
EXERCICE 41 N1. Éléments propres d'un endomorphisme de polynômes 9. LYON 1990 MI
Pb 1.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 ; E désigne l'espace vectoriel sur \mathbb{R} des fonctions polynômiales de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de degré inférieur ou égal à n .

Pour tout entier k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, μ_k est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $\forall t \in \mathbb{R}, \mu_k(t) = t^k$.

Q1 Montrer que, pour tout entier k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, l'intégrale $\int_{-\infty}^0 t^k e^t dt$ est convergente.

Q2 Soit f un élément de E . Montrer que l'on peut définir une fonction g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par :

$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x f(t) e^t dt$. Cette fonction g dépend de f et est notée $L(f)$.

Q3 a) Calculer $L(\mu_0)$, $L(\mu_1)$, $L(\mu_2)$.

b) Montrer que, pour tout entier k de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$: $L(\mu_{k+1}) = \mu_{k+1} - (k+1)L(\mu_k)$.

En déduire que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, L(\mu_k) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!} \mu_j$.

c) Montrer que, pour tout élément f de E , $L(f)$ appartient à E .

On considère l'application $L : f \mapsto L(f)$ de E vers E .

La question Q4 a) du texte.

Q4 a) Montrer que L est une application linéaire et injective.

Ma question Q4 a).

Montrer que L est un endomorphisme de E . Montrer que L est injectif puis bijectif et déterminer L^{-1} .

b) Écrire la matrice M représentant l'endomorphisme L de E dans la base $(\mu_k)_{0 \leq k \leq n}$.

Justifier l'inversibilité de M et écrire M^{-1} .

La question Q5 du texte.

Q5 a) Soient λ une valeur propre de L , et f un vecteur propre de L associé à la valeur propre λ .

Montrer que λ est non nul et que, pour tout réel x , $(1-\lambda)f(x) = \lambda f'(x)$.

Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = e^{\frac{\lambda-1}{\lambda}x} f(x)$.

Montrer que φ est constante.

b) En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de L . Est-ce que L est diagonalisable ?

Ma question Q5 !

Montrer, sans calcul que 1 est la seule valeur propre de L . Montrer que le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par μ_0 .

Q1. Soit $k \in \mathbb{N}$. $t \mapsto t^k e^t$ est continue donc localement intégrable sur $] -\infty, 0]$.

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (t^k t^k e^t) = 0 ; \exists A \in \mathbb{R}^+, \forall t \in] -\infty, A], |t^k t^k e^t| \leq 1$$

$$\forall t \in] -\infty, A], 0 \leq |t^k e^t| \leq \frac{1}{t^2}$$

$$\text{à } \int_{-\infty}^A \frac{dt}{t^2} \text{ converge ; par conséquent : } \int_{-\infty}^A |t^k e^t| dt \text{ converge (règles de comparaison}$$

pour les intégrales généralisées de fonctions positives).

Donc $\int_{-\infty}^A t^k e^t dt$ est absolument convergente donc convergente.

Par conséquent : $\int_{-\infty}^0 t^k e^t dt$ existe pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Q2. Soit f un élément de $E = \mathbb{R}_n[x]$. $\exists (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $f = \sum_{k=0}^n a_k f_k$
 f_k est continue sur \mathbb{R} . Donc $t \mapsto f_k(t) e^t$ est continue sur \mathbb{R} .

Par conséquent : $\int_0^x f_k(t) e^t dt$ existe pour tout réel x .

$$\forall t \in] -\infty, 0], f(t) e^t = \sum_{k=0}^n a_k (t^k e^t), \text{ comme pour tout } k \in \mathbb{N}, \int_{-\infty}^0 t^k e^t dt \text{ existe ;}$$

$$\int_{-\infty}^0 \left(\sum_{k=0}^n a_k (t^k e^t) \right) dt \text{ aussi ! } \int_{-\infty}^0 f(t) e^t dt \text{ converge.}$$

Par conséquent pour tout réel x , $\int_{-\infty}^x f(t) e^t dt$ existe ; $x \mapsto e^{-x} \int_{-\infty}^x f(t) e^t dt$ est
donc une fonction définie sur \mathbb{R} .

$$Q3 a) \text{ Soit } x \in \mathbb{R}. L(f_0)(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x e^t dt = e^{-x} \lim_{A \rightarrow -\infty} \left(\int_A^x e^t dt \right) = e^{-x} \lim_{A \rightarrow -\infty} (e^x - e^A) = e^{-x} e^x = 1$$

$$\underline{L(f_0) = 1.}$$

$$\hookrightarrow \int_{-\infty}^x t e^t dt = e^x$$

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}. \int_{-\infty}^x t e^t dt = \lim_{A \rightarrow -\infty} \left(\int_A^x t e^t dt \right) = \lim_{A \rightarrow -\infty} \left[[t e^t]_A^x - \int_A^x e^t dt \right] = x e^x - e^x$$

$$\text{Donc } L(f_1)(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x t e^t dt = x - 1 ; \underline{L(f_1) = -f_0 + f_1}$$

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}. \int_{-\infty}^x t^2 e^t dt = \lim_{A \rightarrow -\infty} \left(\int_A^x t^2 e^t dt \right) = \lim_{A \rightarrow -\infty} \left[[t^2 e^t]_A^x - 2 \int_A^x t e^t dt \right] = x^2 e^x - 2 \int_{-\infty}^x t e^t dt$$

$$\int_{-\infty}^x t^2 e^t dt = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) = (x^2 - 2x + 2) e^x$$

$$L(y_2)(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x t^2 e^t dt = (x^2 - 2x + 2). \quad \underline{\underline{L(y_2) = 2y_0 - 2y_1 + y_2}}$$

b) soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Soit } A \in]-\infty, 0]. \quad \int_A^x t^{k+1} e^t dt = [t^{k+1} e^t]_A^x - \int_A^x (k+1)t^k e^t dt = x^{k+1} e^x - A^{k+1} e^A - (k+1) \int_A^x t^k e^t dt$$

En faisant tendre $A \rightarrow -\infty$ on obtient : $\int_{-\infty}^x t^{k+1} e^t dt = x^{k+1} e^x - (k+1) \int_{-\infty}^x t^k e^t dt$ (les
intégrales convergent)

En multipliant par e^{-x} on obtient : $L(y_{k+1})(x) = x^{k+1} - (k+1)L(y_k)(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, L(y_{k+1})(x) = y_{k+1}(x) - (k+1)L(y_k)(x) = (y_{k+1} - (k+1)L(y_k))(x).$$

$$\text{Donc : } \underline{\underline{\forall k \in \mathbb{N}, L(y_{k+1}) = y_{k+1} - (k+1)L(y_k)}}.$$

on déduit en que $L(y_k) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!} y_j$ (pour tout $k \in \mathbb{N}$, comme ça de conceptuel !)

si $k=0$ c'est clair ; supposons $k \in \mathbb{N}$.

$$\forall j \in \mathbb{N}, L(y_{j+1}) = y_{j+1} - (j+1)L(y_j).$$

$$\forall j \in \mathbb{N}, \frac{L(y_{j+1})}{(j+1)!} + \frac{L(y_j)}{j!} = \frac{y_{j+1}}{(j+1)!} \quad (\text{divisons par } (j+1)!).$$

$$\forall j \in \mathbb{N}, \frac{(-1)^{j+1} L(y_{j+1})}{(j+1)!} - \frac{(-1)^j L(y_j)}{j!} = \frac{(-1)^{j+1} y_{j+1}}{(j+1)!} \quad (\text{multiplication par } (-1)^{j+1}).$$

$$\text{Donc : } \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{(-1)^{j+1} L(y_{j+1})}{(j+1)!} - \frac{(-1)^j L(y_j)}{j!} \right) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^{j+1} y_{j+1}}{(j+1)!}.$$

$$\text{Or : } \frac{(-1)^{k-1} L(y_k)}{k!} - \frac{(-1)^0 L(y_0)}{0!} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^{j+1} y_{j+1}}{(j+1)!} = \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^j y_j}{j!}.$$

$$\text{Donc on a } \frac{(-1)^k L(y_k)}{k!} = y_0 + \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^j y_j}{j!} = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j y_j}{j!}.$$

$$\text{Donc } L(y_k) = \frac{k!}{(-1)^k} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!} y_j$$

Et finalement $L(y_k) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!} y_j$ et ceci pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Remarque... s'obtient aussi à l'aide d'une petite récurrence.

c) Soit $f = \sum_{k=0}^n a_k y_k \in E$.

Toutes les intégrales convergent.

$$\forall x \in \mathbb{R}, L(f)(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x \sum_{k=0}^n a_k y_k(t) e^t dt = \sum_{k=0}^n a_k e^{-x} \int_{-\infty}^x y_k(t) e^t dt = \left(\sum_{k=0}^n a_k L(y_k) \right)(x)$$

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, L(y_k) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!} y_j \in E$$

$$\text{Donc } L(f) = \sum_{k=0}^n a_k L(y_k) \in E$$

$$\underline{\underline{\forall f \in E, L(f) \in E.}}$$

Q4. a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f, g) \in E^2$. Toutes les intégrales convergent.

$$\forall x \in \mathbb{R}, [L(\lambda f + g)](x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x (\lambda f(t) + g(t)) e^t dt = \lambda e^{-x} \int_{-\infty}^x f(t) e^t dt + e^{-x} \int_{-\infty}^x g(t) e^t dt$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, [L(\lambda f + g)](x) = \lambda L(f)(x) + L(g)(x) = (L(\lambda f + L(g)))(x).$$

$$\underline{\underline{\text{Donc } L(\lambda f + g) = \lambda L(f) + L(g)}}$$

Donc L est un endomorphisme de E

$$\text{Soit } f \in \text{Ker } L. \forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} \int_{-\infty}^x f(t) e^t dt = 0; \forall x \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^x f(t) e^t dt = 0.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^0 f(t) e^t dt + \int_0^x f(t) e^t dt = 0.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x f(t) e^t dt = - \int_{-\infty}^0 f(t) e^t dt; x \mapsto \int_0^x f(t) e^t dt \text{ est donc constante sur } \mathbb{R} \text{ et est la}$$

primitive de $f(t) e^t$ qui s'annule en 0, donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) e^x = 0$ (la dérivée d'une fonction constante est nulle). Par conséquent: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$. $f = 0_E$.

