

EXERCICE 31

Exercice

N1+

Matrice circulante again. Oral ESCP 1996 1.1.

Q1. Soit $A = (a_{p,q})$ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall (p,q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{si } q = p + 1 \text{ ou si } (p,q) = (n,1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}. \text{ Diagonaliser } A \text{ dans } \mathbb{C}.$$

Q2. (x_1, x_2, \dots, x_n) est un n -uplet de nombre complexes.

Soit $B = (b_{p,q})$ la matrice de $M_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall (p,q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $b_{p,q} = x_k$ où $\begin{cases} k = q - p + 1 & \text{si } q > p - 1 \\ k = q - p + n + 1 & \text{sinon} \end{cases}$.

Diagonaliser B .

On trouve Q1 dans oral ESCP 1999 2-23.

Q1) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \Pi_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$(A - \lambda I_n)x = 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{C})} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda x_1 + x_2 = 0 \\ -\lambda x_2 + x_3 = 0 \\ \dots \\ -\lambda x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_1 - \lambda x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \dots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 - \lambda x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ 0 = x_1 - \lambda^n x_1 = (1 - \lambda^n) x_1 \end{cases}$$

1^{ère} cas : $\lambda^n \neq 1$. Alors $1 - \lambda^n \neq 0$.

$$\text{d'où } (A - \lambda I_n)x = 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{C})} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 = 0 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 \Leftrightarrow x = 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{C})}$$

Alors λ n'est pas valeur propre de A .

2^{ème} cas : $\lambda^n = 1$. Alors $1 - \lambda^n = 0$.

$$\text{d'où } (A - \lambda I_n)x = 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{C})} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \end{cases}$$

Alors $\lambda \in \text{Sp } A$ et $\text{SEP}(A, \lambda) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} \right)$.

des valeurs propres de A sont les racines n -ièmes de l'unité.

Ainsi A appartient à $\Pi_n(\mathbb{C})$ et admet n valeurs propres deux à deux distinctes.

d'où A est diagonalisable.

Pour tout $\forall q \in \mathbb{I}(3, n, \mathbb{I})$, $\lambda_q = e^{iq\lambda \frac{2\pi}{n}}$ et $x_q = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_q \\ \vdots \\ \lambda_q^{n-1} \end{pmatrix}$.

Alors $S_1 A = \{\lambda_q; q \in \mathbb{I}(3, n, \mathbb{I})\}$ et pour tout q dans $\mathbb{I}(3, n, \mathbb{I})$, B_q est une base de $\text{SEP}(A, \lambda_q)$.

Comme $\Pi_{n,1}(\mathbb{C}) = \bigoplus_{q=1}^n \text{SEP}(A, \lambda_q) : "B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n"$ est une base de $\Pi_{n,1}(\mathbb{C})$

constituée de vecteurs propres ^{de A} associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Ainsi $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_n \\ \vdots \\ \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\Pi_{n,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres

de A respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\Pi_{n,1}(\mathbb{C})$ à la base B .

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix};$$

et partitionnée comme matrice de passage;

$$P^{-1} A P = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Q2) Le principe de la question est assez simple mais la mise à forme est plus délicate.

Examinons rapidement la notation

A quelques abus près la p -ième ligne de B est $(x_{n+2-p} \ x_{n+3-p} \ \dots \ x_n \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{n-p+1})$.

Ce qui donne $B = \begin{pmatrix} x_3 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_n & x_1 & \dots & x_{n-2} & x_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_3 & x_4 & \dots & x_3 & x_2 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_3 \end{pmatrix}$

$$\text{donc } B = x_3 I_n + x_2 A + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & (0) \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ (0) & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il semble bien que $B = x_3 I_n + x_2 A + x_3 A^2 + \dots + x_n A^{n-1}$. Ce résultat obtenu il est clair que la réduction de B résultera aisément de celle de A .

Soit $\tilde{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbb{C}^n , f l'endomorphisme de \mathbb{C}^n de matrice A .
 la base \tilde{B} et g l'endomorphisme de \mathbb{C}^n de matrice B dans \tilde{B} .

Il s'agit de prouver que $g = \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} f^k$.

comme g et $\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} f^k$ sont deux endomorphismes de \mathbb{C}^n pour lesquels qu'ils sont égaux il suffit de montrer qu'ils coïncident sur la base \tilde{B} .

montrons donc que $\forall q \in \llbracket 1, n \rrbracket, g(e_q) = \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} f^k(e_q)$.

Soit $q \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Au petit abus près (le cas $q = n$ qui il faudrait traiter à part) on a :

$$g(e_q) = \sum_{p=1}^n b_{p,q} e_p = \sum_{p=1}^q b_{p,q} e_p + \sum_{p=q+1}^n b_{p,q} e_p = \sum_{p=1}^q x_{q-p+1} e_p + \sum_{p=q+1}^n x_{q-p+1+n} e_p$$

En faisant le changement d'indice $l = q - p$ dans la première somme et $l = q - p + n$ dans

la seconde il vient : $g(e_q) = \sum_{l=0}^{q-1} x_{l+1} e_{q-l} + \sum_{l=q}^{n-1} x_{l+1} e_{n+q-l}$

donc $g(e_q) = \sum_{k=0}^{q-1} x_{k+1} e_{q-k} + \sum_{k=q}^{n-1} x_{k+1} e_{n+q-k}$

$f(e_1) = e_n$ et $\forall q \in \llbracket 2, n \rrbracket, f(e_q) = e_{q-1}$.

Une récurrence des plus simples montre que $\forall q \in \llbracket 2, n \rrbracket, \forall k \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket, f^k(e_q) = e_{q-k}$.

Soit $q \in \llbracket 2, n \rrbracket$. $\forall k \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket, f^k(e_q) = e_{q-k}$. En particulier $f^{q-1}(e_q) = e_1$.

Alors $f^q(e_q) = f(e_1) = e_n$. $\forall k \in \llbracket q, n \rrbracket, f^k(e_q) = f^{k-q}(f^q(e_q)) = f^{k-q}(e_n) = e_{n-(k-q)}$
 $k-q \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

Finalement $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, f^k(e_q) = \begin{cases} e_{q-k} & \text{si } k \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket \\ e_{n+q-k} & \text{si } k \in \llbracket q, n-1 \rrbracket \end{cases} (*)$

$f(e_1) = e_n$ et $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, f^k(e_1) = f^{k-1}(e_n) = e_{n-(k-1)} = e_{n+1-k}$.

donc $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f^k(e_1) = e_{n+1-k}$ et $f^0(e_1) = e_1$.

ce résultat s'intègre dans (*)

Ainsi $\forall q \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, f^k(e_q) = \begin{cases} e_{q-k} & \text{si } k \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket \\ e_{n+q-k} & \text{si } k \in \llbracket q, n-1 \rrbracket \end{cases}$

soit $q \in \mathbb{I}, n \mathbb{I}$. A un abus près :

$$\left(\sum_{\ell=0}^{n-1} x_{\ell+1} f^{\ell} \right) (e_q) = \sum_{\ell=0}^{n-1} x_{\ell+1} f^{\ell} (e_q) = \sum_{\ell=0}^{q-1} x_{\ell+1} e_{q-\ell} + \sum_{\ell=q}^{n-1} x_{\ell+1} e_{n+q-\ell} = g(e_q).$$

donc $\forall \ell \in \mathbb{I}, n \mathbb{I}$, $\sum_{\ell=0}^{n-1} x_{\ell+1} f^{\ell} = g$. donc $B = \sum_{\ell=0}^{n-1} x_{\ell+1} A^{\ell}$

$\forall q \in \mathbb{I}, n \mathbb{I}$, $A x_q = \lambda_q x_q$ donc $\forall q \in \mathbb{I}, n \mathbb{I}, \forall \ell \in \mathbb{N}$, $A^{\ell} x_q = \lambda_q^{\ell} x_q$.

Alors $\forall q \in \mathbb{I}, n \mathbb{I}$, $B x_q = \sum_{\ell=0}^{n-1} x_{\ell+1} A^{\ell} x_q = \sum_{\ell=0}^{n-1} x_{\ell+1} \lambda_q^{\ell} x_q = \left(\sum_{\ell=0}^{n-1} x_{\ell+1} \lambda_q^{\ell} \right) x_q$.

Ainsi (x_1, x_2, \dots, x_n) est une base de $\Pi_{n,1}(0)$ constituée de vecteurs propres de B

respectivement associés aux valeurs propres $\sum_{\ell=0}^{n-1} x_{\ell+1} \lambda_1^{\ell}$, $\sum_{\ell=0}^{n-1} x_{\ell+1} \lambda_2^{\ell}$, ..., $\sum_{\ell=0}^{n-1} x_{\ell+1} \lambda_n^{\ell}$.

donc \exists B triangulaire

$$P^{-1} B P = \text{diag} \left(\sum_{\ell=0}^{n-1} x_{\ell+1} \lambda_1^{\ell}, \sum_{\ell=0}^{n-1} x_{\ell+1} \lambda_2^{\ell}, \dots, \sum_{\ell=0}^{n-1} x_{\ell+1} \lambda_n^{\ell} \right)$$

Exercice

N2

Éléments propres d'une matrice tridiagonale.

n est un entier supérieur ou égal à 4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (et de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Dans cette exercice nous ferons abstraction du caractère symétrique de A pour ne pas déborder sur le chapitre algèbre bilinéaire.

Q1. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On pose : $x_0 = x_{n+1} = 0$.

a) Soit λ un élément de \mathbb{C} . Montrer que $AX = \lambda X$ si et seulement si : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_{k+1} - \lambda x_k + x_{k-1} = 0$.

b) Soit λ un élément de $\mathbb{C} - \{-2, 2\}$. Prouver que :

$$AX = \lambda X \text{ et } X \neq 0 \iff \exists \alpha \in \mathbb{C}^*, \exists c \in \mathbb{C}^*, \begin{cases} \alpha^{2n+2} = 1 \\ \alpha + \frac{1}{\alpha} = \lambda \\ \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = c(\alpha^k - \frac{1}{\alpha^k}) \end{cases}$$

Q2. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de B dans \mathbb{C} , puis dans \mathbb{R} .

Q3. a est un réel. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$.

On trouve ce thème dans ESSEC 1996 MI, LYON 1999 MI Pb 1, HEC 1990 MI, oral ESCP 2008 2.1, dans une QSP ESCP 2006.

$$\textcircled{Q1} \text{ Q1 } AX = \lambda X \iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_1 + x_3 = \lambda x_2 \\ \dots \\ x_{k-1} + x_{k+1} = \lambda x_k \\ \dots \\ x_{n-2} + x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_{n-1} = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 - \lambda x_1 = 0 \\ \forall k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, x_{k+1} - \lambda x_k + x_{k-1} = 0 \\ -\lambda x_n + x_{n-1} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Avec } x_0 = x_{n+1} = 0. \text{ On a } x_2 - \lambda x_1 + x_0 = x_2 - \lambda x_1 \text{ et } x_{n+1} - \lambda x_n + x_n = -\lambda x_n + x_{n-1}.$$

$$\text{Ainsi } AX = \lambda X \iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_{k+1} - \lambda x_k + x_{k-1} = 0.$$

Q1 Ici $\lambda \in \mathbb{C} - \{-2, 2\}$.

particulier que $AX = \lambda X$ et $X \neq 0$ implique que λ est solution de l'équation

non nulle α et c appartenant à \mathbb{C} tels que : $\alpha^{2n+2} = 1, \lambda = \alpha + \frac{1}{\alpha}$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = c(\alpha^k - \frac{1}{\alpha^k})$.

