EXERCICE 51

Ancienne correction

Exercice E est l'espace vectoriel réel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$.

On définit pour tout élément $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ de E la suite $v = \Delta(u)$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{n+1}(u_0 + u_1 + \cdots + u_n)\cdot$$

Q1 Montrer que l'application Δ ainsi définie est un endomorphisme de E.

Q2 On considère un réel λ n'appartenant pas à l'ensemble $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{p+1}\ ;\ p \in \mathbb{N}\right\}$.

Soit $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ un élément de $\operatorname{Ker}(\Delta - \lambda\, \mathrm{Id}_E)$. Montrer par une récurrence adaptée que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0$.

Qu'en déduire pour le spectre de Δ ? Δ est-il injectif ?

Q3 On rappelle que si r et s sont deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $s \geqslant r$: $\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \cdots + \binom{s}{r} = \binom{s+1}{r+1}$.

a) Soit p un élément de $\mathbb{N}$. On pose $\lambda = \frac{1}{p+1}$ et on considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \begin{cases} \binom{n}{p} & \text{si } n \geqslant p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Vérifier que $\Delta(u) = \lambda u$.

b) Préciser le spectre de Δ.

Q4 Soit p un élément de $\mathbb{N}$. On pose $\lambda = \frac{1}{p+1}\cdot$ Déterminer SEP (Δ, λ).

Q5 **Facultatif** Étudier la surjectivité de Δ.

Q1 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soient $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ et $u' = (u'_n)_{n\geqslant 0}$ deux éléments de E.

$$\Delta(\lambda u + u') = \Delta\left((\lambda u_n + u'_n)_{n\geqslant 0}\right) = \left(\frac{(\lambda u_0 + u'_0) + (\lambda u_1 + u'_1) + \cdots + (\lambda u_n + u'_n)}{n+1}\right)_{n\geqslant 0}$$

$$\Delta(\lambda u + u') = \left(\lambda\frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1} + \frac{u'_0 + u'_1 + \cdots + u'_n}{n+1}\right)_{n\geqslant 0} = \lambda\left(\frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}\right)_{n\geqslant 0} + \left(\frac{u'_0 + u'_1 + \cdots + u'_n}{n+1}\right)_{n\geqslant 0}$$

$\Delta(\lambda u + u') = \lambda\Delta(u) + \Delta(u')$. Ainsi Δ est linéaire.

Δ étant une application de E dans E (si $u \in E$, $v = \Delta(u)$ est bien une suite de réels indexée par $\mathbb{N}$), Δ est alors un endomorphisme de E.

Q2 Montrons à l'aide d'une récurrence "forte" que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0$.

Remarquons d'abord que $u \in \operatorname{Ker}(\Delta - \lambda \mathrm{Id}_E)$ donc $\Delta(u) = \lambda u$ et ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1} = \lambda u_n$.

- $u_0 = \lambda u_0$; $(\lambda - 1) u_0 = 0$. Or $\lambda \notin S = \{\frac{1}{p+1} ; p \in \mathbb{N}\}$ donc λ est différent de $\frac{1}{0+1} = 1$. Ainsi $u_0 = 0$.

- Supposons que pour n dans $\mathbb{N}$ on ait : $u_0 = u_1 = \cdots = u_n = 0$. Montrons alors que $u_{n+1} = 0$.

$\lambda u_{n+1} = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_{n+1}}{n+2} \overset{HR}{=} \frac{u_{n+1}}{n+2}$; alors $\left(\lambda - \frac{1}{n+2}\right) u_{n+1} = 0$.

Or $\lambda \notin S$ donc $\lambda \neq \frac{1}{n+2}$; ainsi $u_{n+1} = 0$. Ceci achève la récurrence.

Finalement $\underline{u = 0_E}$. Par conséquent $\underline{\mathrm{Ker}(\Delta - \lambda \mathrm{Id}_E) = \{0_E\}}$.

Ce qui précède montre que les éléments de $\mathbb{R} \setminus S$ ne sont pas des éléments du spectre de Δ. Alors $\underline{\text{le spectre de } \Delta \text{ est contenu dans } S = \{\frac{1}{p+1} ; p \in \mathbb{N}\}}$.

$0 \notin S$ donc $0 \notin \mathrm{Sp}\,\Delta$ et ainsi $\underline{\Delta \text{ est injectif}}$.

Q3 a) Posons $v = (v_n)_{n \geq 0} = \Delta(u)$. Montrons que $v = \lambda u$ où $\lambda = \frac{1}{p+1}$.

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \lambda u_n$.

Si $p \geq 1$: $\forall n \in [\![0, p-1]\!]$, $u_n = 0$

Si $p \geq 1$: $\forall n \in [\![0, p-1]\!]$, $v_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1} = 0 = \lambda \times 0 = \lambda u_n$.