Donc $\text{Ker } L = \{0_E\}$.

L est alors injectif et donc bijectif car L est un endomorphisme de E et $\dim E = n+1 < +\infty$!

Remarque... Auétnos nous quelques instants pour stigmatiser le côté artificiel et BIVON de cet exercice.

De quoi parle-t-on? De pas grand chose! En effet déterminer L^{-1} soit $g \in E$ et $f = L^{-1}(g)$.

$$g = L(f). \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x f(t) e^t dt; \forall x \in \mathbb{R}, e^x g(x) = \int_{-\infty}^x f(t) e^t dt$$

écrits; $\forall x \in \mathbb{R}, e^x g'(x) + e^x g(x) = f(x) e^x$
 et on a $f(x) = g'(x) + g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc $\forall g \in E, L'(g) = g + g'$. En fait $L' = Id_E + D$ où D est l'opérateur de dérivation ! Indiquant non ! non le plus beau est à venir.

b) Rappelons que $\forall k \in \mathbb{N}, L(y_k) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!} y_j$

Donc si $B = (y_0, y_1, \dots, y_n)$: $\pi = \pi_B(B) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \dots & (-1)^k k! & \dots & (-1)^n n! \\ 0 & 1 & -2 & \dots & (-1)^{k+1} (k+1)! & \dots & (-1)^{n+1} (n+1)! \\ 0 & 0 & 2 & \dots & (-1)^{k+2} (k+2)! & \dots & (-1)^{n+2} (n+2)! \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ 0 & & & & & & 0 \end{bmatrix}$

Notons bien que $\pi \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.
 π est une matrice triangulaire supérieure
 dont la diagonale est constituée de 1

Ceci donne donc de l'inversibilité à π ce qui était déjà clair car π est la matrice d'un automorphisme de E !

$\pi^{-1} = \pi_B(L')$. $L'(y_0) = y_0$ car $L(y_0) = y_0$
 soit $k \in \mathbb{N}, L(y_{k+1}) = y_{k+1} - (k+1)L(y_k)$ donc
 $\forall k \in \mathbb{N}, y_{k+1} = L'(y_{k+1}) - (k+1)y_k$
 $\forall k \in \mathbb{N}, L'(y_{k+1}) = y_{k+1} + (k+1)y_k = (k+1)y_k + y_{k+1}$
 Ceci donne $\forall k \in \mathbb{N}, L'(y_k) = k y_{k-1} + y_k$.

Ceci confirme le $L' = Id_E + D$!

$\pi^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & (0) \\ 0 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & n \end{bmatrix}$ (matrice triangulaire à diagonale unité... par supérieurs... π ...)

Exercice .. Inverse π^{-1} et résoudre un système (réponse : mettez π !! non la résolution du système et intégralement à mettre à jour).

PS.. L'apothéose ! Comrade concepleur l'algèbre LINEAIRE n'est pas compatible avec l'usage immodéré de la bombe

En effet Φ b) donne $\text{Spec}(\pi) = \{1\}$. Alors si π est diagonalisable,

π est semblable à $I_{n,n}$ d'ac égale à $I_{n,n}$ ($P I_{n,n} P^{-1} = I_{n,n}$!!) ce qui n'est pas !
D'ac π n'est pas diagonalisable. L ne l'est pas davantage.

Mais résoudre une équation différentielle pour prouver cela est invivable.

Mais... spéculons un peu !

a) $\lambda \in \text{Spec } L$ et f est un vecteur propre de L associé à λ .

$0 \notin \text{Spec } L$ car L est injective ($\text{Ker}(f - 0 \cdot \text{Id}_E) = \text{Ker } f = \{0_E\}$).

$L(f) = \lambda f$. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \int_0^x f(t) e^t dt = \lambda f(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x f(t) e^t dt = \lambda e^x f(x)$. Par dérivation (déjà justifiée) :

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) e^x = \lambda e^x f(x) + \lambda e^x f'(x)$. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda f(x) + \lambda f'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, (1-\lambda) f(x) = \lambda f'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = e^{\frac{1-\lambda}{\lambda} x} f(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = \frac{1-\lambda}{\lambda} e^{\frac{1-\lambda}{\lambda} x} f(x) + e^{\frac{1-\lambda}{\lambda} x} f'(x) = \frac{1-\lambda}{\lambda} e^{\frac{1-\lambda}{\lambda} x} ((1-\lambda) f(x) + \lambda f'(x))$
 $= 0$

D'ac $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = 0$. φ est donc constante. $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = c$

b) Ceci donne alors $\forall x \in \mathbb{R}, \underline{f(x) = c e^{\frac{1-\lambda}{\lambda} x}}$. c n'est pas nul car $f \neq 0_E$.

Si $\frac{1-\lambda}{\lambda} > 0$, f admet une limite ulle à $-\infty$ et infie à $+\infty$; ceci est incompatible avec la caractéristique polynômiale de f (si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ou P admet une limite infie à $+\infty$ ET $-\infty$ ou P admet une limite infie à $+\infty$ ET $-\infty$; OK!!)

Si $\frac{1-\lambda}{\lambda} < 0$, f admet une limite infie à $-\infty$ et nulle à $+\infty$; ceci est incompatible car $f \in E$.

d'ac $\frac{1-\lambda}{\lambda} = 0$! $\lambda = 1 \dots$ et $f \in \text{Vect}(y_1) = \text{Vect}(y_0)$

- Ceci manque 1°.. $\text{Spec}(L) \subset \{1\}$
- 2°.. $F_1 = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Vect}(y_0)$.

Or $f(y_0) = y_0$ et $y_0 \neq 0_E$ d'ac $1 \in \text{Spec}(L)$ et $y_0 \in F_1$ (ou $\text{Vect}(y_0) \subset F_1$).

"Articulation fondamentale"

Conclusion.. $\text{Spec } L = \{1\}$ et $F_1 = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \text{Vect}(y_0)$.

L n'est pas diagonalisable car $\dim F_1 = 1 < n+1 = \dim E$.

Remarque.. Vous souvenez-vous qu'en 87 à LYON on diagonalisait un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ dont la matrice dans la base canonique était diagonale !! (quand c'est toujours pas noté).

EXERCICE 42

Exercice

ESCP 2002 2.20

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$, l'espace vectoriel réel des polynômes de degré au plus $2n$, muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^{2n})$.

On considère Φ définie sur E par : $\forall P \in E, \Phi(P)(X) = \left(\frac{1}{4} - X^2\right)P'(X) + 2nXP(X)$.

Q1. Vérifier que Φ définit un endomorphisme de E .

Q2. a) Soit λ entier relatif tel que $-n \leq \lambda \leq n$.

Trouver (α, β) dans \mathbb{N}^2 pour que le polynôme $P(X) = \left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta$ de E vérifie $\Phi(P) = \lambda P$.

b) En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de Φ . L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

Q3. Déterminer la matrice A de Φ relativement à la base \mathcal{B} .

Q4. Déterminer une matrice A' dont les valeurs propres sont les nombres $0, 1, \dots, 2n$ et dont les coefficients diagonaux sont tous égaux.

Q5. Construire un endomorphisme Λ de E tel que $\Lambda(P)$ s'exprime en fonction de P, P' et P'' et admettant $0, 1, 4, 9, \dots, (2n)^2$ comme valeurs propres.

Q1) • Soit $P \in E$. $\Phi(P)$ est un polynôme.

$$\deg\left(\left(\frac{1}{4} - X^2\right)P'\right) \leq 2n+1 \text{ et } \deg(2nXP) \leq 2n+1 \text{ car } \deg P \leq 2n.$$

$$\text{Ainsi } \deg \Phi(P) \leq 2n+1.$$

Soit a_n le coefficient de X^{2n} dans P .

Le coefficient de X^{2n+1} dans $\left(\frac{1}{4} - X^2\right)P'$ (resp. $2nXP$) est $-2na_n$ (resp. $2na_n$).

Ainsi le coefficient de X^{2n+1} dans $\Phi(P)$ est $-2na_n + 2na_n = 0$. Alors $\deg \Phi(P) \leq 2n$.

$$\forall P \in E, \Phi(P) \in E$$

• Soit $(P, \Phi) \in E^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\Phi(\lambda P + \Phi) = \left(\frac{1}{4} - X^2\right)(\lambda P + \Phi)' + 2nX(\lambda P + \Phi) = \left(\frac{1}{4} - X^2\right)(\lambda P' + \Phi') + 2nX(\lambda P + \Phi).$$

$$\Phi(\lambda P + \Phi) = \lambda \left[\left(\frac{1}{4} - X^2\right)P' + 2nXP \right] + \left[\left(\frac{1}{4} - X^2\right)\Phi' + 2nX\Phi \right] = \lambda \Phi(P) + \Phi(\Phi).$$

Φ est linéaire.

Finalement Φ est un endomorphisme de E .

Q2) a) Soit $\lambda \in \mathbb{T} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ tel que $P = \left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta \in E$.

