J}_A, \psi(B) \in \mathcal{J}_C$ .

$\psi$  est une application de  $\mathcal{J}_A$  dans  $\mathcal{J}_C$ . Notons qu'elle est bijective.

Soit  $D \in \mathcal{J}_C$ . Notons par analyse-synthèse que :  $\exists ! B \in \mathcal{J}_A, \psi(B) = D$ .

• Analyse - Unicité. supposons que  $B$  soit un élément de  $\mathcal{J}_A$  tel que  $\psi(B) = D$ .

Alors  $P^{-1}BP = D$  d'où  $B = PDP^{-1}$ . d'où l'unicité.

• Synthèse / existence. Posons  $B = PDP^{-1}$ .  $B^2 = (PDP^{-1})^2 = PD^2P^{-1} = PCP^{-1} = P(P^{-1}AP)P^{-1} = A$ .

Ainsi  $B \in \mathcal{J}_A$ . De plus  $\psi(B) = P^{-1}BP = P^{-1}(PDP^{-1})P = D$ . D'où l'existence.

$\forall D \in \mathcal{J}_C, \exists ! B \in \mathcal{J}_A, \psi(B) = D$ . par bijectivité. Car  $\mathcal{J}_A$  et  $\mathcal{J}_C$  sont équivalents.

d'où card  $\mathcal{J}_A = \text{card } \mathcal{J}_C = 8$ .

\* Il y a exactement huit éléments  $B$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  tels que  $B^2 = A$ .

Résumons...  $\{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid B^2 = A\} = \left\{ P \begin{pmatrix} 3\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon' & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon'' \end{pmatrix} P^{-1}; (\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'') \in \{0, 1\}^3 \right\}$ .

Exercice... Notons que l'a peut prendre  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

déterminer alors  $\{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid B^2 = A\}$ .

Exercice Racines  $n^{\text{ème}}$  d'une matrice.

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  de  $M_3(\mathbb{R})$ .

Q1. Donner les valeurs propres et les sous espaces de  $A$ .

Q2.  $n$  est un élément de  $\mathbb{N}^*$ . On note  $\mathcal{R}$  l'ensemble des éléments  $B$  de  $M_3(\mathbb{R})$  telles que  $B^n = A$ .

a) Soit  $B$  un élément de  $\mathcal{R}$ . Montrer que  $B$  commute avec  $A$ .

En déduire que les vecteurs propres de  $A$  sont des vecteurs propres de  $B$  et que  $B$  est triangulaire inférieure.

Montrer l'existence de trois réels  $a, b$  et  $f$  tels que:  $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ .

b) Déterminer  $\mathcal{R}$ .

Q1)  $A$  est triangulaire inférieure donc les valeurs propres de  $A$  sont les éléments de sa diagonale.  $S_P(A) = \{1, -1\}$ .

Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ x+y = y \\ -z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \text{SEP}(A, 1) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

$$AX = -X \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x \\ x+y = -y \\ -z = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{SEP}(A, -1) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$S_P(A) = \{1, -1\}. \quad \text{SEP}(A, 1) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad \text{SEP}(A, -1) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Remarque...  $A$  n'est pas diagonalisable car la somme des dimensions de ses sous-espaces propres n'est pas 3.

Q2) a)  $BA = B^n = B^{n-1} = B^n B = AB$ .  $B$  commute avec  $A$ .

Soit  $X$  un vecteur propre de  $A$ .  $X \neq 0_{\mathbb{R}^3} \setminus \{0\}$  et  $\exists \lambda \in \{1, -1\}$ ,  $AX = \lambda X$ .

$$BAX = \lambda BX \quad (\text{multiplication par } B \text{ de } AX = \lambda X).$$

$$\text{Mais } ABX = BAX = \lambda BX; \quad BX \in \text{SEP}(A, \lambda).$$

Or  $X \neq 0$ ,  $X \in \text{SEP}(A, \lambda)$  et donc  $\text{SEP}(A, \lambda) = \mathbb{R}X$  donc  $\text{SEP}(A, \lambda) = \text{Vect}(X)$ .