Etape 1. Montrons que la condition est récursive. Supposons que $Ax = \lambda x$ et $x \neq 0 \in \mathbb{C}^n$

considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{C} définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = u_1 \\ \forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1} = \lambda u_k - u_{k-1} \end{cases}$$

montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, u_k = x_k$

• la propriété est vraie pour $k=0$ et $k=1$.

• Supposons la propriété vraie pour $k-1$ et k avec $B \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$.

$$u_{k+1} = \lambda u_k - u_{k-1} = \lambda x_k - x_{k-1} = x_{k+1} \quad \text{ici on utilise la récurrence.}$$

↑ d'après la condition $Ax = \lambda x$.

avec $\forall k \in \mathbb{N}, u_k = x_k$. Notons au passage que $u_{n+1} = x_{n+1} = 0$.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 et l'équation

$$\text{caractéristique est } z \in \mathbb{C} \text{ et } z^2 = \lambda z - 1 \text{ ou } z \in \mathbb{C} \text{ et } z^2 - \lambda z + 1 = 0.$$

le discriminant de cette équation du second degré est $\lambda^2 - 4$. Or $\lambda \neq 2$ et $\lambda \neq -2$.

Ainsi $\lambda^2 - 4 \neq 0$ et l'équation admet deux solutions distinctes α et β .

$$\text{Or } \alpha\beta = \frac{1}{1} \quad \left(\text{"c" !} \right) \text{ donc } \alpha \neq 0 \text{ et } \beta = \frac{1}{\alpha}.$$

$$\text{Alors } \exists (c, d) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = c\alpha^n + d\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n.$$

$$u_0 = u_0 = c + d \text{ donc } d = -c. \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = c\left(\alpha^n - \frac{1}{\alpha^n}\right).$$

$$\text{Ainsi } \forall k \in \mathbb{N}, x_k = c\left(\alpha^k - \frac{1}{\alpha^k}\right). \quad \text{Si } c=0 : \forall k \in \mathbb{N}, x_k = 0 \text{ et } x=0 \in \mathbb{C}^n \quad !!$$

$$\text{Alors } \underline{c \in \mathbb{C}^*}.$$

$$0 = x_{n+1} = u_{n+1} = c\left(\alpha^{n+1} - \frac{1}{\alpha^{n+1}}\right). \text{ Comme } c \text{ n'est pas nul : } \alpha^{n+1} - \frac{1}{\alpha^{n+1}} = 0. \quad \alpha^{n+1} = \frac{1}{\alpha^{n+1}}$$

$$\text{Donc } \underline{\alpha^{2n+2} = 1}.$$

La somme des racines de l'équation $z \in \mathbb{C}$ et $z^2 - \lambda z + 1 = 0$ est $-\frac{-\lambda}{1}$ donc λ .

$$\text{Alors } \underline{\lambda = \alpha + \frac{1}{\alpha}}.$$

$$\text{Ainsi } \exists \alpha \in \mathbb{C}^*, \exists c \in \mathbb{C}^*, \begin{cases} \alpha^{2n+2} = 1 \\ \alpha + \frac{1}{\alpha} = \lambda \\ \forall k \in \mathbb{N}, x_k = c\left(\alpha^k - \frac{1}{\alpha^k}\right). \end{cases}$$

Etape 2. - Montrons que la condition est suffisante. Supposons qu'il existe deux éléments

α et c de \mathbb{C}° tels que : $\alpha^{2n+2} = 1$, $\lambda = \alpha + \frac{1}{\alpha}$ et $\forall k \in \overline{1, n, 0}$, $x_k = c(\alpha^k - \frac{1}{\alpha^k})$.

montrons que $AX = \lambda X$ et $X \neq 0_{\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{C}}$.

Observons que $x_0 = 0 = c(\alpha^0 - \frac{1}{\alpha^0})$; $x_{n+1} = c(\alpha^{n+1} - \frac{1}{\alpha^{n+1}})$.

$$c(\alpha^{k+1} - \frac{1}{\alpha^{k+1}}) = c \frac{\alpha^{2k+2} - 1}{\alpha^{k+1}} = 0 = x_{k+1}; \quad x_{k+1} = c(\alpha^{k+1} - \frac{1}{\alpha^{k+1}}).$$

Alors $\forall k \in \overline{0, n+1}$, $x_k = c(\alpha^k - \frac{1}{\alpha^k})$. Soit $k \in \overline{1, n, 0}$.

$$x_{k+1} - \lambda x_k + x_{k-1} = c(\alpha^{k+1} - \frac{1}{\alpha^{k+1}}) - (\alpha + \frac{1}{\alpha})c(\alpha^k - \frac{1}{\alpha^k}) + c(\alpha^{k-1} - \frac{1}{\alpha^{k-1}}).$$

$$x_{k+1} - \lambda x_k + x_{k-1} = c \left[\alpha^{k+1} - \frac{1}{\alpha^{k+1}} - \alpha^{k+1} + \frac{1}{\alpha^{k+1}} - \alpha^{k-1} + \frac{1}{\alpha^{k-1}} + \alpha^{k-1} - \frac{1}{\alpha^{k-1}} \right] = 0$$

$\forall k \in \overline{1, n, 0}$, $x_{k+1} - \lambda x_k + x_{k-1} = 0$. D'après q1 $AX = \lambda X$.

Supposons que $x_1 = 0$. Alors $0 = x_1 = c(\alpha - \frac{1}{\alpha})$ et $c \neq 0$. Alors $\alpha - \frac{1}{\alpha} = 0$.

$$\alpha = \frac{1}{\alpha}; \quad \alpha^2 = 1; \quad \alpha = \pm \alpha^{-1}. \quad \text{Si } \alpha = 1 : \lambda = \alpha + \frac{1}{\alpha} = 2! \quad \text{Si } \alpha = -1 : \lambda = \alpha + \frac{1}{\alpha} = -2!$$

Alors $x_1 \neq 0$ et $X \neq 0_{\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{C}}$.

Finalement $AX = \lambda X$ et $X \neq 0_{\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{C}}$. Ici achève de montrer que

$$\underline{\underline{AX = \lambda X \text{ et } X \neq 0_{\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{C}} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C}^\circ, \exists c \in \mathbb{C}^\circ, \begin{cases} \alpha^{2n+2} = 1 \\ \alpha + \frac{1}{\alpha} = \lambda \\ \forall k \in \overline{1, n, 0}, x_k = c(\alpha^k - \frac{1}{\alpha^k}) \end{cases}}}$$

Q3 Remarque. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^\circ$ tel que $\alpha^{2n+2} = 1$
 $\exists k \in \overline{0, n+1}$, $\alpha = e^{i k \pi \frac{2\pi}{2n+2}} = e^{i k \pi \frac{\pi}{n+1}}$.

$$\text{Alors } \alpha + \frac{1}{\alpha} = e^{i k \frac{\pi}{n+1}} + e^{-i k \frac{\pi}{n+1}} = 2 \cos \frac{k \pi}{n+1}. \quad \text{Pourtant } \lambda = 2 \cos \frac{k \pi}{n+1}.$$

Remarque sur la case que :

\rightarrow si $k=0 : \lambda = 2$

\rightarrow si $k=n+1 : \lambda = -2$

$\left\{ 2 \cos \frac{k \pi}{n+1}; k \in \overline{1, n, 0} \right\} = \left\{ 2 \cos \frac{k \pi}{n+1}; k \in \overline{1, n+1, 0} \right\}$

$\rightarrow \lambda = 2 \cos \left(\frac{k \pi}{n+1} \right) = 2 \cos \left(\pi - \frac{k \pi}{n+1} \right) = 2 \cos \left((n+1-k) \frac{\pi}{n+1} \right) = 2 \cos \left((k-(n+1)) \frac{\pi}{n+1} \right)$

Pour tout $r \in \mathbb{I}_{1, n} \mathbb{I}$, $d_r = e^{i r \frac{\pi}{n+1}}$ et $\lambda_r = d_r + \frac{1}{d_r}$.

$\forall r \in \mathbb{I}_{1, n} \mathbb{I}$, $\lambda_r = 2 \cos \frac{r \pi}{n+1}$ et $d_r^{2n+2} = 1$.

De plus $0 < \frac{\pi}{n+1} < \frac{2\pi}{n+1} < \dots < \frac{n\pi}{n+1} < \pi$ et \cos est strictement décroissant sur $[0, \pi]$.

Alors $1 > \cos \frac{\pi}{n+1} > \cos \frac{2\pi}{n+1} > \dots > \cos \frac{n\pi}{n+1} > -1$

Donc $2 > 2 \cos \frac{\pi}{n+1} > 2 \cos \frac{2\pi}{n+1} > \dots > 2 \cos \frac{n\pi}{n+1} > -2$. $\Leftrightarrow \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > -2$.

Ainsi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont n réels deux à deux distincts de l'intervalle $] -2, 2 [$.

Soit $r \in \mathbb{I}_{1, n} \mathbb{I}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{I}_{1, n} \mathbb{I}$, $x_\lambda(r) = d_r^r - \frac{1}{d_r^r}$, $X_r = \begin{pmatrix} x_1(r) \\ x_2(r) \\ \vdots \\ x_n(r) \end{pmatrix}$ et $c = 1$.

$d_r \in \mathbb{C}^*$, $c \in \mathbb{C}^*$, $d_r^{2n+2} = 1$, $d_r + \frac{1}{d_r} = \lambda_r$, $\lambda_r \neq 2$, $\lambda_r \neq -2$ et

$\forall \lambda \in \mathbb{I}_{1, n} \mathbb{I}$, $x_\lambda(r) = c \left(d_r^r - \frac{1}{d_r^r} \right)$.

Alors d'après $\mathcal{Q}3$, $A X_r = \lambda_r X_r$ et $\lambda_r \neq 0 \in \mathbb{I}_{1, n}(\mathbb{C})$.

Donc λ_r est une valeur propre de A et X_r est un vecteur propre associé... dans $\mathbb{I}_{n, 1}(\mathbb{C})$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont n valeurs propres deux à deux distinctes de A et $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$

Donc $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont LES valeurs propres de A .

Notons que dans ces conditions les valeurs propres de A sont de dénominateur 1.

Ainsi $\forall r \in \mathbb{I}_{1, n} \mathbb{I}$, $\text{SEP}(A, \lambda_r) = \text{Vect}(X_r)$.

Soit $r \in \mathbb{I}_{1, n} \mathbb{I}$, $\forall \lambda \in \mathbb{I}_{1, n} \mathbb{I}$, $x_\lambda(r) = d_r^r - \frac{1}{d_r^r} = \left(e^{i \frac{r \pi}{n+1}} \right)^r - \left(e^{i \frac{r \pi}{n+1}} \right)^{-r} = e^{i \frac{r^2 \pi}{n+1}} - e^{-i \frac{r^2 \pi}{n+1}}$.

$\forall \lambda \in \mathbb{I}_{1, n} \mathbb{I}$, $x_\lambda(r) = 2i \sin \frac{r^2 \pi}{n+1}$.

Pour $\theta_r = \frac{r \pi}{n+1}$, $\forall \lambda \in \mathbb{I}_{1, n} \mathbb{I}$, $x_\lambda(r) = 2i \sin(2 \theta_r)$. Notons aussi que $\lambda_r = 2 \cos \theta_r$.

Alors $\lambda_r = 2i \begin{pmatrix} \sin \theta_r \\ \sin 2\theta_r \\ \vdots \\ \sin n \theta_r \end{pmatrix}$ donc $\text{SEP}(A, \lambda_r) = \text{Vect}(X_r) = \text{Vect} \begin{pmatrix} \sin \theta_r \\ \sin 2\theta_r \\ \vdots \\ \sin n \theta_r \end{pmatrix}$.