A des petits abus près : $\Phi(P) = \left(\frac{1}{4} - X\right)\left(\frac{1}{2} + X\right) \left[\alpha \left(X + \frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} \left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta + \beta \left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta-1} \right] + 2nX \left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta$

$$\Phi(P) = \left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta \left[\alpha \left(\frac{1}{2} - X\right) - \beta \left(X + \frac{1}{2}\right) + 2nX \right] = \left((2n - \alpha - \beta)X + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) P.$$

$$P \text{ est par un } \lambda \text{ car } \Phi(P) = \lambda P \text{ si et seulement si } \lambda = (2n - \alpha - \beta)X + \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

(Q4) Pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_{-n, n} \mathbb{D}$, (P_λ) est une base de $\text{SEP}(\phi, \lambda)$ et $E = \bigoplus_{\lambda=-n}^n \text{SEP}(\phi, \lambda)$.

Alors $(P_{-n}, P_{-n+1}, \dots, P_{-1}, P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n)$ est une base, que nous noterons \mathcal{B}' , de E constituée de vecteurs propres de ϕ respectivement associés aux valeurs propres $-n, -n+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n-1, n$.

Posons $\psi = \phi + n \text{Id}_E$.

1° ψ est un endomorphisme de E comme combinaison linéaire de deux endomorphismes de E .

2° $\forall \lambda \in \mathbb{F}_{-n, n} \mathbb{D}$, $\psi(P_\lambda) = \phi(P_\lambda) + n P_\lambda = (\lambda + n) P_\lambda$

Alors \mathcal{B}' est une base de E constituée de vecteurs propres ^{de ψ} associés aux valeurs propres $0, 1, 2, \dots, n$.

Alors $\text{Sp } \psi = \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Posons $A' = A + n I_n$.

$A' = \text{Pg}(\psi)$ donc $\text{Sp } A' = \text{Sp } \psi = \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

de plus $A' = \begin{pmatrix} n & b_1 & & (0) \\ a_0 & n & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & n & b_n \\ & & & a_{n-1} & n \end{pmatrix}$. $A' = A + n I_n$ est une matrice de $\text{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont $0, 1, 2, \dots, n$ et dont les coefficients diagonaux sont tous égaux.

(Q5) Posons $\mathcal{L} = \psi^2$. $\forall \lambda \in \mathbb{F}_{-n, n} \mathbb{D}$, $\mathcal{L}(P) = \psi^2(P) = (\lambda + n)^2 P$ car $\psi(P_\lambda) = (\lambda + n) P_\lambda$

Alors \mathcal{B}' est une base de E constituée de vecteurs propres de \mathcal{L} respectivement associés aux valeurs propres $0, 1, 2^2, \dots, (n)^2$. $\text{Sp } \mathcal{L} = \{0, 1, 2^2, \dots, n^2\}$.

Soit $P \in E$, $\mathcal{L}(P) = \psi^2(P) = (\phi + n \text{Id}_E)^2(P) = \phi^2(P) + 2n\phi(P) + n^2 P$.

$$\mathcal{L}(\phi + n \text{Id}_E)^2 = \phi^2 + 2n\phi + n^2 \text{Id}_E \text{ car } \phi \circ \text{Id}_E = \text{Id}_E \circ \phi$$

$$\mathcal{L}(P) = \phi^2 \left(\left(\frac{1}{4} - x^2 \right) P' + 2n x P \right) + 2n \left(\left(\frac{1}{4} - x^2 \right) P' + 2n x P \right) + n^2 P$$

$$\mathcal{L}(P) = \left(\frac{1}{4} - x^2 \right) \left[-2x P' + \left(\frac{1}{4} - x^2 \right) P'' + 2n P + 2n x P' \right] + 2n \left(\frac{1}{4} - x^2 \right) P' + 2n x P + n^2 P. \text{ R est}$$

alors donc que $\mathcal{L}(P)$ s'exprime en fonction de P, P' et P'' et ceci pour tout P élément de E .

Ainsi $\mathcal{L} = (\phi + n \text{Id}_E)^2$ répond à la question.

EXERCICE 43.

Exercice

N1

Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de fonctions 1.

E est l'espace vectoriel des applications continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Si f est un élément de E , $\varphi(f)$ est l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$.

Montrer que φ est un endomorphisme de E n'ayant pas de valeur propre.

Thème abordé dans EDHEC 1997 Ex 1.

Dans oral ESCP 1994 2.22 on trouve la même chose avec $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(f)(x) = \int_0^x t f(t) dt$ et dans 2010 2.4 la même chose avec $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2} dt$

• Soit $f \in E$. $\varphi(f)$ est la primitive de f sur \mathbb{R} qui prend la valeur 0 à 0 donc $\varphi(f)$ est dérivable sur \mathbb{R} . Alors $\varphi(f)$ est continue sur \mathbb{R} . Donc $\varphi(f) \in E$.
 $\forall f \in E, \varphi(f) \in E$. φ est une application de E dans E .

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(f, g) \in E^2$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda f + g)(x) = \int_0^x (\lambda f + g)(t) dt = \lambda \int_0^x f(t) dt + \int_0^x g(t) dt = \lambda \varphi(f)(x) + \varphi(g)(x) = (\lambda \varphi(f) + \varphi(g))(x).$$

$$\text{Donc } \varphi(\lambda f + g) = \lambda \varphi(f) + \varphi(g).$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda f + g) = \lambda \varphi(f) + \varphi(g). \quad \underline{\varphi \text{ est linéaire.}}$$

φ est un endomorphisme de E .

• Supposons que φ possède une valeur propre λ . Soit f le vecteur propre associé.

$$f \neq 0_E \text{ et } \varphi(f) = \lambda f. \quad \forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x f(t) dt = \lambda f(x).$$

$$\underline{\lambda = 0} \dots \lambda = 0. \quad \forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x f(t) dt = 0. \text{ En dérivant à v. d. : } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0. \quad f = 0_E !!$$

$$\underline{\lambda \neq 0} \dots \lambda \neq 0. \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\lambda} \int_0^x f(t) dt. \text{ Rappelons que } x \mapsto \int_0^x \text{ et la primitive}$$

de f sur \mathbb{R} qui prend la valeur 0 à 0. Alors $x \mapsto \frac{1}{\lambda} \int_0^x f(t) dt$ est dérivable sur \mathbb{R} .

Donc f est dérivable sur \mathbb{R} .

$$\text{En dérivant à v. d. : } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{\lambda} f(x). \quad \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - \frac{1}{\lambda} f(x) = 0.$$

$x \mapsto \frac{x}{\lambda}$ est une primitive sur \mathbb{R} de $x \mapsto \frac{1}{\lambda}$. Le cours nous dit alors que :

$$\exists c \in \mathbb{R}, f(x) = c e^{\frac{1}{\lambda} x}. \text{ Or } f(0) = \frac{1}{\lambda} \int_0^0 f(t) dt = 0. \text{ Alors } 0 = f(0) = c e^{\frac{1}{\lambda} \cdot 0} = c. \quad c = 0.$$

On trouve encore $f = 0_E !!$ Finalement $\text{Sp } \varphi = \emptyset$. Exercice. Partez que φ est injectif mais φ n'est pas surjectif.

Q2 .. Analyse.. Soit $\lambda \in \mathbb{S}_p(\varphi)$. $\exists f \in E$, $f \neq 0_E$ et $\varphi(f) = \lambda f$.

λ n'est pas nul car $K_A \varphi = K_A (\varphi - 0 \cdot \text{Id}_E) = \lambda 0_E$.

Ainsi $\forall x \in]0, 1[$, $f(x) = \frac{1}{\lambda} \varphi(f)(x) = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$. Alors f est dérivable à tout point de $]0, 1[$.

$\forall x \in]0, 1[$, $\lambda x f(x) = \int_0^x f(t) dt$. En dérivant il vient: $\forall x \in]0, 1[$, $\lambda f(x) + \lambda x f'(x) = f(x)$

$\forall x \in]0, 1[$, $f'(x) - \frac{1-\lambda}{\lambda x} f(x) = 0$ (OK?)

ceci est maintenant du cours

Lemme .. a est une fonction continue sur un intervalle I de \mathbb{R} . L'ensemble \mathcal{S} des applications f , dérivables de I dans \mathbb{R} , et telles que: $\forall x \in I$, $f'(x) - a(x)f(x) = 0$ est Vect(w) où $w: I \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto e^{\int a(x)}$ A étant une primitive de a sur I .

► Soit $f \in \mathcal{S}$. $\forall x \in I$, $f'(x) - a(x)f(x) = 0$. $\forall x \in I$, $e^{A(x)} f'(x) - a(x) e^{A(x)} f(x) = 0$.

Ainsi $e^A f' - a e^A f = 0$; $e^A f' - (e^A)' f = 0$; $\frac{e^A f' - (e^A)' f}{(e^A)^2} = 0$.

Donc $\left(\frac{f}{e^A}\right)' = 0$; $\frac{f}{e^A}$ est constante sur I . $\exists c \in \mathbb{R}$, $f = c e^A$. $f \in \text{Vect}(e^A) = \text{Vect}(w)$.

Reciproquement. Soit $f \in \text{Vect}(w)$. $\exists c \in \mathbb{R}$, $f = c e^A$.

$f' - a f = (c e^A)' - a(c e^A) = c A' e^A - c a e^A = c a e^A - c a e^A = 0$; $f \in \mathcal{S}$.