Mais  $BX \in \text{Vect}(X)$ ;  $\exists \sigma_\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $BX = \sigma_\lambda X$ . Comme  $X \neq 0$ ,  $X$  est un vecteur propre de  $B$ .

Les vecteurs propres de  $A$  sont des vecteurs propres de  $B$ .

Soit  $(E_1, E_2, E_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

$AE_2 = E_2, AE_3 = -E_3, E_2 \neq 0$  et  $E_3 \neq 0$ .

$E_2$  et  $E_3$  sont donc deux vecteurs propres de  $A$  donc de  $B$ .

$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, BE_2 = \alpha E_2$  et  $BE_3 = \beta E_3$ .

Or  $BE_2$  (resp.  $BE_3$ ) est la deuxième colonne (resp. troisième colonne) de  $B$ .

Ainsi  $\exists a, b, c \in \mathbb{R}, B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & \alpha & 0 \\ c & 0 & \beta \end{pmatrix}$ . Matrice triangulaire supérieure.

$AB = BA; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & \alpha & 0 \\ c & 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & \alpha & 0 \\ c & 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a+b & \alpha & 0 \\ -c & 0 & -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b+\alpha & \alpha & 0 \\ c & 0 & -\beta \end{pmatrix}$

Ainsi  $\alpha = a$  et  $-\beta = \beta$ . Donc  $\alpha = a$  et  $\beta = 0$ .

$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Pour  $f = 1$ ! Alors  $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ .

b)  $\mathcal{R}$  qui précède montre que :  $\mathcal{R} \subset \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}; (a, b, f) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

Soit  $(a, b, f) \in \mathbb{R}^3$ . Pour  $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ .

$B^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ ab & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & f^2 \end{pmatrix}$ .

$B^3 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ ab & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 3ab & a^3 & 0 \\ 0 & 0 & f^3 \end{pmatrix}$ .

Une récurrence simple montre que :  $\forall k \in \mathbb{N}, B^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ ka^{k-1}b & a^k & 0 \\ 0 & 0 & f^k \end{pmatrix}$

Alors :  $B \in \mathcal{R} \Leftrightarrow B^n = A \Leftrightarrow \begin{cases} a^n = 1 \\ na^{n-1}b = 1 \\ f^n = -1 \end{cases}$

si cas..  $n$  est pair.  $\mathcal{R} = \emptyset$ !

si cas..  $n$  est impair.  $B \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ f = -1 \\ b = 1/n \end{cases}$ .  $\mathcal{R} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

$\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$

Exercice -  $f$  est l'endomorphisme de  $E = \mathbb{R}^3$  de matrice, dans la base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Q1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de  $f$ .  $f$  est-il diagonalisable?

Q2. On suppose que  $g$  est un endomorphisme de  $E$  vérifiant :  $g \circ g = f$ .

a) Montrer que  $g(e_2)$  et  $g(e_3)$  sont des vecteurs propres de  $f$  associés respectivement aux valeurs propres 1 et 4.

En déduire que  $e_2$  et  $e_3$  sont des vecteurs propres de  $g$ .  $g$  est-il diagonalisable?

b) Montrer que l'ensemble des valeurs propres de  $g$  est  $\{1, 2\}$  ou  $\{-1, -2\}$  ou  $\{1, -2\}$  ou  $\{-1, 2\}$ .

c) Montrer qu'il existe deux réels  $\delta$  et  $\varepsilon$  tels que :

$$M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 1/(2\delta) & \delta & 0 \\ 1/(\delta + 2\varepsilon) & 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix}$$

Q3. Résoudre l'équation :

$$X \in M_3(\mathbb{R}) \text{ et } X^2 = A$$

Q1) A est triangulaire inférieure donc son spectre est l'ensemble de ses éléments diagonaux.  
 $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A) = \{1, 4\}$ . Le calcul simple donne  $\text{SEP}(f, 1) = \text{Vect}(e_2)$  et  $\text{SEP}(f, 4) = \text{Vect}(e_3)$ .