Nous pouvons alors donner une cascade qui vaut aussi bien dans \mathbb{R} que dans \mathbb{C} .

Si $\forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\theta_r = \frac{r\pi}{n+1}$:

1) $\text{Sp } A = \{ 2\cos \theta_r ; r \in \llbracket 1, n \rrbracket \}$

2) $\forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{SEP}(A, 2\cos \theta_r) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \sin \theta_r \\ \sin(2\theta_r) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_r) \end{pmatrix} \right)$

Q3) $a \in \mathbb{R}$. $B = aI_n + A$. Pour $\forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\hat{x}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta_r \\ \sin(2\theta_r) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_r) \end{pmatrix}$.

$\forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $B\hat{x}_r = a\hat{x}_r + A\hat{x}_r = (a + 2\cos \theta_r)\hat{x}_r$ et $\hat{x}_r \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

Alors $a + 2\cos \theta_1, a + 2\cos \theta_2, \dots, a + 2\cos \theta_n$ sont n valeurs propres réelles dans \mathbb{R} dans des vecteurs de B . Comme $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$:

1) $\text{Sp } B = \{ a + 2\cos \theta_r ; r \in \llbracket 1, n \rrbracket \}$;

2) les sous-espaces propres de B sont de dimension 1.

$\forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $B\hat{x}_r = (a + 2\cos \theta_r)\hat{x}_r$ et $\hat{x}_r \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

Alors $\forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{SEP}(B, a + 2\cos \theta_r) = \text{Vect}(\hat{x}_r) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \sin \theta_r \\ \sin(2\theta_r) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_r) \end{pmatrix} \right)$.

EXERCICE 33

Exercice N1- Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 1.

$E = \mathbb{R}_3[X]$, $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$. f est l'application qui à tout élément P de E associe le reste dans la division de AP par B .

Q0. Rappeler le théorème concernant la division euclidienne des polynômes.

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de E (à faire très proprement).

Q2. Trouver la matrice M de f dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f .

Q3 N1+ Retrouver les résultats de Q2 sans utiliser la matrice de f par des considérations sur les racines des polynômes.

Thème analogue dans LYON 1994 PB 1, EDHEC 2012 ex 3, ECRICOME 2002 ex1.

Q0 $A \in \mathbb{K}[X]$, $B \in \mathbb{K}[X]$ et $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$. Alors il existe un unique couple (Q, R)
d'éléments de $\mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ + R$ et $\deg R < \deg B$.

Q (resp. R) est le quotient (resp. le reste) dans la division de A par B .

Q1 * Soit $P \in E$. $f(P)$ est le reste dans la division de AP par B .

Alors $f(P) \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg f(P) < \deg B = 4$. Soit $f(P) \in \mathbb{R}_3[X]$; $f(P) \in E$.

$\forall P \in E, f(P) \in E$. Soit une application de E dans E .

* Soit $(P_1, P_2) \in E^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\exists (Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$, $AP_1 = Q_1B + f(P_1)$ et $AP_2 = Q_2B + f(P_2)$.

de plus $\deg f(P_1) < \deg B$ et $\deg f(P_2) < \deg B$. Alors :

$A(\lambda P_1 + P_2) = (\lambda Q_1 + Q_2)B + \lambda f(P_1) + f(P_2)$ et $\deg(\lambda f(P_1) + f(P_2)) < \deg B$ car

$\deg f(P_1) < \deg B$ et $\deg f(P_2) < \deg B$.

Alors on peut dire que $\lambda f(P_1) + f(P_2)$ est le reste dans la division de $A(\lambda P_1 + P_2)$

par B . Soit $f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda f(P_1) + f(P_2)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (P_1, P_2) \in E^2, f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda f(P_1) + f(P_2)$. Soit linéaire.

Finalment f est un endomorphisme de E .

Q2 $A \cdot 1 = X^4 \cdot 1 = X^4 - X + X - 1 = 1 \cdot B + X - 1$ et $\deg(X-1) < \deg B$ donc $f(1) = -1 + X$

$A \cdot X = X^5 - X = X^5 - X^2 + X^2 - X = X \cdot B + X^2 - X$ et $\deg(X^2 - X) < \deg B$ donc $f(X) = -X + X^2$

$A \cdot X^2 = X^6 - X^2 = X^6 - X^3 + X^3 - X^2 = X^2 \cdot B + X^3 - X^2$ et $\deg(X^3 - X^2) < \deg B$ donc $f(X^2) = -X^2 + X^3$

$$AX^3 = X^7 - X^3 = X^7 - X^4 + X^4 - X + X - X^3 = (X^3+1)B + X - X^3 \text{ et } \deg(X - X^3) < \deg B.$$

$$\text{d'ac } f(X^3) = X - X^3.$$

Finalment la matrice π de f dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ est
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $P = a + bx + cx^2 + dx^3$ un élément de E .

$$(f - \lambda Id_E)(P) = 0_E \Leftrightarrow (\pi - \lambda Id_4) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1-\lambda)a = 0 \\ a - (1+\lambda)b + d = 0 \\ b - (1+\lambda)c = 0 \\ c - (1+\lambda)d = 0 \end{cases}$$

1^{er} cas.. $\lambda + 1 = 0$ c'est à dire $\lambda = -1$

$$(f - \lambda Id_E)(P) = 0_E \Leftrightarrow \begin{cases} a + d = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -a \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ka } (f - \lambda Id_E) = \{ a + 0x + 0x^2 - ax^3, a \in \mathbb{R} \} = \text{Vect}(1 - X^3) \neq \{0_E\}.$$

Ainsi $-1 \in \text{Sp } f$ et $\text{SEP}(f, -1) = \text{Vect}(1 - X^3)$.

2nd cas.. $\lambda + 1 \neq 0$ c'est à dire $\lambda \neq -1$.

$$(f - \lambda Id_E)(P) = 0_E \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = (1+\lambda)d \\ b = (1+\lambda)c = (1+\lambda)^2 d \\ 0 = 0 - (1+\lambda)b + d = -(1+\lambda)^3 d + d = (1 - (1+\lambda)^3) d. \end{cases}$$

- i) $1 - (1+\lambda)^3 \neq 0$ $(f - \lambda Id_E)(P) = 0_E \Leftrightarrow d = 0, b = 0, c = 0, a = 0 \Leftrightarrow P = 0_E$ λ n'est pas valeur propre de f .
- ii) $1 - (1+\lambda)^3 = 0$. D'ac $(1+\lambda)^3 = 1$. Alors $1 + \lambda = 1$ ($\lambda \in \mathbb{R}$); $\lambda = 0$.

$$(f - \lambda Id_E)(P) = 0_E \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ka } (f - \lambda Id_E) = \{ dx + dx^2 + dx^3, d \in \mathbb{R} \} = \text{Vect}(X + X^2 + X^3) \neq \{0_E\}.$$

Ainsi 0 est valeur propre de f et $\text{SEP}(f, 0) = \text{Vect}(X + X^2 + X^3)$.

Finalment $\text{Sp } f = \{-1, 0\}$, $\text{SEP}(f, -1) = \text{Vect}(1 - X^3)$ et $\text{SEP}(f, 0) = \text{Vect}(X + X^2 + X^3)$.

Remarque.. f n'est pas diagonalisable car $\dim \text{SEP}(f, -1) + \dim \text{SEP}(f, 0) = 2 + 2 = 4 = \dim E$.

Q3) Notons que les zéros de A dans \mathbb{C} sont $1, -1, i$ et $-i$ et les zéros de B dans \mathbb{C} sont $0, 1, j$ et j^2 . Or A et B n'ont qu'un zéro commun : 1 .

Supposons que λ soit une valeur propre de f . Soit $P \in \text{SEP}(f, \lambda)$ et $P \neq 0_{\mathbb{E}}$.

$$f(P) = \lambda P. \exists Q \in \mathbb{R}[X], AP = QB + f(P); AP = QB + \lambda P; (A - \lambda)P = QB$$

$0, 1, j$ et j^2 sont des zéros de B donc de QB donc de $(A - \lambda)P$.

Or $P \neq 0_{\mathbb{E}}$ et $\deg P \leq 3$ donc P ne peut pas admettre pour zéros dans \mathbb{C} $0, 1, j$ et j^2 .

Alors ou $P(0) \neq 0$ ou $P(1) \neq 0$ ou $P(j) \neq 0$ ou $P(j^2) \neq 0$.

Si $P(0) \neq 0$ alors $(A - \lambda)(0) = 0$ donc $\lambda = A(0) = -1$.

Si $P(1) \neq 0$ alors $(A - \lambda)(1) = 0$ donc $\lambda = A(1) = 0$.

Si $P(j) \neq 0$ alors $(A - \lambda)(j) = 0$ donc $\lambda = A(j) = j^4 - 1 = j - 1$; ceci est impossible car $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $P(j^2) \neq 0$ alors $(A - \lambda)(j^2) = 0$ donc $\lambda = A(j^2) = j^8 - 1 = j^2 - 1$; ceci est impossible car $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors plus loin.

Reprenons le cas $P(0) \neq 0$. Alors $\lambda = -1$. Or $A - \lambda = A + 1 = X^4$.

$1, j$ et j^2 ne sont pas des zéros de $A - \lambda$ donc ce sont des zéros de P .

Ainsi $X^3 - 1 = (X - 1)(X - j)(X - j^2)$ divise P et $\deg P \leq 3$.

Alors $\exists c \in \mathbb{R}, P = c(X^3 - 1)$ et $P \in \text{Vect}(X^3 - 1)$

Reprenons le cas $P(0) \neq 0$. Alors $\lambda = 0$. Or $A - \lambda = A$

$0, j$ et j^2 ne sont pas des zéros de $A - \lambda$ donc ce sont des zéros de P .

Ainsi $X(X^2 + X + 1) = X(X - j)(X - j^2)$ divise P et $\deg P \leq 3$.

Alors $\exists d \in \mathbb{R}, P = d(X(X^2 + X + 1))$. $P \in \text{Vect}(X(X^2 + X + 1))$.

Nous venons donc de montrer que :

$$1) \text{ Sp } f \subset \{-1, 0\}$$

2) Si $-1 \in \text{Sp } f$ tout vecteur propre de f associé à -1 appartient à $\text{Vect}(X^3 - 1)$

3) Si $0 \in \text{Sp } f$ tout vecteur propre de f associé à 0 appartient à $\text{Vect}(X(X^2 + X + 1))$

4) la dimension des sous-espaces propres de f n'est pas 1 donc est égale à 3.

calculons $f(x^3-1)$ et $f(x(x^2+x+1))$.

$$A(x^3-1) = (x^4-1)(x^3-1) = x^7 - x^4 - x^3 + 1 = x^3 B + 1 - x^3 \text{ et } \deg(1-x^3) < \deg B.$$

$$\text{Ainsi } f(x^3-1) = -(x^3-1). \text{ Donc } \underline{-1 \in \text{Sp } f} \text{ et } x^3-1 \in \text{SEP}(f, -1).$$

ce qui donne $\text{SEP}(f, -1) = 1$ (d'après ce que nous avons vu plus haut) et $x^3-1 \neq 0 \in E$

$$\text{Ainsi } \underline{\text{SEP}(f, -1) = \text{Vect}(x^3-1) = \text{Vect}(1-x^3)}.$$

$$B = x(x^3-1) = x(x-1)(x^2+x+1)$$

$$A x(x^2+x+1) = (x^4-1)x(x^2+x+1) = (x^3+x^2+x+1)(x-1)x(x^2+x+1) \stackrel{\downarrow}{=} (x^3+x^2+x+1)B.$$

$$\text{Ainsi } f(x(x^2+x+1)) = 0 \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1) \\ \uparrow \\ = x(x^3-1) = B \end{array}$$

$$\text{Comme } x(x^2+x+1) \neq 0 \in E : 0 \in \text{Sp } f \text{ et } x(x^2+x+1) \in \text{SEP}(f, 0).$$

$$\text{Ainsi } \text{SEP}(f, 0) = 1 \text{ ainsi } \text{SEP}(f, 0) = \text{Vect}(x(x^2+x+1)) = \text{Vect}(x+x^2+x^3).$$

$$\text{Finalement } \text{Sp } f = \{-1, 0\}, \text{SEP}(f, -1) = \text{Vect}(1-x^3) \text{ et } \text{SEP}(f, 0) = \text{Vect}(x+x^2+x^3).$$

ce qui nous a permis de retrouver les résultats de Q2.