Ceci achève de prouver le lemme. ▼

Reprenons notre démonstration: $\forall x \in]0, 1[$, $f'(x) - \frac{1-\lambda}{\lambda x} f(x) = 0$.

ce qui précède prouve que $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]0, 1[$, $f(x) = c e^{\int \frac{1-\lambda}{\lambda x}}$ où A est une primitive

de $x \mapsto \frac{1-\lambda}{\lambda x}$ sur $]0, 1[$. Ainsi on peut $\forall x \in]0, 1[$, $A(x) = \frac{1-\lambda}{\lambda} \ln|x|$ nous obtenons:

$$\forall x \in]0, 1[, f(x) = c e^{\frac{1-\lambda}{\lambda} \ln|x|} = c |x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = c x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

f n'est pas nulle: c n'est pas nul. Par conséquent f a une limite finie à 0: $f(0)$,

$x \mapsto x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ admet une limite finie à 0. Ceci explique $\frac{1-\lambda}{\lambda} \geq 0$ donc $\lambda \in]0, 1[$.

Ainsi $\lambda \in]0, 1[$.

Soit donc g_λ le prolongement par continuité de la fonction: $\begin{matrix}]0, 1[& \xrightarrow{\lambda} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \end{matrix}$

Noter que $g_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ lorsque $\lambda \in]0, 1[$ et

$g_\lambda(x) = 1$ pour tout $x \in]0, 1[$ lorsque $\lambda = 1$.

Notons alors que $f \in \text{Vect}(g_\lambda)$.

Ainsi si $\lambda \in \text{Sp}(f) : \lambda \in]0, 1[$ et $S \in \mathcal{D}(\varphi, \lambda) \subset \text{Vect}(g_\lambda)$. Cette inclusion et a fait une égalité car on a $S \in \mathcal{D}(\varphi, \lambda) \ni 1$ et de $\text{Vect}(g_\lambda) = 1$

Cette analyse nous donne alors

$$\begin{cases} \forall \lambda \in \text{Sp}(\varphi) \subset]0, 1[\\ \forall \lambda \in \text{Sp}(\varphi), S \in \mathcal{D}(\varphi, \lambda) = \text{Vect}(g_\lambda) \end{cases}$$

"Synthèse" : Notons que $\text{Sp}(\varphi) =]0, 1[$.

Il nous suffit de prouver que $]0, 1[\subset \text{Sp}(\varphi)$. Soit $\lambda \in]0, 1[$.

$g_\lambda \in E, g_\lambda \neq 0_E$. Notons que $\varphi(g_\lambda) = \lambda g_\lambda$ et ainsi on aura nous $\lambda \in \text{Sp}(\varphi)$.

* $\lambda = 1$. $\forall x \in]0, 1[, g_\lambda(x) = 1$.

$$\varphi(g_\lambda)(0) = g_\lambda(0) = 1 g_\lambda(0) \text{ car } \lambda = 1.$$

$$\forall x \in]0, 1[, \varphi(g_\lambda)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x 1 dt = \frac{1}{x} x = 1 = 1 g_\lambda(x)$$

Ainsi $\varphi(g_\lambda) = 1 g_\lambda$.

* $\lambda \in]0, 1[$. $\forall x \in]0, 1[, g_\lambda(x) = x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = x^{\frac{1}{\lambda}-1}$ et $g_\lambda(0) = 0$.

$$\varphi(g_\lambda)(0) = g_\lambda(0) = 0 = \lambda \cdot 0 = \lambda g_\lambda(0)$$

$$\forall x \in]0, 1[, \varphi(g_\lambda)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x t^{\frac{1}{\lambda}-1} dt = \frac{1}{x} \left[\lambda t^{\frac{1}{\lambda}} \right]_0^x = \frac{1}{x} \lambda x^{\frac{1}{\lambda}} = \lambda x^{\frac{1}{\lambda}-1} = \lambda g_\lambda(x) \quad \leftarrow \text{(*)}$$

Donc $\forall x \in]0, 1[, \varphi(g_\lambda)(x) = \lambda g_\lambda(x) ; \varphi(g_\lambda) = \lambda g_\lambda$.

car il y a quelques abus à méditer ...

Donc $g_\lambda \in E, g_\lambda \neq 0_E$ et $\varphi(g_\lambda) = \lambda g_\lambda, \lambda \in \text{Sp}(\varphi)$.

Finalement : $\text{Sp}(\varphi) =]0, 1[\ni \forall \lambda \in]0, 1[, S \in \mathcal{D}(\varphi, \lambda) = \text{Vect}(g_\lambda)$.

Rappelons que si $\lambda = 1 : \forall x \in]0, 1[, g_\lambda(x) = 1$

$$\forall \lambda \in]0, 1[, g_\lambda(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \text{ si } x \in]0, 1[\end{cases}$$

Question 5 HEC 2012-5-S20 F 2

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} . Soit T l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $F = T(f)$ définie par :

$$F(0) = f(0) \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

Q1. Montrer que T est un endomorphisme de E . Est-il injectif ?

Q2. Déterminer les réels λ et les fonctions f vérifiant $T(f) = \lambda f$.

Question de cours. Théorème de la limite centrée.

①) • Soit $f \in E$. Posons $F = T(f)$ et montrons que $F \in E$.

Posons $\forall x \in]0, +\infty[, P_f(x) = \int_0^x f(t) dt$. P_f est la primitive de f sur l'intervalle

$]0, +\infty[$ qui prend la valeur 0 en 0 (f est continue sur $]0, +\infty[$).

P_f est donc de classe B' sur $]0, +\infty[$. De plus $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe B' sur $]0, +\infty[$.

Alors leur produit $F = T(f)$ est de classe B' sur $]0, +\infty[$.

Donc F est également continue sur $]0, +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_f(x) - P_f(0)}{x - 0} = P_f'(0) = f(0). \text{ Ainsi } F \text{ est continue en } 0.$$

F est donc continue sur $]0, +\infty[$. $F \in E$.

$\forall f \in E, T(f) \in E$. T est une application de E dans E .

• montrons que T est linéaire. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(f, g) \in E^2$.

$$\rightarrow T(\lambda f + g)(0) = (\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda T(f)(0) + T(g)(0) = (\lambda T(f) + T(g))(0).$$

$$\rightarrow \text{Soit } x \in]0, +\infty[. T(\lambda f + g)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x (\lambda f + g)(t) dt = \lambda \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt + \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt.$$

$$T(\lambda f + g)(x) = \lambda T(f)(x) + T(g)(x) = (\lambda T(f) + T(g))(x).$$

$$\text{Ainsi } \forall x \in]0, +\infty[, T(\lambda f + g)(x) = (\lambda T(f) + T(g))(x). \quad T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g).$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (f, g) \in E^2, T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g). \quad \underline{T \text{ est linéaire.}}$$

Finalement T est un endomorphisme de E

• Soit $f \in E$ et $T(f) = 0_E$. $\forall x \in]0, +\infty[, \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = 0. \forall x \in]0, +\infty[, \int_0^x f(t) dt = 0.$

tel que $\forall c \in]0, +\infty[$, $\int_0^c f(t) dt = 0$. En dérivant on obtient : $\forall c \in]0, +\infty[$, $f(c) = 0$. $f = 0$.

Ainsi $\text{Ker } T = \{0_E\}$. Tot injectif.

Remarque.. Nous avons vu que si $f \in E$, $T(f)$ est de classe B' sur $]0, +\infty[$.

Les éléments de $\text{Im } T$ sont ^{donc} de classe B' sur $]0, +\infty[$. Pour $\forall c \in]0, +\infty[$, $h(x) = |x-1|$.

est continue sur $]0, +\infty[$ mais n'est pas dérivable en 1. Ainsi $h \in E$ mais $h \notin \text{Im } T$.

Alors T n'est pas surjectif.

Exercice.. Montre que $\text{Im } T$ est l'ensemble des éléments g de E tels que :

1) g est de classe B' sur $]0, +\infty[$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x g'(x)) = 0$.

Q2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $\mathcal{D}_\lambda = \{f \in E \mid T(f) = \lambda f\}$. Notons que $\mathcal{D}_\lambda = \text{Ker}(T - \lambda \text{Id}_E)$.

Si $\lambda = 0$: $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_0 = \text{Ker } T = \{0_E\}$. Donc nous supposons dans ce qui suit : $\lambda \neq 0$.

Analysons un peu. Soit f un élément f appartenant à \mathcal{D}_λ .

Notons de nouveau P_f la primitive de f_λ qui prend la valeur 0 à 0.

$T(f)(0) = \lambda f(0)$ donc $f(0) = \lambda f(0)$; $(1-\lambda)f(0) = 0$. Notons que si $\lambda \neq 1$: $f(0) = 0$.

$\forall x \in]0, +\infty[$, $P_f'(x) = f(x) = \frac{1}{\lambda x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{\lambda x} P_f(x)$.

$\forall x \in]0, +\infty[$, $P_f'(x) - \frac{1}{\lambda x} P_f(x) = 0$.

Notons que $x \mapsto \frac{1}{\lambda} \ln x$ est une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction continue sur $]0, +\infty[$, $x \mapsto \frac{1}{\lambda x}$.

Le cours permet de dire que : $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]0, +\infty[$, $P_f(x) = c e^{\frac{1}{\lambda} \ln x}$.

$\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = P_f'(x) = \frac{1}{\lambda x} P_f(x) = c \frac{1}{\lambda x} e^{\frac{1}{\lambda} \ln x} = c \frac{1}{\lambda x} x^{1/\lambda} = \frac{c}{\lambda} x^{\frac{1}{\lambda}-1}$.

Donc $\exists d \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = d x^{\frac{1}{\lambda}-1}$ et $f(0) = 0$ si $\lambda \neq 1$. Poursuivons l'analyse.

est continue en 0 d'ac $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (d x^{\frac{1}{\lambda}-1})$. Notons que cette limite est finie !

Si $\frac{1}{\lambda} - 1 < 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{\frac{1}{\lambda}-1}) = +\infty$ d'ac nécessairement $d=0$.