Ainsi  $f$  n'est pas diagonalisable car la somme des dimensions des <sup>no</sup> sous-espaces propres n'est pas égale à  $\dim E$ .

Q2) a)  $f(g(e_2)) = g^2(e_2) = g(f(e_2)) = g(e_2)$ . De plus  $g(e_2)$  n'est pas nul car  $g(e_2) = 0_E$  donne  $g(g(e_2)) = 0_E$  qui donne  $e_2 = f(e_2) = g(g(e_2)) = 0_E$  !  
 Donc  $g(e_2)$  est un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre 1.

De même  $g(e_3)$  est un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre 4.

$g(e_2) \in \text{SEP}(f, 1) = \text{Vect}(e_2)$ .  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $g(e_2) = \lambda e_2$  et  $e_2 \neq 0_E$ . Alors  $e_2$  est un vecteur propre de  $g$ . Noter que :  $e_2 = f(e_2) = g(g(e_2)) = \lambda^2 e_2$  donc  $\lambda^2 = 1$ .

$e_2$  est un vecteur propre de  $g$  associé à une valeur propre  $\lambda$  vérifiant  $\lambda^2 = 1$ . De même

$e_3$  est un vecteur propre de  $g$  associé à une valeur propre  $\mu$  vérifiant  $\mu^2 = 4$ .

Supposons  $g$  diagonalisable. Existe une base  $\mathcal{B}'$  de  $E$  telle que  $D = \Pi_{\mathcal{B}'}(g)$  soit diagonale.

Alors  $\Pi_{\mathcal{B}'}(f) = \Pi_{\mathcal{B}'}(g^2) = D^2$  est diagonale et ainsi  $f$  est diagonalisable !

$g$  n'est pas diagonalisable.

b)  $\lambda$  et  $\mu$  ont deux valeurs propres distinctes ( $\lambda^2=1$ , et  $\mu^2=4$ ) de  $g$ .  $g$  ne peut pas avoir trois valeurs propres distinctes car  $g$  n'est pas diagonalisable.

Alors  $Sp(g) = \{\lambda, \mu\}$ . Comme  $\lambda^2=1$  et  $\mu^2=4$  :  $\lambda=1$  ou  $-1$  et  $\mu=2$  ou  $-2$ .

Ainsi  $Sp(g) = \{1, 2\}$  ou  $\{-1, -2\}$  ou  $\{1, -2\}$  ou  $\{-1, 2\}$ . En fait  $\delta=1$  et  $\varepsilon=\frac{\mu}{2}$  !!

c) Posons  $\delta = 1$  si  $\lambda = 1$  et  $\delta = -1$  si  $\lambda = -1$ ; posons  $\varepsilon = 1$  si  $\mu = 2$  et  $\varepsilon = -1$  si  $\mu = -2$ .  
 On a  $g(e_1) = \lambda e_1 = \delta e_1$  et  $g(e_2) = \mu e_2 = 2\varepsilon e_2$ . Remarque  $\delta \in \{-1, 1\}$  et  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ .

De plus  $\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ,  $g(e_3) = ae_1 + be_2 + ce_3$ .  $\Pi_B(g) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & \delta & 0 \\ c & 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A = \Pi_B(g) = \Pi_B(g^2) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & \delta & 0 \\ c & 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ b+\delta b & \delta^2 & 0 \\ ac+2\varepsilon c & 0 & 4\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

Alors  $a^2=1$ ,  $b+\delta b=1$  et  $c(ac+2\varepsilon)=1$ .

Comme  $b(a+\delta)=1$  :  $a \neq -\delta$ .  $a^2=1=\delta^2$  donc a priori on a  $a=\delta$ .