Exercice.. Reprenons le problème en remplaçant $\mathbb{R}_3[x]$ par $\mathbb{C}_3[x]$.

$$\text{On trouve alors } \text{Sp } f = \{0, -1, j-1, j^2-1\};$$

$$\text{SEP}(f, 0) = \text{Vect}(x+x^2+x^3);$$

$$\text{SEP}(f, -1) = \text{Vect}(1-x^3);$$

$$\text{SEP}(f, j-1) = \text{Vect}(j^2x + jx^2 + x^3);$$

$$\text{SEP}(f, j^2-1) = \text{Vect}(jx + j^2x^2 + x^3).$$

Exercice N1-. Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 2. Contenu dans ESCP 2008 2.12

$$E = \mathbb{R}_n[X]. \forall P \in E, f(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'. \quad n \in \mathbb{Z}, \text{ pas } \bar{\mathbb{Z}}.$$

Q0. Montrer que f est un endomorphisme de E .

Q1. Montrer que $\text{Sp}(f) = \{k(k+1), k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq n\}$ et que f est un endomorphisme diagonalisable de E .

Q2. Montrer que pour tout k dans $\mathbb{Z}, 0 \leq k \leq n$, un vecteur propre associé à la valeur propre $k(k+1)$ est de degré k .

Q3. Montrer que pour tout k dans $\mathbb{Z}, 0 \leq k \leq n$ il existe un polynôme unitaire P_k et un seul appartenant à $\text{SEP}(f, k(k+1))$.

Montrer que (P_0, P_1, \dots, P_n) est une base de $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Q0 • Soit $P \in E$. $(X^2-1)P'' \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\deg((X^2-1)P'') \leq n$ car $\deg P \leq n$.
 $2XP' \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\deg(2XP') \leq n$ car $\deg P \leq n$.

Alors $(X^2-1)P'' \in \mathbb{R}_n[X]$ et $2XP' \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $f(P) = (X^2-1)P'' + 2XP' \in \mathbb{R}_n[X]$. $f(P) \in E$.

$\forall P \in E, f(P) \in E$. f est une application de E dans E .

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(P, Q) \in E^2$.

$$f(\lambda P + Q) = (X^2-1)(\lambda P + Q)'' + 2\lambda(\lambda P + Q)' = (X^2-1)(\lambda P'' + Q'') + 2\lambda(\lambda P' + Q')$$

$$f(\lambda P + Q) = \lambda[(X^2-1)P'' + 2XP'] + (X^2-1)Q'' + 2\lambda Q' = \lambda f(P) + f(Q).$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (P, Q) \in E^2, f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q). \quad \text{f est linéaire.}$$

Ainsi f est un endomorphisme de E .

Q1 $f(1) = 0_E, f(X) = 2X$ et $\forall k \in \mathbb{Z}, 2 \leq k \leq n, f(X^k) = (X^2-1)k(k-1)X^{k-2} + 2kX^{k-1}$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, 2 \leq k \leq n, f(X^k) = k(k-1)X^k - k(k-1)X^{k-2} + 2kX^{k-1}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, 2 \leq k \leq n, f(X^k) = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}$$

Alors la matrice A de f dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3, \dots, X^n)$ est triangulaire supérieure. Ses valeurs propres de A sont ses éléments diagonaux.

$$\text{Alors } \text{Sp} f = \text{Sp} A = \{0\} \cup \{2\} \cup \{k(k+1), k \in \mathbb{Z}, 2 \leq k \leq n\} = \{k(k+1), k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq n\}$$

$$\text{Sp} f = \{k(k+1), k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq n\}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq n, \lambda_k = k(k+1).$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq n-1, \lambda_{k+1} - \lambda_k = (k+1)(k+2) - k(k+1) = 2(k+1) > 0.$$

Alors la suite $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{U}, n \mathbb{U}}$ est strictement croissante.

Ainsi $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont $n+1$ valeurs propres à deux à deux distinctes.

Soit $f \in \mathcal{K}(E)$, où $E = n+1$ et f admet $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes. Alors 1° f est diagonalisable

2° les sous-espaces propres de f sont de dimension 1.

② Soit $k \in \mathbb{U}, n \mathbb{U}$. Soit P un vecteur propre de f associé à la valeur propre $k(k+1)$. Soit $r \in \mathbb{N}$ le degré de P ($P \neq 0_E$) et a_r le coefficient de X^r dans P .
Le coefficient de X^r dans $(X^2-1)P'' + 2X P'$ est $r(r-1)a_r + 2r a_r$
Le coefficient de X^r dans $k(k+1)P$ est $k(k+1)a_r$
Or $(X^2-1)P'' + 2X P' = f(P) = k(k+1)P$.

Alors $r(r-1)a_r + 2r a_r = k(k+1)a_r$. Comme $a_r \neq 0$ on a :

$$r(r-1) + 2r = k(k+1); \quad r(r+1) = k(k+1). \quad \text{Rappelons que } r \in \mathbb{U}, n \mathbb{U}.$$

Ainsi $\lambda_r = \lambda_k$. La suite $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{U}, n \mathbb{U}}$ est strictement croissante donc $r = k$.

Si $k \in \mathbb{U}, n \mathbb{U}$, un vecteur propre de f associé à la valeur propre $k(k+1)$ est de degré k .

③ Soit $k \in \mathbb{U}, n \mathbb{U}$. Posons $D_k = \text{SEP}(f, k(k+1))$. D_k est de dimension 1 (voir ②).

Soit Q un élément non nul de D_k . $D_k = \text{Vect}(Q)$ et $\deg Q = k$ d'après ②.

Soit b_k le coefficient de X^k dans Q . Posons $P_k = \frac{1}{b_k} Q$.

P_k est unitaire, de degré k et $P_k \in D_k$.

Soit P_k est un polynôme unitaire de $\text{SEP}(f, k(k+1))$.

Notons également que $D_k = \text{Vect}(P_k)$. Soit \hat{P}_k un réel polynôme unitaire de D_k .

Alors $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $\hat{P}_k = \alpha P_k$. Or $\deg \hat{P}_k = k = \deg P_k$, \hat{P}_k et P_k sont unitaires.

Alors nécessairement $\alpha = 1$. Soit $\hat{P}_k = P_k$.

Pour tout k dans $\{0, n\}$ il existe un polynôme unitaire P_k et un seul appartenant à $\mathcal{L}(E, \mathbb{R}(k+1))$.

∀ $k \in \{0, n\}$, $\deg P_k = k$. Alors (P_0, P_1, \dots, P_n) est une famille de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de polynômes non nuls échelonnés au degré.

Ainsi (P_0, P_1, \dots, P_n) est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ d'ordre au plus $n+1$ coïncide avec la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.

Alors (P_0, P_1, \dots, P_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ de E .

Exercice N1. Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 3.

n est un élément de $\mathbb{Z}, +\infty[$. $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout P dans E on pose : $f(P) = (X^2 + 1)P'' - 2XP'$.

- Q1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
- Q2. Trouver la matrice de f dans la base canonique de E . En déduire le spectre de f . Déterminer le cardinal de cet ensemble.
- Q3. Montrer que : $\text{Ker } f \subset \mathbb{R}_3[X]$, puis que : $\text{Ker } f = \text{Vect}(1, X^3 + 3X)$. Déterminer $\text{Ker}(f + 2Id_E)$.
- Q4. Montrer que f est diagonalisable.

Q1 • Soit $P \in E$. $\deg P \leq n$.

Alors $(X^2 + 1)P'' \in \mathbb{R}[X]$, $2XP' \in \mathbb{R}[X]$, $\deg((X^2 + 1)P'') \leq n$ et $\deg(2XP') \leq n$.

Or $(X^2 + 1)P'' \in \mathbb{R}_n[X]$ et $2XP' \in \mathbb{R}_n[X]$. $f(P) = (X^2 + 1)P'' - 2XP' \in \mathbb{R}_n[X]$.

$\forall P \in E, f(P) \in E$. f est une application de E dans E .

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(P, Q) \in E^2$.

$$f(\lambda P + Q) = (X^2 + 1)(\lambda P + Q)'' - 2X(\lambda P + Q)' = (X^2 + 1)(\lambda P'' + Q'') - 2X(\lambda P' + Q')$$

$$f(\lambda P + Q) = \lambda((X^2 + 1)P'' - 2XP') + (X^2 + 1)Q'' - 2XQ' = \lambda f(P) + f(Q).$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (P, Q) \in E^2, f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q)$. f est linéaire.

Ainsi f est un endomorphisme de E .

Q2 $f(1) = 0 \in E$. $f(X) = -2X$.

$$\forall h \in \mathbb{Z}, h \geq 2, f(X^h) = (X^2 + 1)h(h-1)X^{h-2} - 2XhX^{h-1} = (h(h-1) - 2h)X^h + h(h-1)X^{h-2}$$

$$\forall h \in \mathbb{Z}, h \geq 2, f(X^h) = h(h-3)X^h + h(h-1)X^{h-2}$$

Pour $\forall h \in \mathbb{Z}, h \geq 0, a_h = h(h-3)$ et $\forall h \in \mathbb{Z}, h \geq 2, b_h = h(h-1)$.

$$f(1) = a_0 \cdot 1, f(X) = a_1 X \text{ et } \forall h \in \mathbb{Z}, h \geq 2, f(X^h) = a_h X^h + b_h X^{h-2}$$

Donc la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ de $E = \mathbb{R}_n[X]$ est

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & b_2 & & (0) \\ & a_1 & 0 & & \\ & & a_2 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & a_n \\ & & & & & b_n \\ & & & & & & a_n \end{pmatrix}$$

avec $\begin{cases} \forall h \in \mathbb{Z}, h \geq 0, a_h = h(h-3) \\ \forall h \in \mathbb{Z}, h \geq 2, b_h = h(h-1) \end{cases}$

A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont les éléments de sa diagonale.

Alors $S_p f = S_p A = \{ \lambda_k ; k \in \{0, n\} \} = \{ k(k-3) ; k \in \{0, n\} \}$. Soit $k \in \{0, n\}$.

Notons que $k(k-3) = \begin{cases} 0 & \text{si } k=0 \\ -2 & \text{si } k=1 \\ -2 & \text{si } k=2 \\ 0 & \text{si } k=3 \end{cases}$.

Alors $S_p f = \{ k(k-3) ; k \in \{2, n\} \}$.

Pour $\forall k \in \{2, n\}$, $\lambda_k = k(k-3)$.