Si $\frac{1}{\lambda} - 1 = 0$ $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (d x^0) = d$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = d x^{\frac{1}{\lambda}-1} = d x^0 = d$.

d'ac $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = d$. Pour $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = 0$. $f = d \cdot \mathbb{1}$

Si $\frac{1}{\lambda} - 1 > 0$ Alors $f(0) = 0$ car $\lambda \neq 1$ et ainsi $f(0) = d \times 0$.

de plus $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = d x^{\frac{1}{\lambda}-1}$

Pour $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'_x(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-2} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. $f = d \cdot \mathbb{1}$

Résumons cette analyse.

Si $\lambda = 0$: $\mathcal{S}_\lambda = \{0_E\}$. Si $\frac{1}{\lambda} - 1 < 0$: $\mathcal{S}_\lambda \subset \{0_E\}$. Si $\frac{1}{\lambda} - 1 = 0$ d'ac $\lambda = 1$:

$\mathcal{S}_\lambda \subset \text{Vect}(f_\lambda)$. Si $\frac{1}{\lambda} - 1 > 0$, $\mathcal{S}_\lambda \subset \text{Vect}(f_\lambda)$.

Notons que $0_E \in \mathcal{S}_\lambda$, que $\frac{1}{\lambda} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda-1}{\lambda} < 0 \Leftrightarrow \lambda \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ et $\frac{\lambda-1}{\lambda} > 0 \Leftrightarrow \lambda \in]0, 1[$.

Alors 1^o $\forall \lambda \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, $\mathcal{S}_\lambda = \{0_E\}$.

2^o $\mathcal{S}_\lambda \subset \text{Vect}(f_\lambda)$ si $\forall x \in]0, +\infty[$, $f_\lambda(x) = 1$.

3^o $\forall \lambda \in]0, 1[$, $\mathcal{S}_\lambda \subset \text{Vect}(f_\lambda)$ si $\forall x \in]0, +\infty[$, $f_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Reste à envisager des réciproques.

Notons que $\mathcal{S}_\lambda = \ker(T - \lambda \text{Id}_E)$ d'ac \mathcal{S}_λ est un sous-espace vectoriel de E pour tout λ dans \mathbb{R} .

f_λ est continue sur $]0, +\infty[$. $f_\lambda \in E$. $T(f_\lambda)(0) = f_\lambda(0)$.

$\forall x \in]0, +\infty[$, $T(f_\lambda)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x t dt = \frac{1}{2} x x = \frac{1}{2} x = f_\lambda(x)$.

Alors $\forall x \in]0, +\infty[$, $T(f_\lambda)(x) = \frac{1}{2} x f_\lambda(x)$. $T(f_\lambda) = \frac{1}{2} x f_\lambda$. $f_\lambda \in \mathcal{S}_\lambda$.

Donc $\text{Vect}(f_\lambda) \subset \mathcal{D}_\lambda$. Alors $\mathcal{D}_\lambda = \text{Vect}(f_\lambda)$.

soit $\lambda \in]0, 1[$. $f_\lambda \in \text{Vect}(f_\lambda)$. Pour montrer que $\text{Vect}(f_\lambda) \subset \mathcal{D}_\lambda$ il suffit de montrer que $f_\lambda \in \mathcal{D}_\lambda$ car \mathcal{D}_λ est un sous-espace vectoriel de E .

$$\forall x \in]0, +\infty[, f_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f_λ est continue sur $]0, +\infty[$. En $x \underset{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow 0}$, $x^{\frac{1}{\lambda}-1} \underset{\frac{1}{\lambda}-1 > 0}{\rightarrow} 0 = f_\lambda(0)$ donc f_λ est continue à 0.

Ainsi f_λ est continue sur $]0, +\infty[$. $f_\lambda \in E$.

$$T(f_\lambda)(0) = f_\lambda(0) = 0 = \lambda f_\lambda(0). \text{ Soit } x \in]0, +\infty[.$$

$$\text{Soit } \varepsilon \in]0, +\infty[. \int_\varepsilon^x f_\lambda(t) dt = \int_\varepsilon^x t^{\frac{1}{\lambda}-1} dt = \left[\frac{t^{1/\lambda}}{1/\lambda} \right]_\varepsilon^x = \lambda [x^{1/\lambda} - \varepsilon^{1/\lambda}].$$

$$\text{Alors } \int_0^x f_\lambda(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\lambda [x^{1/\lambda} - \varepsilon^{1/\lambda}]) = \lambda x^{1/\lambda} \text{ car } \frac{1}{\lambda} > 0.$$

$$\text{Alors } T(f_\lambda)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f_\lambda(t) dt = \frac{1}{x} \lambda x^{1/\lambda} = \lambda x^{\frac{1}{\lambda}-1} = \lambda f_\lambda(x).$$

$$\text{Finalement } \forall x \in]0, +\infty[, T(f_\lambda)(x) = \lambda f_\lambda(x). \quad T(f_\lambda) = \lambda f_\lambda; \quad f_\lambda \in \mathcal{D}_\lambda.$$

Alors $\text{Vect}(f_\lambda) \subset \mathcal{D}_\lambda$ et finalement $\mathcal{D}_\lambda = \text{Vect}(f_\lambda)$.

Conclusion . $\forall \lambda \in]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[, \mathcal{D}_\lambda = \{0_E\}$

. $\mathcal{D}_1 = \text{Vect}(f_1)$ où f_1 est l'élément de E défini par $\forall x \in]0, +\infty[, f_1(x) =$

. si $\lambda \in]0, 1[, \mathcal{D}_\lambda = \text{Vect}(f_\lambda)$ où f_λ est l'élément de E défini par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, f_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Ainsi $\rightarrow S_p T =]0, 1]$

$\rightarrow \text{SEP}(T, \lambda) = \text{Vect}(f_\lambda)$ pour tout $\lambda \in]0, 1]$.

Remarque . On aurait sans doute pu poser $\forall \lambda \in]0, 1], \forall x \in]0, +\infty[, f_\lambda(x) = x^{\frac{1}{\lambda}-1}$...

EXERCICE 46 **N1+** Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de fonctions 3.
D'après oral ESCP 2000 2-18 et 2011- 2.2.

E est l'espace vectoriel des applications continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Si f est un élément de E , $\varphi(f)$ est l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$\varphi(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(t) dt & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Q1. Montrer que φ est un endomorphisme de E .

Q2. Montrer que $\text{Ker } \varphi$ est l'ensemble des fonctions impaires de E .

Q3. Soit λ un réel non nul. On se propose de trouver $\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{Id}_E)$.

a) Soit f un élément de $\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{Id}_E)$. Montrer que f est paire sur \mathbb{R} et dérivable sur \mathbb{R}^* .

Trouver une relation entre f et f' sur $]0, +\infty[$. En déduire f sur \mathbb{R}^* .

Montrer que si λ appartient à $] -\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ alors f est nulle sur \mathbb{R} .

b) Utiliser ce qui précède pour déterminer $\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{Id}_E)$.

Q4. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ .

A noter que dans ESCP 2000 2-18 on demande de montrer que $\text{Sp } \varphi = \mathbb{R}$ ce qui est faux...

Q1 • Soit f un élément de E et F une primitive de f sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \varphi(f)(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(t) dt = \frac{1}{2x} (F(x) - F(-x)).$$

F et $x \mapsto -x$ sont dérivables sur \mathbb{R} . Alors $x \mapsto F(-x)$ et F sont dérivables sur \mathbb{R} .

La différence $x \mapsto F(x) - F(-x)$ est dérivable sur \mathbb{R} .

Comme $x \mapsto \frac{1}{2x}$ est dérivable sur \mathbb{R}^* , par produit $\varphi(f)$ est dérivable sur \mathbb{R}^* .

Alors $\varphi(f)$ est continue sur \mathbb{R}^* . Montrons que $\varphi(f)$ est continue en 0.

F est dérivable en 0 et $F'(0) = f(0)$. Alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(-x) - F(0)}{(-x) - 0} = f(0)$.

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(t) dt \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(-x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} + \frac{F(-x) - F(0)}{(-x) - 0} \right) \right] = \frac{1}{2} (f(0) + f(0)).$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(t) dt \right) = f(0) = \varphi(f)(0)$. $\varphi(f)$ est continue en 0.

Finalement $\varphi(f)$ est continue sur \mathbb{R} . $\varphi(f) \in E$.

$\forall f \in E, \varphi(f) \in E$. φ est une application de E dans E .

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(f, g) \in E^2$

$$\rightarrow \varphi(\lambda f + g)(\omega) = (\lambda f + g)(\omega) = \lambda f(\omega) + g(\omega) = \lambda \varphi(f)(\omega) + \varphi(g)(\omega) = (\lambda \varphi(f) + \varphi(g))(\omega).$$

\rightarrow Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\varphi(\lambda f + g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\lambda f + g)(t) dt = \lambda \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt = \lambda \varphi(f)(x) + \varphi(g)(x).$$

$$\varphi(\lambda f + g)(\omega) = (\lambda \varphi(f) + \varphi(g))(\omega).$$

En d'autre part $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(\lambda f + g)(x) = (\lambda \varphi(f) + \varphi(g))(x)$; $\varphi(\lambda f + g) = \lambda \varphi(f) + \varphi(g)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (f, g) \in E^2$, $\varphi(\lambda f + g) = \lambda \varphi(f) + \varphi(g)$. φ est linéaire.

ceci a été de nature que φ est un A.D. sur l'espace de E.

Q2) Soit f un élément de E.