Soit  $a=\delta$ ,  $b = \frac{1}{1+\delta}$  et  $c = \frac{1}{\delta+2\varepsilon}$ .  $\Pi_B(g) = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 1/2\delta & \delta & 0 \\ 1/(\delta+2\varepsilon) & 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix}$  avec  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  et  $\delta \in \{-1, 1\}$ .

Q3) Soit  $\lambda \in \mathbb{N}_3$  tel que  $\lambda^2 = A$ . Notons  $h$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans la base  $B$  est  $\lambda$ .  $\Pi_B(h^2) = \lambda^2 = A = \Pi_B(f)$ .  $h^2 = f$ .  $h \circ h = f$ .

d'après Q2  $\exists \delta \in \{-1, 1\}$ ,  $\exists \varepsilon \in \{-1, 1\}$ ,  $\lambda = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 1/2\delta & \delta & 0 \\ 1/(\delta+2\varepsilon) & 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix}$ .

Réciproquement soit  $(\delta, \varepsilon) \in \{-1, 1\}^2$ . Posons  $\lambda = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 1/2\delta & \delta & 0 \\ 1/(\delta+2\varepsilon) & 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix}$ .

$$\lambda^2 = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 1/2\delta & \delta & 0 \\ 1/(\delta+2\varepsilon) & 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \delta^2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \delta^2 & 0 \\ \frac{\delta}{\delta+2\varepsilon} + \frac{2\varepsilon}{\delta+2\varepsilon} & 0 & 4\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

soit  $\lambda^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A$ .

Ainsi  $\{\lambda \in \mathbb{N}_3(\mathbb{R}) \mid \lambda^2 = A\} = \left\{ \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 1/2\delta & \delta & 0 \\ 1/(\delta+2\varepsilon) & 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix}; (\delta, \varepsilon) \in \{-1, 1\}^2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right\}$

$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ .

$B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  est une base du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ .

$f$  est l'endomorphisme de  $E$  de matrice  $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$  dans  $B$ .

Q1. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $f$ .

Q2. Construire (en justifiant) une base de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $f$ .

Q1) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Cherchons  $\ker(f - \lambda \text{Id}_E)$ .

$\triangle$  Nous n'utiliserons pas de caractéristique symétriques de  $A$ .

soit  $u = x e_1 + y e_2 + z e_3 + t e_4$  un élément de  $E$ . Posons  $\kappa = \Pi_B(u)$ .  $\kappa = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ .

$$u \in \ker(f - \lambda \text{Id}_E) \Leftrightarrow (f - \lambda \text{Id}_E)(u) = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I_4)\kappa = 0_{4 \times 1} \Leftrightarrow \begin{cases} (9 - \lambda)x = 0 \\ (5 - \lambda)y + 4z - 2t = 0 \\ 4y + (5 - \lambda)z + 2t = 0 \\ -2y + 2z + (8 - \lambda)t = 0 \end{cases}$$

1<sup>er</sup> cas...  $\lambda = 9$

$$u \in \ker(f - 9 \text{Id}_E) \Leftrightarrow \begin{cases} -4y + 4z - 2t = 0 \\ 4y + 4z + 2t = 0 \\ -2y + 2z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2y - 2z + t = 0$$

si  $\lambda = 9$ :  $\ker(f - 9 \text{Id}_E)$  est l'hyperplan de  $E$  d'équation  $2y - 2z + t = 0$  dans la base  $B$ .

Ainsi  $\dim \ker(f - 9 \text{Id}_E) = 3$ .

$$\ker(f - 9 \text{Id}_E) = \{x e_1 + y e_2 + z e_3 + t e_4 \in E \mid t = -2y + 2z\} = \{x e_1 + y e_2 + z e_3 + (-2y + 2z) e_4 \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$\ker(f - 9 \text{Id}_E) = \{x e_1 + y(e_2 - 2e_4) + z(e_3 + 2e_4) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(e_1, e_2 - 2e_4, e_3 + 2e_4).$$

$B_3 = (e_1, e_2 - 2e_4, e_3 + 2e_4)$  est une famille génératrice de cardinal 3 de  $\ker(f - 9 \text{Id}_E)$  qui est de dimension 3.  $B_3 = (e_1, e_2 - 2e_4, e_3 + 2e_4)$  est une base de  $\ker(f - 9 \text{Id}_E)$ .