$\forall k \in \{2, n-1\}$, $\lambda_{k+1} - \lambda_k = (k+1)(k-2) - k(k-3) = k^2 - (2k + k - 2) - k^2 + 3k = 2k - 2 = 2(k-1) > 0$.

de suite $(\lambda_k)_{k \in \{2, n\}}$ est strictement croissante.

Ainsi $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ sont $n-1$ valeurs deux à deux distinctes.

donc card $S_p f = n-1$. Par là même !

Q3) soit $k \in \{2, n\}$. Soit $P \in \text{SEP}(f, k(k-3))$ et $P \neq 0_E$.

Prenons $r = \deg P$ et notons a_r le coefficient de x^r dans P .

- $(x^2+1)P'' - 2XP' = k(k-3)P$
- le coefficient de x^r dans $(x^2+1)P'' - 2XP'$ est $r(r-1)a_r - 2ra_r$ donc $r(r-3)a_r$.
- le coefficient de x^r dans $k(k-3)P$ est $k(k-3)a_r$.

Alors $r(r-3)a_r = k(k-3)a_r$. Comme $a_r \neq 0$: $r(r-3) = k(k-3)$.

donc $0 = r^2 - k^2 - 3(r-k) = (r-k)(r+k-3)$; $r=k$ ou $r=3-k$

Notons que si $k=3$: $r=3$ ou 0 et si $k=2$: $r=2$ ou 1 .

Or si $k=3$: $k(k-3)=0$ et si $k=2$: $k(k-3)=-2$.

Alors $\forall P \in \text{SEP}(f, 0)$, $P \neq 0_E \Rightarrow \deg P = 0$ ou 3 ; $K_E f = \text{SEP}(f, 0) \subset \mathbb{R}_3[X]$

$\forall P \in \text{SEP}(f, -2)$, $P \neq 0_E \Rightarrow \deg P = 1$ ou 2 ; $K_E(f + 2Id_E) = \text{SEP}(f, -2) \subset \mathbb{R}_2[X]$.

Remarque .. si $k \in \{4, n\}$, $\forall P \in \text{SEP}(f, k(k-3))$, $P \neq 0_E \Rightarrow \deg P = k$ ($3-k < 0$).

Soit $P = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[X]$

$P \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(P) = 0_E \Leftrightarrow (x^2+1)P'' - 2XP' = 0_E \Leftrightarrow (x^2+1)(2c+6dx) - 2x(b+2cx+3dx^2) = 0_E$

$P \in \text{Ker } f \Leftrightarrow (6d-6d)x^3 - 2cx^2 + (6d-2b)x + 2c = 0_E \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ b=3d \end{cases}$

$\text{Ker } f = \{a + 3dx + dx^3; (a,d) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(1, x^3 + 3x)$

$\dim \text{SEP}(f, 0) = \dim \text{Ker } f = \dim \text{Vect}(1, x^3 + 3x) = 2$ Notons que $\dim \text{SEP}(f, 0) = 2$ car $(1, x^3 + 3x)$ est une famille libre.

Soit $P = a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[X]$

$P \in \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E) \Leftrightarrow -2P = f(P) = (x^2+1)P'' - 2XP'$

$P \in \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E) \Leftrightarrow -2a - 2bx - 2cx^2 = (x^2+1)(2c) - 2x(b+2cx)$

$P \in \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E) \Leftrightarrow -2a - 2bx - 2cx^2 = 2c - 2bx - 2cx^2 \Leftrightarrow c = -a$

(1, x, x^2) est libre

$\text{Ker}(f + 2\text{Id}_E) = \{a + bx - ax^2; (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(1-x^2, x)$

$\dim \text{SEP}(f, -2) = \dim \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E) = \dim \text{Vect}(1-x^2, x) = 2$ car $(1-x^2, x)$ est une famille libre.

Q4) $\dim E \geq \sum_{\lambda \in \text{Sp } f} \dim \text{SEP}(f, \lambda) = \sum_{k=2}^n \dim \text{SEP}(f, \lambda(k-3))$

$\dim E \geq \sum_{\lambda \in \text{Sp } f} \dim \text{SEP}(f, \lambda) = \dim \text{SEP}(f, -2) + \dim \text{SEP}(f, 0) + \sum_{k=4}^n \dim \text{SEP}(f, \lambda(k-3))$

$\dim E \geq \sum_{\lambda \in \text{Sp } f} \dim \text{SEP}(f, \lambda) = 2 + 2 + \sum_{k=4}^n \dim \text{SEP}(f, \lambda(k-3)) \geq 4 + \sum_{k=4}^n 1 = 4 + (n-3) = n+1$

$\dim \text{SEP}(f, \lambda(k-3)) \geq 1$ car $\text{SEP}(f, \lambda(k-3))$

donc $\dim E \geq \sum_{\lambda \in \text{Sp } f} \dim \text{SEP}(f, \lambda) \geq n+1 = \dim E$

n'est pas strictement $\{0_E\}$

Ainsi $\sum_{\lambda \in \text{Sp } f} \dim \text{SEP}(f, \lambda) = \dim E$. est diagonalisable

Remarque... $\forall k \in \llbracket 4, n \rrbracket, \dim \text{SEP}(f, \lambda(k-3)) = 1$

1

EXERCICE 36

Exercice Réduction d'une endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

n est un élément de $[2, +\infty[$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout P dans E on pose

$$f(P) = (X^2 - 1)P' - nXP.$$

- Q1. Prouver que f est un endomorphisme de E (la linéarité est claire).
 - Q2. Soit λ un réel et P un élément non nul de E tels que : $f(P) = \lambda P$.
 - a) Montrer que P est de degré n (on pourra noter r le degré de P et a_r le coefficient du terme de plus haut degré de P).
 - b) Soit α un zéro de P dans \mathbb{C} d'ordre de multiplicité k . Que dire pour P' ? Montrer alors que nécessairement α vaut 1 ou -1.
- En déduire qu'il existe c dans \mathbb{R}^* et p dans $[0, n]$ tels que : $P = c(X - 1)^p(X + 1)^{n-p}$.
- Préciser la dimension de SEP (f, λ) . Exprimer λ en fonction de p et de n . Donner une base de SEP (f, λ) .
- c) Conclure cette première phase.
- Q3. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .

Q1) • Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $(X^2 - 1)P' \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ et $nXP \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ donc $f(P) = (X^2 - 1)P' - nXP \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$. Soit a_n le coefficient de X^n dans P . le coefficient de X^{n+1} dans $(X^2 - 1)P'$ (resp. nXP) est na_n (resp. na_n). donc le coefficient de X^{n+1} dans $f(P)$ est 0. Comme nous savons que $f(P)$ appartient à $\mathbb{R}_n[X]$ nous pouvons dire que $P(P)$ appartient à $\mathbb{R}_n[X]$!

Soit une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ donc de E dans E .

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(P, \varphi) \in E^2$.
 $f(\lambda P + \varphi) = (X^2 - 1)(\lambda P + \varphi)' - nX(\lambda P + \varphi) = (X^2 - 1)(\lambda P' + \varphi') - \lambda nXP - nX\varphi$.
 $f(\lambda P + \varphi) = \lambda [(X^2 - 1)P' - nXP] + [(X^2 - 1)\varphi' - nX\varphi] = \lambda f(P) + f(\varphi)$.

Soit linéaire.
Soit un endomorphisme de E .

Remarque. - Notons que $f(1) = -nX$. Nous ne sommes donc pas dans la situation "deg $f(P) \leq$ deg P ". Ainsi la matrice de f dans la base canonique est par division triangulaire supérieure.

2

Q2) cette question consiste à faire une ANALYSE sur les valeurs propres et les sous-espaces propres de f . Ne retourne plus à faire dans Q3 la SYNTHÈSE.

a) $P \neq 0_E$. Posons $r = \deg P$ et notons a_r le coefficient de x^r dans P .

Le coefficient de x^{r+1} dans $(x^2-1)P'$ est $r a_r$.

Le coefficient de x^{r+1} dans $n x P$ est $n a_r$.

Le coefficient de x^{r+1} dans $1 P$ est 0 .

Ainsi $r a_r - n a_r = 0$. Comme $a_r \neq 0$: $r = n$. deg P = n.

b) α est un zéro de P dans \mathbb{C} d'ordre k dac (à un choix près) α est un zéro de P' d'ordre $k-1$.

$$(P) = 1 P \text{ dac } (x^2-1)P' - n x P = 1 P; \quad (x^2-1)P' = (n x + 1) P.$$

$(x-\alpha)^k$ divise P dac divise $(n x + 1) P$.

Ainsi $(x-\alpha)^k$ divise $(x^2-1)P'$ ce qui signifie que α a part factorielle

$(x-\alpha)^k$ dans $(x^2-1)P'$ ou que α est une racine de $(x^2-1)P'$ d'ordre au moins k .

Supposons que α soit différent de 1 et -1 . Alors α n'est pas racine de x^2-1 .

Donc nécessairement α est une racine d'ordre au moins k de P' . Ceci contredit

le fait que α est une racine de P' d'ordre $k-1$. Nécessairement $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$.

Si α est un zéro de P dans \mathbb{C} d'ordre de multiplicité k : $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$.

$\deg P = n$ dac $\deg P' \geq 1$. Ainsi P est scd de $\mathbb{C}[X]$ (il s'écrit comme produit de polynômes de degré 1). Or 1 et -1 sont les seules racines possibles de P dans \mathbb{C} .

Ainsi $\exists c \in \mathbb{C}, \exists (p, q) \in \mathbb{N}^2, P = c(x-1)^p(x+1)^q.$

$P \neq 0_E$ dac $c \in \mathbb{C}^*$. Plus, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dac $c \in \mathbb{R}^*$.

Ainsi $\exists c \in \mathbb{R}^*, \exists (p, q) \in \mathbb{N}^2, P = c(x-1)^p(x+1)^q.$

3

$\deg P = n$ et $\deg (C(X-1)^p(X+1)^q) = p+q$ (car $C \in \mathbb{R}^*$). Alors $p+q=n$.

A $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ donc $P \in \mathbb{C}[X]$ et $q = n-p$.

$\exists C \in \mathbb{R}^*, \exists P \in \mathbb{C}[X], P = C(X-1)^p(X+1)^{n-p}$

Posons $\forall r \in \mathbb{C}[X], \varphi_r = (X-1)^r(X+1)^{n-r}$.

$P = C \varphi_p$ donc $P \in \text{Vect}(\varphi_p)$.

cela suffit pour dire que $\text{SEP}(P, \lambda) \subset \text{Vect}(\varphi_p)$ car $0_E \in \text{Vect}(\varphi_p)$!

Donc $\dim \text{SEP}(P, \lambda) \leq \dim \text{Vect}(\varphi_p) = 1$
 \uparrow $\text{SEP}(P, \lambda) \neq \{0_E\}$ $\leftarrow \varphi_p \neq 0_E$

Alors $\dim \text{SEP}(P, \lambda) = 1$. puisque $\text{SEP}(P, \lambda) = \text{Vect}(\varphi_p)$.

Soit $r \in \mathbb{C}[X]$. Calculons $f(\varphi_r)$.

$f(\varphi_r) = (X+1)(X+1)^r [r(X-1)^r(X+1)^{n-r} + (n-r)(X-1)^r(X+1)^{n-r-1}] - nX \varphi_r$.

$f(\varphi_r) = r(X-1)^r(X+1)^{n-r}(X+1) + (n-r)(X-1)^r(X+1)^{n-r} - nX \varphi_r$.