• Supposons que f est impaire sur \mathbb{R} . Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0$.

$$\text{donc } \forall x \in \mathbb{R}^n, \varphi(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0.$$

$$f(\omega) = f(-\omega) = -f(\omega); \quad \varepsilon f(\omega) = 0; \quad f(\omega) = 0. \quad \text{Alors } \varphi(f)(\omega) = f(\omega) = 0.$$

$$\text{Ainsi } \forall x \in \mathbb{R}^n, \varphi(f)(x) = 0. \quad \varphi(f) = 0_E. \quad \underline{f \in \ker \varphi.}$$

• Supposons que $f \in \ker \varphi$.

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R}^n, \varphi(f)(x) = 0. \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0. \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0.$$

$$\text{rien qu'} \forall x \in \mathbb{R}^n, \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0 \text{ ce } \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0.$$

$$\text{Soit } F \text{ une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}. \quad \forall x \in \mathbb{R}, F(x) - F(-x) = \int_{-x}^x f(t) dt = 0.$$

$$\text{En dérivant il vient } \forall x \in \mathbb{R}, F'(x) - (-F'(x)) = 0.$$

$$\text{donc } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(-x) = 0. \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x); \quad \underline{f \text{ est impaire sur } \mathbb{R}.}$$

$\ker \varphi$ est l'ensemble des fonctions impaires de E.

Q3) a) Rappelons qu'ici $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $f \in \ker(\varphi - \lambda \text{Id}_E)$. $\varphi(f) = \lambda f$. $f = \frac{1}{\lambda} \varphi(f)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \frac{1}{\lambda} \varphi(f)(x).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(-x) = \frac{1}{\lambda} \varphi(f)(-x) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \right) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \right) = \frac{1}{\lambda} \varphi(f)(x) = f(x).$$

$$\text{de plus } f(-\omega) = f(\omega).$$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$. f est paire sur \mathbb{R} .

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\lambda} \varphi(|x|)$ et nous avons montré que φ est dérivable sur \mathbb{R}^* .

Alors f est dérivable sur \mathbb{R}^* .

Soit F une primitive de f sur \mathbb{R} . f est paire donc $\int_0^x f(t) dt = 2 \int_0^{x/2} f(t) dt = 2(F(x/2) - F(0))$.

$$\forall x \in]0, +\infty[, \lambda f(x) = \varphi(|x|) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(t) dt = \frac{1}{x} (F(x) - F(0)).$$

$\forall x \in]0, +\infty[, \lambda x f(x) = F(x) - F(0)$. En dérivant il vient $\forall x \in]0, +\infty[, \lambda f(x) + \lambda x f'(x) = f'(x)$.

$$\text{Donc } \forall x \in]0, +\infty[, f'(x) + \frac{\lambda-1}{\lambda} \frac{1}{x} f(x) = 0 ; \forall x \in]0, +\infty[, f'(x) - \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{1}{x} f(x) = 0$$

Or $x \mapsto \frac{1-\lambda}{\lambda} \ln x$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$. Le cours nous dit alors

qu'il existe c dans \mathbb{R} tel que $\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = c e^{\frac{1-\lambda}{\lambda} \ln x}$.

$$\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = c x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = c |x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}.$$

$$\forall x \in]-\infty, 0[, f(x) = f(-x) = c |-x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = c |x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}.$$

\uparrow
 $-x \in]0, +\infty[$

$$\text{Donc } \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = c |x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}.$$

Supposons que $\lambda \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. Alors $\frac{1-\lambda}{\lambda} < 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = +\infty$.

A fait continue en 0 donc f admet une limite finie en 0. Alors nécessairement

$$c = 0 \quad (c > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (c|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} (c|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}) = -\infty \text{ si } c < 0).$$

Si $\lambda \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[, f = 0_E \dots$ et $\ker(\varphi - \lambda \text{Id}_E) = \lambda 0_E$.

Notons que si $\lambda \in]0, 1[$ $\lim_{x \rightarrow 0} (c|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}) = 0$ donc $f(0) = 0$ car f est continue en 0.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} c|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Notons que l'on pourrait presque écrire que

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \dots$ si l'on s'écartait.

si $\lambda = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = c$. Comme f est continue en 0 : $f(0) = c$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = c$.

b) Nous venons de voir que si $\lambda \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, $\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{Id}_E) = \{0_E\}$.

Supposons que $\lambda = 1$. Nous venons de voir que si $f \in \text{Ker}(\varphi - \lambda \text{Id}_E)$ alors

$$\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \varphi(x) = c. \text{ Pour } \forall x \in \mathbb{R}^n, f_1(x) = 1. f = c f_1.$$

Ainsi $\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{Id}_E) = \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E) \subset \text{Vect}(f_1)$. Montrons l'équivalence inverse. $f_1 \in E$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \varphi(f_1)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = \frac{1}{2\pi} (x - (-\pi)) = 1 = f_1(x).$$

$$\varphi(f_1)(0) = f_1(0).$$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(f_1)(x) = f_1(x)$. Ainsi $\varphi(f_1) = f_1$. $f_1 \in \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E)$.

donc $\text{Vect}(f_1) \subset \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E)$ ou $\text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E) \subset \text{Vect}(f_1)$ et un sous-espace vectoriel de E .

Finalement $\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{Id}_E) = \text{Vect}(f_1)$ si $\lambda = 1$. $f_1 \neq 0_E$ donc $f_1 \in \text{Sp}(\varphi)$ et $\text{Sp}(\varphi) = \text{Vect}(f_1)$.

Supposons que $\lambda \in]0, 1[$. Pour $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f_\lambda(x) = \begin{cases} |x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Nous avons vu dans a) que si $f \in \text{Ker}(\varphi - \lambda \text{Id}_E)$, $\exists c \in \mathbb{R}$, $f = c f_\lambda$. Alors $\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{Id}_E) \subset \text{Vect}(f_\lambda)$.

Montrons l'équivalence inverse. f_λ est continue sur \mathbb{R}^n et en $|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = 0 = f_\lambda(0)$.

Finalement f_λ est continue sur \mathbb{R}^n . $f_\lambda \in E$.

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f_\lambda(-x) = |x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = |x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = f_\lambda(x)$ et $f_\lambda(0) = f_\lambda(0)$. f_λ est paire sur \mathbb{R}^n .

$$\varphi(f_\lambda)(0) = f_\lambda(0) = 0 = \lambda \times 0 = \lambda f_\lambda(0). \text{ Soit } x \in \mathbb{R}^n_{\neq 0}$$

$$\varphi(f_\lambda)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_\lambda(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f_\lambda(t) dt.$$

$$\int_0^{\pi} f_\lambda(t) dt = \int_{E \neq 0}^{\pi} |t|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} dt = \int_{E \neq 0}^{\pi} t^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} dt = \int_{E \neq 0}^{\pi} [t e^{\lambda t}]_E = \int_{E \neq 0}^{\pi} (\lambda t^{\lambda} - \lambda e^{\lambda t}) dt = \lambda x^{\lambda}.$$

donc $\varphi(f_\lambda)(x) = \frac{1}{2\pi} \times \lambda x^{\lambda} = \lambda x^{\lambda-1} = \lambda f_\lambda(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}^n_{\neq 0}$ et paire.

$$\varphi(f_\lambda)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_\lambda(t) dt = \frac{1}{2(-x)} \int_{-x}^{\pi} f_\lambda(t) dt = \varphi(f_\lambda)(-x) = \lambda f_\lambda(-x) = \lambda f_\lambda(x).$$

Finalement $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi(f_\lambda)(u) = \lambda f_\lambda(u); \varphi(f_\lambda) = \lambda f_\lambda; \lambda \in \text{Ker}(\varphi - \lambda \text{Id}_E)$.
 Comme $\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{Id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de $E: \text{Vect}(f_\lambda) \subset \text{Ker}(\varphi - \lambda \text{Id}_E)$.

Ceci achève de montrer que si $\lambda \in]0, 1[$, $\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{Id}_E) = \text{Vect}(f_\lambda)$.

Donc $\forall \lambda \in]0, 1[, \lambda \in \text{Sp} \varphi$ et $\text{SEP}(\varphi, \lambda) = \text{Vect}(f_\lambda)$ (... car $f_\lambda \neq 0$).

Q4) Notons que $x \mapsto -x$ est une fonction impaire appartenant à E et qui n'est pas la fonction nulle. Alors $\text{Ker} \varphi \neq \{0_E\}$. 0 est valeur propre de φ .
 ce qui prouve de même que :

39 $\text{Sp} \varphi =]0, 1]$.

27 $\text{SEP}(\varphi, 0)$ est l'ensemble des fonctions impaires de E .

27 $\text{SEP}(\varphi, 1) = \text{Vect}(f_1)$ où f_1 est définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = x$.

47 Pour tout $\lambda \in]0, 1[, \text{SEP}(\varphi, \lambda) = \text{Vect}(f_\lambda)$ où f_λ est définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{x-\lambda}{\lambda} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
 ... ou $\forall x \in \mathbb{R}, f_\lambda(x) = |x|^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ pour ceux qui veulent.

Exercice

Réécriture d'un exercice de l'oral ESCP 2008.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note e_n l'application de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} définie par : $\forall x \in [0, +\infty[$, $e_n(x) = x^n \exp(-x) = x^n e^{-x}$.

On donne un entier N non nul. Soit E l'espace vectoriel engendré par $(e_0, e_1, e_2, \dots, e_N)$.

Q1. Montrer que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2, \dots, e_N)$ est une base de E . En déduire la dimension de E .

Q2. Les éléments de E sont en particulier des applications dérivables.

On notera Δ l'opérateur de dérivation dans E . Ainsi : $\forall f \in E, \Delta(f) = f'$.

a) Démontrer que Δ est un endomorphisme de E .

b) Écrire la matrice A de Δ dans la base \mathcal{B} . En déduire que Δ est un automorphisme de E .

c) Trouver les (!) valeurs propres et les sous-espaces propres de Δ . Δ est-il diagonalisable?!