2<sup>ème</sup> cas...  $\lambda \neq 9$

$$u \in \ker(f - \lambda \text{Id}_E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (5 - \lambda)y + 4z - 2t = 0 \\ 4y + (5 - \lambda)z + 2t = 0 \\ -2y + 2z + (8 - \lambda)t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (5 - \lambda)y + 4z - 2t = 0 \\ (9 - \lambda)(y + z) = 0 \\ -2y + 2z + (8 - \lambda)t = 0 \end{cases}$$

$\lambda \neq 9$   
 $\downarrow$   
 $u \in \ker(f - \lambda \text{Id}_E) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = -y \\ 0 = (5 - \lambda)y - 4y - 2t = (1 - \lambda)y - 2t \\ 0 = -2y - 2(-y) + (8 - \lambda)t = -4y + (8 - \lambda)t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \\ t = \frac{1 - \lambda}{2} y \\ 0 = -2y + (8 - \lambda) \left( \frac{1 - \lambda}{2} \right) y = \frac{\lambda(\lambda - 9)}{2} y \end{cases}$$

$\lambda \neq 9$   
 $\downarrow$   
 $u \in \ker(f - \lambda \text{Id}_E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \\ t = \frac{1 - \lambda}{2} y \\ \lambda y = 0 \end{cases}$

si  $\lambda \neq 0$ ,  $u \in \ker(f - \lambda \text{Id}_E) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = 0_E$   
 $\lambda$  n'est pas une valeur propre de  $f$ .

si  $\lambda = 0$ ,  $u \in \ker(f - \lambda \text{Id}_E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \\ t = y/2 \end{cases}$

$$\text{Soit } K_{\lambda} f = K_{\lambda} (f - \lambda \text{Id}_E) = \{y e_2 - y e_3 + \frac{y}{2} e_4; y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(e_2 - e_3 + \frac{1}{2} e_4) = \text{Vect}(2e_2 - 2e_3 + e_4).$$

Alors comme  $2e_2 - 2e_3 + e_4 \neq 0_E$  ! c'est valeur propre de  $f$  et

$B_2 = (2e_2 - 2e_3 + e_4)$  est une base de  $\text{SEP}(f, 0)$ .

Finalement  $\text{SP } f = \{0, 9\}$ .  $\text{SEP}(f, 0)$  et la droite vectorielle engendrée par  $2e_2 - 2e_3 + e_4$  et  $\text{SEP}(f, 9)$  et l'hyperplan de  $E$  admettant pour base  $B_3 = (e_1, e_2 - e_3, e_3 + 2e_4)$ .

Q2) Si  $f = (0, 9)$  et de  $\text{SEP}(f, 0)$  et de  $\text{SEP}(f, 9) = 1+3=4 = \dim E$  donc  $f$  est diagonalisable.

$B_3 = (e_1, e_2 - e_3, e_3 + 2e_4)$  est une base de  $\text{SEP}(f, 9)$ ,  $B_2 = (2e_2 - 2e_3 + e_4)$  est une base de  $\text{SEP}(f, 0)$  et  $E = \text{SEP}(f, 9) \oplus \text{SEP}(f, 0)$ .

Alors  $B' = (e_1, e_2 - e_3, e_3 + 2e_4, 2e_2 - 2e_3 + e_4)$  est une base de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $f$  respectivement associés aux valeurs propres  $9, 9, 9$  et  $0$ .

Remarque... 1...  $\Pi_{B'}(f) = \text{diag}(9, 9, 9, 0)$

$$2... P_{\text{as}}(B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3... \text{L'inverse de } P = P_{\text{as}}(B, B') \text{ est : } \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4... \Pi_{B'}(f) = P^{-1} \Pi_B(f) P = P^{-1} A P.$$