$f(\varphi_r) = r(X+1)\varphi_r + (n-r)(X-1)\varphi_r - nX \varphi_r = (rX+r+nX-rX-n+r-nX)\varphi_r$

$f(\varphi_r) = (2r-n)\varphi_r$

Ainsi $\varphi_p \in \text{SEP}(P, \lambda)$ et $f(\varphi_p) = (2p-n)\varphi_p$.

Alors $\lambda \varphi_p = f(\varphi_p) = (2p-n)\varphi_p$ et $\varphi_p \neq 0_E$. Donc $\lambda = 2p-n$.

$\text{SEP}(P, \lambda) = \text{Vect}(\varphi_p)$ et $\varphi_p \neq 0_E$ donc $\varphi_p = (X-1)^p(X+1)^{n-p}$ est une base de

$\text{SEP}(P, \lambda) = \text{SEP}(f, 2p-n)$.

c) Nous avons montré que λ est une valeur propre de f :

$\exists P \in \mathbb{C}[X], \begin{cases} \lambda = 2p-n \\ \text{SEP}(f, \lambda) = \text{SEP}(f, 2p-n) = \text{Vect}(\varphi_p) = \text{Vect}((X-1)^p(X+1)^{n-p}) \end{cases}$

Q3) d'après Q2 $S_p f \subset \mathcal{L}_{p-n}; p \in \mathbb{N}_0, n \geq 1$.

un calcul prémonitoire (!!) dans Q2 nous a montré que :

$$\forall r \in \mathbb{N}_0, f(\mathcal{Q}_r) = (2r-1)\mathcal{Q}_r \text{ et } \forall r \in \mathbb{N}_0, \mathcal{Q}_r \neq 0_E.$$

Alors $\mathcal{L}_{2r-n}; r \in \mathbb{N}_0, n \geq 1 \subset S_p f$.

$$\text{Ainsi } \underline{\underline{S_p f = \mathcal{L}_{p-n}; p \in \mathbb{N}_0, n \geq 1}}.$$

Soit $r \in \mathbb{N}_0$. $2r-n \in S_p f$ et de $\text{SEP}(f, 2r-n) = 1$ d'après Q2.

Comme $f(\mathcal{Q}_r) = (2r-1)\mathcal{Q}_r$ et $\mathcal{Q}_r \neq 0_E$: $\text{SEP}(f, 2r-n) = \text{Vect}(\mathcal{Q}_r)$.

$$\text{Ainsi } \underline{\underline{\forall p \in \mathbb{N}_0, \text{SEP}(f, \mathcal{L}_{p-n}) = \text{Vect}((X-1)^p (X+1)^{n-p})}}.$$

exercice de contrôle .. traiter LYON 1995 PB1.

traiter ESSEC 91 p 8. Ici l'induction et au service de la détermination de la fonction génératrice d'abord de la loi d'une variable aléatoire discrète fixe (même de puzzle).

Exercice

QNP-Oral

n est un élément de \mathbb{N}^* . $E = \mathbb{R}_n[X]$ et A est un élément non nul de E .

f est l'application qui à tout élément P de E associe la dérivée $n^{\text{ème}}$ de AP .

Montrer que f est un endomorphisme de E . f est-il diagonalisable ?

• Soit $P \in E$. $AP \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg AP \leq \deg A + n$.

Alors $(AP)^{(n)} \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg (AP)^{(n)} \leq \deg A + n - n = \deg A \leq n$.

Donc $(AP)^{(n)} \in E$. Par une application de E dans E .

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (P, Q) \in E^2, f(\lambda P + Q) = (A(\lambda P + Q))^{(n)} = (\lambda AP + AQ)^{(n)} = \lambda (AP)^{(n)} + (AQ)^{(n)} = \lambda f(P) + f(Q)$$

Donc f est linéaire. Finalement f est un endomorphisme de E .

• 1^{er} Cas. Supposons que $\deg A < n$. Posons $r = \deg A$. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

$\deg X^k A = k + r$. Ainsi si $k + r < n$: $(X^k A)^{(n)} = 0$ et si $k + r \geq n$:

$$\deg (X^k A)^{(n)} = k + r - n < k \text{ ou } \deg (X^k A)^{(n)} \leq k - 1$$

Donc les degrés des $f(X^k)$ sont $\leq k - 1$ (ce même pour $k = 0$!)

$f(X^0) = 0$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(X^k) \in \mathbb{R}_{k-1}[X] = \text{Vect}(1, X, \dots, X^{k-1})$.

Donc la matrice de f dans la base canonique est triangulaire supérieure et les éléments de sa diagonale sont nuls.

Alors sp $f = \{0\}$. Supposons f diagonalisable. Alors $E = \text{SEV}(f, 0) = \text{Ker } f$.

Donc $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Or $f(X^n) = (X^n A)^{(n)}$ n'est pas nul car $\deg (X^n A) = n + r \dots$ et

$$\deg (X^n A)^{(n)} = r.$$

Ainsi f n'est pas diagonalisable.

• 2^{ème} Cas. Supposons que $\deg A = n$.

$$\exists (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, A = \sum_{i=0}^n a_i X^i \text{ et } a_n \neq 0$$

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

$$(AX^k)^{(n)} = \left(\sum_{i=0}^n a_i X^{i+k} \right)^{(n)} = \sum_{i=0}^n a_i (X^{i+k})^{(n)}$$

$$\text{Alors } (AX^k)^{(n)} = \sum_{i=n-k}^n a_i (i+k)(i+k-1)\dots(i+k-n+1) X^{i+k-n} = \sum_{i=n-k}^n a_i \frac{(i+k)!}{(i+k-n)!} X^{i+k-n}$$

$$(AX^k)^{(n)} = \sum_{\substack{j=0 \\ j=i+k-n}}^k a_{n+j-k} \frac{(n+j)!}{j!} X^j$$

Notons alors que $(AX^k)^{(n)} \in \text{Vect}(1, X, X^2, \dots, X^k)$ et que le coefficient de X^k dans $(AX^k)^{(n)}$ est : $a_n \frac{(n+k)!}{k!}$. Rappelons que $(AX^k)^{(n)} = f(X^k)$.

Dans ces conditions 1° - La matrice A de f dans la base canonique de $E = \mathbb{R}_n[X]$ est une matrice triangulaire supérieure.

2° - L'ensemble des éléments de la diagonale de A est

$$\left\{ a_n \frac{(n+k)!}{k!}, k \in \llbracket 0, n \rrbracket \right\}.$$

$$\text{Ainsi } S_p f = S_p A = \left\{ a_n \frac{(n+k)!}{k!}, k \in \llbracket 0, n \rrbracket \right\}. \text{ Pour } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \alpha_k = a_n \frac{(n+k)!}{k!}.$$

Puisque que $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont deux à deux distincts. Comme $a_n \neq 0$ il suffit de montrer que $\frac{\alpha_0}{a_n}, \frac{\alpha_1}{a_n}, \dots, \frac{\alpha_n}{a_n}$ sont deux à deux distincts.

$$\text{Pour } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \beta_k = \frac{(n+k)!}{k!}. \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \frac{\beta_{k+1}}{\beta_k} = \frac{(n+k+1)!}{(k+1)!} \times \frac{k!}{(n+k)!}.$$

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \frac{\beta_{k+1}}{\beta_k} = \frac{n+k+1}{k+1} = 1 + \frac{n}{k+1} > 1 \text{ et } \beta_k > 0.$$

Donc $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \beta_{k+1} > \beta_k$. $(\beta_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une suite strictement croissante.

Ainsi $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ sont deux à deux distincts. α_k est de même de

$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$. Alors card $S_p f = n+1$ et dim $E = n+1$.

Par conséquent f est diagonalisable.

Enfin f est diagonalisable si et seulement si $\deg A = n$.

Exercice N1. Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 6. D'après oral ESCP 1995 1.5.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\forall P \in \mathbb{R}[X], f(P) = (2X + 1)P + (1 - X^2)P'$.

Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .

Soit P un élément non nul de $\mathbb{R}[X]$ de degré r . Soit a_r le coefficient de x^r dans P . $a_r \neq 0$.

$\deg(2x+1)P = r+1$ et $\deg(1-x^2)P' \leq r+1$. pour le cas où $r=0$!

Alors $\deg f(P) \leq r+1$. Cherchons le coefficient de x^{r+1} dans $f(P)$.

le coefficient de x^{r+1} dans $(2x+1)P$ est $2a_r$.

le coefficient de x^{r+1} dans $(1-x^2)P'$ est $-ra_r$.

Donc le coefficient de x^{r+1} dans $f(P)$ est $(2-r)a_r$.

$(2-r)a_r = 0 \Leftrightarrow r=2$ car $a_r \neq 0$.

Ainsi si $r \neq 2$ $\deg f(P) = r+1$. Si $r=2$ $\deg f(P) \leq r$.

Supposons que'il existe λ dans \mathbb{R} tel que $f(P) = \lambda P$ et que $r \neq 2$.

Alors $\deg f(P) = r+1$ et $\deg \lambda P \stackrel{(\lambda \neq 0 \dots)}{\leq} r$. Donc $r+1 = \deg f(P) = \deg(\lambda P) \leq r$!!

Ainsi n'il existe λ dans \mathbb{R} tel que $f(P) = \lambda P : r=2$. $f(P) = \lambda P$

si P est un vecteur propre de f alors $\deg P = 2$.

Ainsi si $\lambda \in \text{Sp } f : \exists E_P(f, \lambda) \subset \mathbb{R}_2[X]$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $P = a + bx + cx^2$ un élément de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$P \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_{\mathbb{R}[X]}) \Leftrightarrow (2x+1)P + (1-x^2)P' - \lambda P = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

$$P \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_{\mathbb{R}[X]}) \Leftrightarrow (2x+1)(a+bx+cx^2) + (1-x^2)(b+2cx) - \lambda(a+bx+cx^2) = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

$$P \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_{\mathbb{R}[X]}) \Leftrightarrow (a+b-\lambda) + (2a+b+2c-\lambda)x + (b+c-\lambda c)x^2 + (2c-2c)x^3 = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

$$P \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_{\mathbb{R}[X]}) \Leftrightarrow \begin{cases} b - (\lambda - 1)a = 0 \\ 2a + b + 2c - \lambda b = 0 \\ b - (\lambda - 1)c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = (\lambda - 1)a \\ 2a + 2c - (\lambda - 1)b = 0 \\ (\lambda - 1)(a - c) = 0 \end{cases}$$

$$\underline{\text{1}^{\text{er}} \text{ Cas. } \lambda = 1. \text{ } P \in \text{Ker}(\lambda I - f|_{\mathbb{R}[X]}) \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ 2a+2c+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=-a \end{cases}.$$

$$\text{Ker}(\lambda I - f|_{\mathbb{R}[X]}) = \{0 + 0 \cdot x - ax^2; a \in \mathbb{R}\} = \{a(1-x^2); a \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(1-x^2).$$

$$\text{Alors } \underline{\lambda \in \text{Sp } f \text{ et } \text{SEP}(f, \lambda) = \text{Vect}(1-x^2)}$$

$$\underline{\text{2}^{\text{em}} \text{ Cas. } \lambda \neq 1} \quad P \in \text{Ker}(\lambda I - f|_{\mathbb{R}[X]}) \Leftrightarrow \begin{cases} b = (\lambda - 1)a \\ 2a + 2c - (\lambda - 1)b = 0 \\ a \cdot c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = (\lambda - 1)a \\ c = a \\ 4a - (\lambda - 1)a = 0 \end{cases}$$

$$P \in \text{Ker}(\lambda I - f|_{\mathbb{R}[X]}) \Leftrightarrow \begin{cases} b = (\lambda - 1)a \\ c = a \\ 0 = (4 - (\lambda - 1))a = (2 - (\lambda - 1))(2 + \lambda - 1)a = (3 - \lambda)(\lambda + 1)a \end{cases}$$

a) $(3 - \lambda)(\lambda + 1) \neq 0$; c'est à dire $\lambda \notin \{-1, 3\}$.