Q3. a) Soit k un élément de $\llbracket 0, N \rrbracket$ et x un élément de $[0, +\infty[$.

Montrer que la série de terme général $w_n = e_k(x+n)$ est convergente.

b) f est un élément de E . Démontrer que la série de terme général $u_n = f(n+x)$ est convergente pour tout élément x de $[0, +\infty[$. On note alors $F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+x)$.

Vérifier que $F \in E$, et que l'application $\Phi : f \mapsto F$ ainsi définie est un endomorphisme de E .

c) Écrire la matrice de Φ dans la base \mathcal{B} (on pourra poser $\forall j \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $A_j = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \ell^j e^{-\ell}$).

d) Démontrer que $\Phi \circ \Delta = \Delta \circ \Phi$.

Q1) \mathcal{B} est par définition de E une famille génératrice de E . Montrons que cette famille est libre.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^{N+1}$ tel que $\sum_{k=0}^N \alpha_k e_k = 0_E$.

$\forall x \in [0, +\infty[$, $\sum_{k=0}^N \alpha_k x^k e^{-x} = 0$ et $e^{-x} \neq 0$. Alors :

$\forall x \in [0, +\infty[$, $\sum_{k=0}^N \alpha_k x^k = 0$. $\forall \sum_{k=0}^N \alpha_k x^k$ a donc une infinité de racines.

C'est donc le polynôme nul. Mais ses coefficients sont nuls. Donc $\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $\alpha_k = 0$.
ce qui achève de montrer que la famille \mathcal{B} est libre.

Alors $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_N)$ est une base de E et donc $\dim E = N+1$.

Exercice - Retrouver ce résultat au moins que E et $\mathbb{R}_N[x]$ sont isomorphes.

Supposons Δ diagonalisable. Alors $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp } \Delta} \text{SEV}(\Delta, \lambda) = \text{SEV}(\Delta, -1)$.

Or $E = \mathbb{K}(\Delta + \text{Id}_E)$. Alors $\Delta + \text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $\Delta = -\text{Id}_E$.

Or $N \geq 1$. Alors $\Delta(e_1) = -e_1$. Or $\Delta(e_1) = e_0 - e_1$ d'ac $e_0 = 0_E$!!

Ainsi Δ n'est pas diagonalisable.

Remarque... Si le k avait été une' $N=0$, Δ en été diagonalisable
niet revenir à $N=0$. Que l'on s'en souvienne....

Q3) a) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, +\infty[$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, e_k(x+n) = (x+n)^k e^{-(x+n)} = e^{-x} (x+n)^k e^{-n}.$$

Alors $e_k(x+n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x} n^k e^{-n}$ d'ac $n^2 e_k(x+n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x} n^{k+2} e^{-n}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^{k+2} e^{-n}) = 0$ par croissance comparée.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 e_k(x+n)) = 0$. Alors 1°) $e_k(x+n) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2°) $\forall n \in \mathbb{N}, e_k(x+n) = (x+n)^k e^{-(x+n)} \geq 0$;
 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^2} \geq 0$.

3°) la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la

série de terme général $u_n = e_k(x+n)$ converge.

Pour tout élément x de \mathbb{R}^+ pour tout élément k de \mathbb{N} la série de

terme général $u_n = e_k(x+n)$ est convergente.

b) $f \in E$. $\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$, $f = \sum_{k=0}^N \alpha_k e_k$. Soit $x \in [0, +\infty[$

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x+n) = \sum_{k=0}^N \alpha_k e_k(x+n)$$

et pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$, la série de terme général $e_k(x+n)$ converge.

Alors la série de terme général $f(x+n)$ converge comme combinaison linéaire de $N+1$ séries convergentes.

Pour tout x dans $[0, +\infty[$ la série de terme général $f(x+n)$ converge.

$$\text{Notons que } \forall x \in [0, +\infty[, \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n) = \sum_{k=0}^N \alpha_k \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e_k(x+n) \right).$$

$$\text{Soit } x \in [0, +\infty[. F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n) = \sum_{k=0}^N \alpha_k \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e_k(x+n) \right).$$

Soit $k \in \{0, \dots, N\}$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e_k(x+n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (x+n)^k e^{-(x+n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} n^j x^{k-j} e^{-x} e^{-n} \right).$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e_k(x+n) = e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x^{k-j} n^j e^{-n} \right)$$

Soit $j \in \mathbb{N}$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^{j+1} e^{-n}) = 0$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, n^j e^{-n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$
 $\forall n \in \mathbb{N}^*, n^j e^{-n} \geq 0$ et $\frac{1}{n} \geq 0$
 et la série de terme général $\frac{1}{n}$ converge.

À l'aide des comparaisons sur les séries à termes positifs
 montre que la série de terme général $n^j e^{-n}$ converge.

Alors pour tout j dans $\{0, \dots, k\}$, la série de terme général $\binom{k}{j} x^{k-j} n^j e^{-n}$ converge.

$$\text{Ceci permet d'écrire : } \sum_{n=0}^{+\infty} e_k(x+n) = e^{-x} \sum_{j=0}^k \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{k}{j} x^{k-j} n^j e^{-n} \right)$$

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^{+\infty} e_k(x+n) = e^{-x} \sum_{j=0}^k \left(\binom{k}{j} x^{k-j} \sum_{n=0}^{+\infty} n^j e^{-n} \right).$$

Pour tout j dans \mathbb{N} , $A_j = \sum_{n=0}^{+\infty} n^j e^{-n}$ (nous avons montré que cette série converge).

$$\text{Alors } \sum_{n=0}^{+\infty} e_n(x+n) = e^{-x} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A_j x^{k-j}.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e_n(x+n) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A_j e_{k-j}(x).$$

$$\text{Alors } F(x) = \sum_{k=0}^N \alpha_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A_j e_{k-j}(x).$$

$$\text{Donc } F = \sum_{k=0}^N \alpha_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A_j e_{k-j}.$$

F est donc combinaison linéaire d'éléments de la famille (e_0, e_1, \dots, e_N) .

Donc F appartient à E.

Remarque.. plus précisément : $F = \sum_{k=0}^N \alpha_k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A_{k-i} e_i$

$$F = \sum_{i=0}^N \left(\sum_{k=i}^N \alpha_k \binom{k}{i} A_{k-i} \right) e_i.$$

Donc ϕ est une application de E dans E.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(f, g) \in E^2$.

toutes les séries convergent

$$\forall x \in]0, +\infty[, \phi(\lambda f + g)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda f + g)(x+n) \stackrel{\downarrow}{=} \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n) + \sum_{n=0}^{+\infty} g(x+n).$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, \phi(\lambda f + g)(x) = \lambda \phi(f)(x) + \phi(g)(x) = (\lambda \phi(f) + \phi(g))(x).$$

$$\text{Ainsi } \phi(\lambda f + g) = \lambda \phi(f) + \phi(g).$$

ϕ est linéaire.

ϕ est un endomorphisme de E.

c) Nous avons vu que $\forall k \in \mathbb{I}0, n\mathbb{I}, \forall x \in \mathbb{I}0, +\infty\mathbb{C}, \sum_{n=0}^{+\infty} e_k(x+1) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A_j e_{k-j}(x)$

Alors $\forall k \in \mathbb{I}0, n\mathbb{I}, \phi(e_k) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A_j e_{k-j} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{k-j} A_{k-j} e_j$.

\uparrow $j \leftarrow k-j$ $\underbrace{\binom{k}{k-j}}_{\binom{k}{j}}$

$\forall k \in \mathbb{I}0, n\mathbb{I}, \phi(e_k) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A_{k-j} e_j$.

$$\Pi_B(\phi) = \begin{pmatrix} A_0 & A & \dots & \binom{k}{0} A_k & \dots & \binom{n}{0} A_n \\ 0 & A_0 & \dots & \binom{k}{1} A_{k-1} & \dots & \binom{n}{1} A_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \binom{k}{k-1} A_1 & \dots & \binom{n}{n-1} A_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \binom{n}{n} A_0 \end{pmatrix}.$$

d) Pour prouver que $\phi \circ \Delta = \Delta \circ \phi$ il suffit de montrer que ce deux a. d. n. p. l'images de e coïncident sur le ham $B = (e_0, e_1, \dots, e_n)$. Soit $k \in \mathbb{I}0, n\mathbb{I}$. Supposons $k \neq 0$.

$$\phi(\Delta(e_k)) = \phi(e'_k) = \phi(k e_{k-1} - e_k) = k \phi(e_{k-1}) - \phi(e_k) = k \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} A_{k-1-j} e_j - \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A_{k-j} e_j$$

$$\phi(\Delta(e_k)) = k \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} A_{k-1-j} e_j - \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A_{k-j} e_j.$$

$$\Delta(\phi(e_k)) = (\phi(e_k))' = \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A_{k-j} e'_j \right)' = A_k e'_0 + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} A_{k-j} e'_j.$$

$$\Delta(\phi(e_k)) = -A_k e_0 + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} A_{k-j} (j e_{j-1} - e_j) = -A_k e_0 - \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} A_{k-j} e_j + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} A_{k-j} j e_{j-1}$$

$$\Delta(\phi(e_k)) = - \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A_{k-j} e_j + \sum_{j=0}^{k-1} \underbrace{\binom{k}{j+1} (j+1)}_{k \binom{k-1}{j}} A_{k-(j+1)} e_j$$

$$\Delta(\phi(e_k)) = \sum_{j=0}^{k-1} k \binom{k-1}{j} A_{k-1-j} e_j - \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A_{k-j} e_j = \phi(\Delta(e_k)).$$

$$\Delta(\phi(e_0)) = (\phi(e_0))' = (A_0 e_0)' = A_0 e'_0 = -A_0 e_0. \quad \phi(\Delta(e_0)) = \phi(-e_0) = -\phi(e_0) = -A_0 e_0.$$

Donc $\Delta(\phi(e_0)) = \phi(\Delta(e_0))$. Ceci achève de montrer que $\phi \circ \Delta = \Delta \circ \phi$.

Exercice N1 Endomorphisme d'un espace vectoriel de suites 1. Contenu dans oral ESCP 2007 2.1

E est l'ensemble des suites complexes indexées par \mathbb{N} et bornées. T est l'application qui à tout élément $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associe la suite $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

Q1. Montrer que E est un espace vectoriel sur \mathbb{C} et que T est un endomorphisme de E .

Q2. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de T .

Q1) Notons \mathcal{S} l'espace vectoriel sur \mathbb{C} des suites complexes u indexées par \mathbb{N} .

- $E \subset \mathcal{S}$
- La suite nulle appartient évidemment à E car elle est bornée (à ϵ près) et pas vide.
- Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux éléments de E .
 $\exists c \in \mathbb{R}_+^*, \exists d \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq c$ et $|v_n| \leq d$ car u et v sont bornées.
 Alors $\forall n \in \mathbb{N}, |\lambda u_n + v_n| \leq |\lambda| |u_n| + |v_n| \leq |\lambda|c + d$. Soit la suite $(\lambda u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Ainsi $\lambda u + v \in E$.
 $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall (u, v) \in E^2, \lambda u + v \in E$.

cela démontre de manière que E est un sous-espace vectoriel de \mathcal{S} .

Ainsi E est un espace vectoriel sur \mathbb{C} .

- Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de E . Posons $T(u) = (u'_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

u est bornée donc $\exists c \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq c$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, |u'_{n+1}| = |u_{n+1}| \leq c$. Ainsi $(u'_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée donc $T(u) \in E$.

$\forall u \in E, T(u) \in E$. T est une application de E dans E .

- Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux éléments de E .

$$T(\lambda u + v) = T((\lambda u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (\lambda u_{n+1} + v_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} = \lambda (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} + (v_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} = \lambda T(u) + T(v).$$

$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall (u, v) \in E^2, T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v)$. T est linéaire.

T est un endomorphisme de E .

Q2) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de E .

$$u \in \text{Ker}(T - \lambda \text{Id}_E) \Leftrightarrow T(u) = \lambda u \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \lambda u_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \lambda^n.$$

Alors $\text{Ker}(T - \lambda \text{Id}_E) = \text{Vect}((\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}) \cap E$!

cherchons cette intersection en distinguant deux cas.

1^{er} cas $|\lambda| \leq 1$. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de $\text{Vect}((\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}})$.

$$\exists d \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = d \lambda^n. \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = |d| |\lambda|^n \leq |d|.$$

Donc $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Ainsi $u \in E$.

Donc $\text{Ker}(T - \lambda \text{Id}_E) = \text{Vect}((\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}})$. Alors λ est valeur propre de T et

le sous-espace propre associé est $\text{Vect}((\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}})$.

2^{ème} cas. $|\lambda| > 1$. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de $\text{Vect}((\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}})$

$$\exists d \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = d \lambda^n.$$

si $d = 0$: $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = 0_E \in E$! Supposons $d \neq 0$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = |d| |\lambda|^n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$ car $|\lambda| > 1$ et $|d| > 0$.

Ainsi $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée. $u \notin E$.

Finalement $\text{Ker}(T - \lambda \text{Id}_E) = \text{Vect}((\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}) \cap E = \{0_E\}$.

λ n'est pas valeur propre.

Conclusion 1^o $\text{Sp } T = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}$.

2^o si $\lambda \in \text{Sp } T$, $\text{SEP}(T, \lambda) = \text{Vect}((\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}})$.

Exercice N1 Endomorphisme d'un espace vectoriel de suites 2.

E est l'espace vectoriel réel des suites réelles indexées par \mathbb{N} .

On considère l'application f de E dans E qui à tout élément $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E associe la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de E .

Q2. Trouver les valeurs propres et les sous espaces propres de f .

Thème abordé dans oral ESCP 2.5 avec des suites périodiques.

Q1 • Soit une application de E dans E par définition.

• Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ & $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux éléments de E .

$$f(\alpha u + v) = f((\alpha u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}) = ((\alpha u_{n+1} + v_{n+1}) - (\alpha u_n + v_n))_{n \in \mathbb{N}} = (\alpha(u_{n+1} - u_n) + (v_{n+1} - v_n))_{n \in \mathbb{N}}$$

$$f(\alpha u + v) = \alpha(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_{n+1} - v_n)_{n \in \mathbb{N}} = \alpha f(u) + f(v)$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (u, v) \in E^2, f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v)$. Soit linéaire.

Ainsi f est un endomorphisme de E .

Q2 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$.

$$u \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \Leftrightarrow f(u) = \lambda u \Leftrightarrow (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} = \lambda (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \lambda u_n$$

$$u \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \Leftrightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite géométrique de raison } \lambda.$$

Pour $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(\lambda) = \lambda^n$. $(u_n(\lambda))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison λ et ce

n'est pas la suite nulle. Alors $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$. λ est valeur propre de f .

$$\text{de plus } u \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \lambda u_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda^n u_0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 u_n(\lambda)$$

donc si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$, $u = u_0 (u_n(\lambda))_{n \in \mathbb{N}}$ donc

$u \in \text{Vect}((u_n(\lambda))_{n \in \mathbb{N}})^{(*)}$. Or $(u_n(\lambda))_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$ & $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$ est un sous-espace

vectoriel de E alors $\text{Vect}((u_n(\lambda))_{n \in \mathbb{N}}) \subset \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$.

$$\text{Ainsi } \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) = \text{Vect}((u_n(\lambda))_{n \in \mathbb{N}}) = \text{Vect}(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Finalement $\text{Sp} f = \mathbb{R}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{SEP}(f, \lambda) = \text{Vect}(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(*) ce qui signifie que $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \subset \text{Vect}((u_n(\lambda))_{n \in \mathbb{N}})$

EXERCICE 50 **N1** Endomorphisme d'un espace vectoriel de suites 3.

E est l'espace vectoriel réel des suites réelles indexées par \mathbb{N} .

On considère l'application f de E dans E qui à tout élément $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E associe la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_0 = u_0$

$$\text{et } \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{u_{n-1} + u_n}{2}.$$

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de E .

Q2. Trouver les valeurs propres et les sous espaces propres de f .

Q1. Par définition f est une application de E dans E .

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $u' = (u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux éléments de E .

$$\text{Ponon } v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = f(u), v' = (v'_n)_{n \in \mathbb{N}} = f(u') \text{ et } w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}} = f(\lambda u + u').$$

$$\lambda u + u' = (\lambda u_n + u'_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

$$\text{Ainsi } w_0 = \lambda u_0 + u'_0 = \lambda v_0 + v'_0.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \frac{\lambda u_n + u'_n + \lambda u_{n-1} + u'_{n-1}}{2} = \lambda \frac{u_n + u_{n-1}}{2} + \frac{u'_n + u'_{n-1}}{2} = \lambda v_n + v'_n.$$

$$\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}, w_n = \lambda v_n + v'_n. \text{ Donc } w = (\lambda v_n + v'_n)_{n \in \mathbb{N}} = \lambda (v_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v'_n)_{n \in \mathbb{N}} = \lambda f(u) + f(u').$$

$$\text{Ainsi } f(\lambda u + u') = w = \lambda f(u) + f(u').$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (u, u') \in E^2, f(\lambda u + u') = \lambda f(u) + f(u'). \text{ } f \text{ est linéaire. } \text{$$

Donc f est un endomorphisme de E .

Q2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de E .

$$u \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \Leftrightarrow f(u) = \lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = \lambda u_0 \\ \text{ou} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_n + u_{n-1}}{2} = \lambda u_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = \lambda u_0 \\ \text{ou} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, (2\lambda - 1)u_n = u_{n-1} \end{cases}$$

$$u \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \lambda)u_0 = 0 \\ \text{ou} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, (2\lambda - 1)u_{n+1} = u_n \end{cases}$$

$$\underline{f(u) = \lambda u} \dots \lambda \neq 1 \text{ et } \lambda \neq \frac{1}{2}.$$

$$u \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{ou} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2\lambda - 1} u_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{ou} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\frac{1}{2\lambda - 1}\right)^n u_0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$$

$$\text{Ainsi } \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) = \{0_E\}.$$

2^{ème} cas... $\lambda = \frac{1}{2}$.

$$u \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \frac{1}{2}) u_0 = 0 \\ \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N}, 0 \times u_{n+1} = u_n \end{cases} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0_E.$$

$$\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) = \{0_E\}.$$

3^{ème} cas... $\lambda = 1$.

$$u \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0.$$

Soit t la suite constante de E égale à 1 . $t \neq 0_E$ et $t \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$.

Ainsi $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$. Alors λ est une valeur propre de f et t est un vecteur propre associé. $\text{Vect}(t)$ est donc contenu dans $\text{SEP}(f, \lambda)$.

Reprenons la suite u et supposons que $u \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$.

$$\text{Alors } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 = u_0 \times \lambda = u_0 \times t_n. \quad u = u_0 t. \quad u \in \text{Vect}(t).$$

Peu conclure que $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \subset \text{Vect}(t)$. $\text{SEP}(f, \lambda) \subset \text{Vect}(t)$.

Finalement $\text{SEP}(f, \lambda) = \text{Vect}(t)$.

Conclusion... $\text{Sp } f = \{1\}$ et $\text{SEP}(f, \lambda) = \text{Vect}(t)$ où t est la suite constante de E

égale à 1 .