$$P \in \text{Ker}(\lambda I - f|_{\mathbb{R}[X]}) \Leftrightarrow \begin{cases} b = (\lambda - 1)a \\ c = a \\ a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0 \Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

donc λ n'est pas valeur propre de f .

b) $(3 - \lambda)(\lambda + 1) = 0$; c'est à dire $\lambda \in \{-1, 3\}$.

$$P \in \text{Ker}(\lambda I - f|_{\mathbb{R}[X]}) \Leftrightarrow \begin{cases} b = (\lambda - 1)a \\ c = a \end{cases}$$

$$\text{Ker}(\lambda I - f|_{\mathbb{R}[X]}) = \{a + (\lambda - 1)a x + ax^2; a \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(1 + (\lambda - 1)x + x^2).$$

$$\text{Alors } \underline{\lambda \in \text{Sp } f \text{ et } \text{SEP}(f, \lambda) = \text{Vect}(1 + (\lambda - 1)x + x^2)}.$$

conclusion..

$$\text{Sp } f = \{-1, 1, 3\};$$

$$\text{SEP}(f, -1) = \text{Vect}(1 - 2x + x^2) = \text{Vect}((1-x)^2);$$

$$\text{SEP}(f, 1) = \text{Vect}(1 - x^2);$$

$$\text{SEP}(f, 3) = \text{Vect}(1 + 2x + x^2) = \text{Vect}((1+x)^2).$$

Exercice N1. Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 7. Oral ESCP 2011 2.17.

Q1. a) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $x \neq 1$:

$$Q(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x P(t) dt.$$

b) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X], P \mapsto Q$ ainsi définie est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q2. Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque f^{-1} .

Q3. Écrire la matrice A de f dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ puis calculer son inverse A^{-1} . Les matrices A et A^{-1} sont-elles diagonalisables ?

Q4. a) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine d'un polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$ d'ordre de multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$. Le complexe α est-il racine de $f^{-1}(Q)$? Avec quel ordre de multiplicité ?

b) En déduire les sous-espaces propres de l'endomorphisme f^{-1} puis montrer qu'ils sont aussi les sous-espaces propres de f .

Ce thème est abordé dans ESSEC 1984 MII, ECRICOME 2012 Pb.

On trouve dans ESSEC 1981 MI $P \rightarrow \left[\frac{1}{x-s} \int_s^x P(t) dt \right]$ et même $P \rightarrow \left[\frac{1}{(x-s)^2} \int_s^x \left(\int_s^y P(t) dt \right) dy \right]$.

Q1) a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Soit \hat{P} l'antidérivée de P sur \mathbb{R} qui prend la valeur 0 en 1. $\hat{P} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ et $\hat{P}(1) = 0$. Alors il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\hat{P} = (X-1)Q$. Comme $\deg \hat{P} \leq n+1$ et $\deg (X-1) = 1$: $\deg Q \leq n$.

Ainsi $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, \frac{1}{x-1} \int_1^x P(t) dt = \frac{1}{x-1} [\hat{P}(x) - \hat{P}(1)] = \frac{\hat{P}(x)}{x-1} = \frac{(x-1)Q(x)}{x-1} = Q(x).$$

$$\text{d'ac } \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, Q(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x P(t) dt.$$

Ainsi on a montré l'existence d'un polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout x dans $\mathbb{R} - \{1\}$, $Q(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x P(t) dt$.

Supposons que Q_1 soit un second polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, Q_1(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x P(t) dt.$$

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, (Q_1 - Q)(x) = Q_1(x) - Q(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x P(t) dt - \frac{1}{x-1} \int_1^x P(t) dt = 0$$

$Q_1 - Q$ admet une infinité de racines d'ac $Q_1 - Q = 0$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$. $Q_1 = Q$.

Il existe un unique polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, Q(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x P(t) dt$.

b) • Par définition f est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$.

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, f(\lambda P_1 + P_2)(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x (\lambda P_1 + P_2)(t) dt = \lambda \frac{1}{x-1} \int_1^x P_1(t) dt + \frac{1}{x-1} \int_1^x P_2(t) dt.$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, f(\lambda P_1 + P_2)(x) = \lambda f(P_1)(x) + f(P_2)(x).$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, (f(\lambda P_1 + P_2) - \lambda f(P_1) - f(P_2))(x) = 0.$$

$f(\lambda P_1 + P_2) - \lambda f(P_1) - f(P_2)$ est un polynôme qui admet une infinité de racines.

C'est donc le polynôme nul. Alors $f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda f(P_1) + f(P_2)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (P_1, P_2) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X], f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda f(P_1) + f(P_2)$. f est linéaire.

Ainsi f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

② Soit $P \in \text{Ker } f$. $f(P) = 0_E$. $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, \frac{1}{x-1} \int_1^x P(t) dt = 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, \int_1^x P(t) dt = 0. \quad \forall x \in \mathbb{R}, \int_1^x P(t) dt = 0 \quad (\text{car } \int_1^1 P(t) dt = 0).$$

En dérivant il vient $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 0$. $P = 0_E$.

Alors $\text{Ker } f = \{0_E\}$. f est donc un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}_n[X]$ qui

est de dimension finie. Donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

f est une application bijective de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Posons $S = f^{-1}(P)$. $f(S) = P$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1 \Rightarrow P(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x S(t) dt.$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, (x-1)P(x) = \int_1^x S(t) dt.$$

Recap $\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)P(x) = \int_1^x S(t) dt$. En dérivant on obtient :

$$f^{-1}(P)(x) = S(x) = P(x) + (x-1)P'(x). \quad \text{Alors } f^{-1}(P) = P + (x-1)P'.$$

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], f^{-1}(P) = P + (X-1)P'$

(Q3) soit $k \in \mathbb{N}$. Posons $H_k = \int (X^k)$.

$\forall k \in \mathbb{N}, H_k(x) = \frac{1}{k+1} \int_1^x t^k dt = \frac{1}{k+1} \frac{x^{k+1} - 1}{x-1}$.

1^{er} cas $k=0$ $\forall k \in \mathbb{N}, H_0(x) = 1$; $\forall k \in \mathbb{N}, H_0-1 = 0$. H_0-1 admet une infinité de racines.
de même que $H_0-1 = 0 \Rightarrow H_0 = 1$.

2^{em} cas $k \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}, H_k(x) = \frac{1}{k+1} \frac{1}{x-1} (k+1) \sum_{i=0}^k x^i = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k x^i$
 $\forall k \in \mathbb{N}, H_k(x) - \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k x^i = 0$.

Ainsi $H_k = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k x^i$ est un polynôme qui admet une infinité de racines.

Alors $H_k = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k x^i = 0 \in \mathbb{R}_n[X]$. $H_k = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k x^i$. Notons que ceci vaut aussi

pour $k=0$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}, f^{-1}(X^k) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k X^i$. Posons $\forall k \in \mathbb{N}, a_k = \frac{1}{k+1}$.

Alors la matrice de f dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ est
 $\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_n \end{pmatrix} = A!$

$f^{-1}(1) = 1 + (X-1)0 \in \mathbb{R}_n[X] = 1$

$\forall k \in \mathbb{N}, f^{-1}(X^k) = X^k + (X-1)kX^{k-1} = (k+1)X^k - kX^{k-1}$

ou $A^{-1} = \prod_{(1, X, \dots, X^n)} (f^{-1})$ car $A = \prod_{(1, X, \dots, X^n)} (f)$.

donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & n+1 \end{pmatrix}$.

la matrice A (resp. A^{-1}) est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.

Alors $\text{Sp} A = \{ \frac{1}{k}; k \in \{1, \dots, n+1\} \}$ et $\text{Sp} A^{-1} = \{ k; k \in \{1, \dots, n+1\} \}$.

$A \in \Pi_{n+1}(\mathbb{R})$ (resp. $A^{-1} \in \Pi_{n+1}(\mathbb{R})$) et A (resp. A^{-1}) admet $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes. Ainsi A (resp. A^{-1}) est diagonalisable.

A et A^{-1} sont diagonalisables.

Remarque .. f et f' sont diagonalisables, $\text{Sp} f = \{ \frac{1}{k}; k \in \{1, \dots, n+1\} \}$ et $\text{Sp} f' = \{ k; k \in \{1, \dots, n+1\} \}$.

Ⓞ a) soit $\varphi \in \mathbb{R}_n[X]$ et soit α un élément de \mathbb{C} .

Supposons que α soit un zéro de φ d'ordre de multiplicité k .

$\exists S \in \mathbb{R}[X], \varphi = (X-\alpha)^k S$ et $S(\alpha) \neq 0$.

$f'(\varphi) = \varphi + (X-1)\varphi' = (X-\alpha)^k S + (X-1)[k(X-\alpha)^{k-1}S + (X-\alpha)^k S']$.

$f'(\varphi) = (X-\alpha)^{k-1} T$ avec $T = (X-\alpha)S + k(X-1)S + (X-1)(X-\alpha)S'$.

$T(\alpha) = k(\alpha-1)S(\alpha)$. Or $k \in \mathbb{N}^*$ et $S(\alpha) \neq 0$ donc $T(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

1^{er} cas .. $k \neq 1$. Alors $f'(\varphi) = (X-\alpha)^{k-1} T$ avec $T(\alpha) \neq 0$.

si $k=1$: α n'est pas un zéro de $f'(\varphi)$.

si $k \geq 2$: α est un zéro de $f'(\varphi)$ d'ordre de multiplicité $k-1$.

2^{ème} cas .. $\alpha = 1$. $f'(\varphi) = (X-1)^{k-1} [(X-1)S + k(X-1)S + (X-1)^2 S']$.

$f'(\varphi) = (X-1)^k [(k+1)S + (X-1)S']$

$f'(\varphi) = (X-1)^k \tilde{T}$ avec $\tilde{T} = (k+1)S + (X-1)S'$.

$\tilde{T}(1) = (k+1)S(1) = (k+1)S(\alpha) \neq 0$.

Alors α est un zéro de $f'(\varphi)$ d'ordre de multiplicité k .

condition... $\varphi \in \mathbb{R}_n[x]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. α est un zéro de φ d'ordre de multiplicité k .

- si $\alpha \neq 1$ et $k=1$: α n'est pas un zéro de $\varphi^{-1}(\varphi)$.
- si $\alpha \neq 1$ et $k \geq 2$: α est un zéro de $\varphi^{-1}(\varphi)$ d'ordre $k-1$.
- si $\alpha=1$: α est un zéro de $\varphi^{-1}(\varphi)$ d'ordre k .

b) Rappelons que f^{-1} admet $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes et que f^{-1} est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ qui est de dimension $n+1$.

Ainsi les sous-espaces propres de f^{-1} sont de dimension 1.

Rappelons aussi que $SP f^{-1} = \{1, 2, \dots, n+1\}$.

Nous avons déjà vu que $f^{-1}(1) = 1$ comme dans $SEP(f^{-1}, 1) = 1 : SEP(f^{-1}, 1) = \text{Vect}(1)$.

soit $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$. Soit P un élément non nul de $SEP(f^{-1}, k)$. $SEP(f^{-1}, k) = \text{Vect}(P)$.

Si P est constant égal à a : $f^{-1}(P) = P + (X-1)P' = a$ et $kP = ka$.

comme $f^{-1}(P) = kP$: $a = ka$. Or $k \geq 2$ donc $a = 0$. Alors $P = 0_{\mathbb{R}_n[x]}$!!

Ainsi P n'est pas constant. P admet au moins un zéro α dans \mathbb{C} . Soit k' son ordre de multiplicité.

$k' \neq 0$ donc α est un zéro de $k'P$ d'ordre de multiplicité k' .

Ainsi α est un zéro de $f^{-1}(P)$ d'ordre de multiplicité k' .

d'après a) ceci exige que $\alpha = 1$.

Ainsi, dans \mathbb{C} , 1 est le seul zéro possible de P .

P n'est pas constant, il est nul de dans $\mathbb{C}[x]$. Comme 1 est son seul zéro possible :

$$\exists c \in \mathbb{R}^n, \exists r \in \llbracket 1, n \rrbracket, P = c(X-1)^r$$

$$\uparrow P \in \mathbb{R}_n[x] \text{ et } P \neq 0_{\mathbb{R}_n[x]}$$

de plus $k'c(X-1)^r = k'P = f^{-1}(P) = P + (X-1)P' = c(X-1)^r + (X-1)[c r(X-1)^{r-1}]$. Alors :

$$k'c(X-1)^r = c(r+1)(X-1)^r, c \neq 0 \text{ et } (X-1)^r \neq 0_{\mathbb{R}_n[x]}. \text{ Donc } k' = r+1; r = k'-1.$$

Finalement $P = c(x-1)^{k-1}$ avec $c \in \mathbb{R}^p$.

Alors $\text{SEP}(f^{-1}, \mathbb{R}) = \text{Vect}(c(x-1)^{k-1}) = \text{Vect}((x-1)^{k-1})$.

Noter que ce résultat vaut aussi pour $k=1$.

Soit $f^{-1} = \{k; k \in \mathbb{I}_{1, n+1}\}$ et $\forall k \in \mathbb{I}_{1, n+1}, \text{SEP}(f^{-1}, \mathbb{R}) = \text{Vect}((x-1)^{k-1})$.

Soit $k \in \mathbb{I}_{1, n+1}$ et soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$

$$f(P) = \frac{1}{k} P \Leftrightarrow P = f^{-1}\left(\frac{1}{k} P\right) = \frac{1}{k} f^{-1}(P) \Leftrightarrow f^{-1}(P) = kP$$

$$\text{Soit } P \in \text{SEP}\left(f, \frac{1}{k}\right) \Leftrightarrow P \in \text{SEP}(f^{-1}, k).$$

$$\text{Alors } \text{SEP}\left(f, \frac{1}{k}\right) = \text{SEP}(f^{-1}, k).$$

$$\text{Pour tout } k \in \mathbb{I}_{1, n+1}, \text{SEP}\left(f, \frac{1}{k}\right) = \text{SEP}(f^{-1}, k) = \text{Vect}((x-1)^{k-1}).$$

ce qui répond à la question avec $\text{SV } f = \left\{\frac{1}{k}; k \in \mathbb{I}_{1, n+1}\right\}$ et $\text{SP } f^{-1} = \{k; k \in \mathbb{I}_{1, n+1}\}$.

Exercice N1. Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 8. Oral ESCP 1998 2-2.

E est l'espace vectoriel des applications polynômiales de \mathbb{R}^{+*} dans \mathbb{R} de degré au plus 4.

$$\forall P \in E, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \Phi(P)(x) = P(x) + 2x^4 P\left(\frac{1}{x}\right).$$

Q1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E .

Q2. Exprimer Φ^2 en fonction de Φ et Id_E . Qu'en déduire pour les valeurs propres de Φ ?

Q3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Φ .

On trouve dans EDHEC 2009 ex 3 $P \rightarrow X^{2n+1} P\left(\frac{1}{X}\right)$ dans $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$

• Soit $P \in E$. $\exists (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^5, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $P(x) = \sum_{k=0}^4 a_k x^k$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\Phi(P)(x) = \sum_{k=0}^4 a_k x^k + 2x^4 \sum_{k=0}^4 a_k \frac{1}{x^k} = \sum_{k=0}^4 a_k x^k + 2 \sum_{k=0}^4 a_k x^{4-k}$$

$$\Phi(P)(x) = \sum_{k=0}^4 a_k x^k + 2 \sum_{k=0}^4 a_{4-k} x^k = \sum_{k=0}^4 (a_k + 2a_{4-k}) x^k.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Phi(P)(x) = \sum_{k=0}^4 (a_k + 2a_{4-k}) x^k. \text{ Ainsi } \Phi(P) \in E.$$

$\forall P \in E, \Phi(P) \in E$. Φ est une application de E dans E .

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(P, Q) \in E^2$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Phi(\lambda P + Q)(x) = (\lambda P + Q)(x) + 2x^4 (\lambda P + Q)\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Phi(\lambda P + Q)(x) = \lambda P(x) + Q(x) + \lambda 2x^4 P\left(\frac{1}{x}\right) + 2x^4 Q\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Phi(\lambda P + Q)(x) = \lambda (P(x) + 2x^4 P\left(\frac{1}{x}\right)) + Q(x) + 2x^4 Q\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Phi(\lambda P + Q)(x) = \lambda \Phi(P)(x) + \Phi(Q)(x) = (\lambda \Phi(P) + \Phi(Q))(x).$$

$$\text{Donc } \Phi(\lambda P + Q) = \lambda \Phi(P) + \Phi(Q)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (P, Q) \in E^2, \Phi(\lambda P + Q) = \lambda \Phi(P) + \Phi(Q); \text{ Φ est linéaire.$$

Ainsi Φ est un endomorphisme de E .

Q2) Soit P un élément de E .

$$\Phi(P)(x) = P(x) + 2x^4 P\left(\frac{1}{x}\right) \text{ pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}_+^*. \text{ donc :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Phi(\Phi(P))(x) = P(x) + 2x^4 P\left(\frac{1}{x}\right) + 2x^4 \left(P\left(\frac{1}{x}\right) + 2\left(\frac{1}{x}\right)^4 P\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) \right).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^0, \varphi^2(P)(x) = P(x) + 2x^4 P(\frac{1}{x}) + 2x^4 P(\frac{1}{x}) + 4P(x).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^0, \varphi^2(D)(x) = 2[P(x) + 2x^4 P(\frac{1}{x})] + 3P(x) = 2\varphi(D)(x) + 3P(x).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^0, \varphi^2(P)(x) = (2\varphi(P) + 3P)(x). \text{ Ainsi } \varphi^2(P) = 2\varphi(P) + 3P.$$

$$\forall P \in E, \varphi^2(P) = 2\varphi(P) + 3P = (2\varphi + 3\text{Id}_E)(P).$$

Alors $\varphi^2 = 2\varphi + 3\text{Id}_E$. On en déduit que $\text{Sp } \varphi \subset \{-1, 3\}$. Voir plus bas!

Ⓠ $\chi^2 - 2\chi - 3$ est un polynôme annulateur de φ et ses racines sont -1 et 3 .

Alors $\text{Sp } \varphi \subset \{-1, 3\}$. Regardons donc si -1 et 3 sont des valeurs propres de φ .

Prenons $\forall k \in \{0, 4\}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^0$, $e_k(x) = x^k$. $B = (e_0, e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de E
 soit P un élément de E et $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ ses coordonnées dans B

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^0, P(x) = \sum_{k=0}^4 a_k x^k. \text{ Alors } \forall x \in \mathbb{R}_+^0, \varphi(P)(x) = \sum_{k=0}^4 (a_k + 2a_{4-k}) x^k \text{ comme}$$

$$\text{nous l'avons vu plus haut. Ainsi } \varphi(P) = \sum_{k=0}^4 (a_k + 2a_{4-k}) e_k.$$

$$P \in \text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E) \Leftrightarrow \varphi(P) = -P \Leftrightarrow \sum_{k=0}^4 (a_k + 2a_{4-k}) e_k = - \sum_{k=0}^4 a_k e_k.$$

Or $(e_0, e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de E donc :

$$P \in \text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E) \Leftrightarrow \forall k \in \{0, 4\}, a_k + 2a_{4-k} = -a_k \Leftrightarrow \forall k \in \{0, 4\}, a_{4-k} = -a_k.$$

$$P \in \text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E) \Leftrightarrow \begin{cases} a_4 = -a_0 \\ a_3 = -a_1 \\ a_2 = -a_2 \\ a_1 = -a_3 \\ a_0 = -a_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_3 = -a_1 \\ a_4 = -a_0 \end{cases}$$

$$\text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E) = \{ a_0 e_0 + a_1 e_3 - a_1 e_3 - a_0 e_4 ; (a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2 \} = \text{Vect}(e_0 - e_4, e_3 - e_3).$$

$$\text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E) = \text{Vect}(e_0 - e_4, e_3 - e_3). \text{ -1 est valeur propre de } \varphi \text{ et } \text{SEP}(\varphi, -1) = \text{Vect}(e_0 - e_4, e_3 - e_3).$$

$$P \in \text{Ker}(\varphi - 3\text{Id}_E) \Leftrightarrow \varphi(P) = 3P \Leftrightarrow \sum_{k=0}^4 (a_k + 2a_{4-k}) e_k = 3 \sum_{k=0}^4 a_k e_k$$

$$P(\text{Ker}(\varphi - 3\text{Id}_E)) \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R}, a_k + 2a_{4-k} = 3a_k \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R}, a_{4-k} = a_k.$$

$$P(\text{Ker}(\varphi - 3\text{Id}_E)) \Leftrightarrow \begin{cases} a_4 = a_0 \\ a_3 = a_1 \\ a_2 = a_2 \\ a_1 = a_3 \\ a_0 = a_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_3 = a_1 \\ a_4 = a_0 \end{cases}.$$

$$\text{Ker}(\varphi - 3\text{Id}_E) = \{ a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 ; (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \}.$$

$$\text{Ker}(\varphi - 3\text{Id}_E) = \text{Vect}(e_0 + e_4, e_1 + e_3, e_2).$$

Alors 3 est une valeur propre de φ et $\text{SEP}(\varphi, 3) = \text{Vect}(e_0 + e_4, e_1 + e_3, e_2)$.

Conclusion... Sp $\varphi = \{-1, -1, 3\}$. $\text{SEP}(\varphi, -1) = \text{Vect}(e_0 - e_4, e_1 - e_3)$ et

$$\text{SEP}(\varphi, 3) = \text{Vect}(e_0 + e_4, e_1 + e_3, e_2).$$

Remarque... Il n'est pas difficile de voir (et de vérifier) que $(e_0 - e_4, e_1 - e_3)$ et $(e_0 + e_4, e_1 + e_3, e_2)$ sont des familles libres.

Alors $\dim \text{SEP}(\varphi, -1) = 2$ et $\dim \text{SEP}(\varphi, 3) = 3$.

Donc $\dim \text{SEP}(\varphi, -1) + \dim \text{SEP}(\varphi, 3) = 5 = \dim E = \dim \mathbb{R}^5$.

Ainsi φ est diagonalisable.

On peut choisir $B' = (e_0 - e_4, e_1 - e_3, e_0 + e_4, e_1 + e_3, e_2)$ et une base de E constituée de vecteurs propres de φ respectivement associés aux valeurs propres $-1, -1, 3, 3, 3$.

soit P la matrice de passage de $B \subset B'$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ P est inversible comme matrice de passage.}$$

$$P^{-1} \Pi_B(\varphi) P = \text{Diag}(-1, -1, 3, 3, 3).$$

Exercice... Vérifier que $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$