Montrons alors que $\forall n \in [\![p, +\infty[\![$, $v_n = \lambda u_n$ ou $v_n = \frac{1}{p+1} u_n$.

Soit $n \in [\![p, +\infty[\![$.

$v_n = \frac{1}{n+1}(u_0 + \cdots + u_n) = \frac{1}{n+1}(u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n) = \frac{1}{n+1}\left[\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n}{p}\right]$

Alors $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Rappel}}}{v_n} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{p+1} \underset{\text{classique}}{\overset{}{=}} \frac{1}{n+1} \frac{n+1}{p+1}\binom{n}{p} = \frac{1}{p+1}\binom{n}{p} = \frac{1}{p+1} u_n = \lambda u_n$.

Finalement $\underline{\Delta(u)=\lambda u}$. Or $u\neq 0_E$ (par exemple $u_p=1$) donc $\lambda=\frac{1}{p+1}$ est une valeur propre de Δ et u est un vecteur propre associé.

b) Nous venons de voir que $\forall p\in\mathbb{N}$, $\frac{1}{p+1}\in Sp\,\Delta$.

Ainsi $\mathcal{S}\subset Sp\,\Delta$. Dans Q2 nous avons vu que $Sp\,\Delta\subset\mathcal{S}$.

Finalement $\underline{Sp\,\Delta=\mathcal{S}=\{\frac{1}{p+1}\,;\,p\in\mathbb{N}\}}$.

Q4 Posons $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n(p)=\begin{cases}\binom{n}{p} & \text{si } n\geq p\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Q3 nous a montré que $(u_n(p))_{n\geq0}$ est un élément non nul de $SEP(\Delta,\frac{1}{p+1})$. Alors $Vect\left((u_n(p))_{n\geq0}\right)\subset SEP(\Delta,\frac{1}{p+1})$. Nous allons montrer l'inclusion contraire. Posons $\lambda=\frac{1}{p+1}$ et prenons un élément $u=(u_n)_{n\geq0}$ de $SEP(\Delta,\frac{1}{p+1})=SEP(\Delta,\lambda)$. Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{u_0+u_1+\dots+u_n}{n+1}=\lambda u_n$.

Si $u=0_E$ il est alors clair que $u\in Vect\left((u_n(p))_{n\geq0}\right)$.

Supposons $u\neq0_E$. Soit k le plus petit élément de $\{n\in\mathbb{N},\, u_n\neq0\}$ (il existe car $\{n\in\mathbb{N}\mid u_n\neq0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$).

Au choix près nous pouvons écrire que $u_0=u_1=\dots=u_{k-1}=0$.

Dans tous les cas nous avons $\frac{u_0+u_1+\dots+u_k}{k+1}=\frac{u_k}{k+1}$ et $\frac{u_0+u_1+\dots+u_k}{k+1}=\lambda u_k$.

Ainsi $\frac{u_k}{k+1}=\lambda u_k=\frac{u_k}{p+1}$. Comme u_k n'est pas nul : $\frac{1}{k+1}=\frac{1}{p+1}$; $k=p$.

Montrons alors que $\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=u_p\times u_n(p)}$ (ouf !!).

C'est déjà clair pour $n\in[\![0,p-1]\!]$ (si cet ensemble n'est pas vide...) car $u_0=u_1=\dots=u_{p-1}=0$ et $u_0(p)=u_1(p)=\dots=u_{p-1}(p)=0$.

Montrons à l'aide d'une récurrence forte que $\forall n\in[\![p,+\infty[\![$, $u_n=u_p\,u_n(p)$

R.

- La propriété est vraie pour $p=1$ car $u_p = u_p \times 1 = u_p \times u_p(p)$.
- Soit $n \in [\![p, +\infty[\![$. Supposons la propriété vraie pour tous les éléments de $[\![p, n]\!]$ et montrons-la pour $n+1$.

$(u_n)_{n\geq 0} \in SEP(\Delta, \lambda)$ donc $\dfrac{u_0+u_1+\cdots+u_{n+1}}{n+2} = \lambda u_{n+1}$ et ainsi

↑↑ désolé...

$u_0+u_1+\cdots+u_n = (\lambda(n+2)-1)\, u_{n+1}$. De même comme $(u_n(p))_{n\geq 0} \in SEP(\Delta,\lambda)$

$u_0(p)+u_1(p)+\cdots+u_n(p) = (\lambda(n+2)-1)\, u_{n+1}(p)$.

Ainsi $(\lambda(n+2)-1)\, u_{n+1} = u_0+u_1+\cdots+u_n \underset{HR}{=} u_p\left[u_0(p)+u_1(p)+\cdots+u_n(p)\right]$.

Donc $(\lambda(n+2)-1)\, u_{n+1} = u_p\, (\lambda(n+2)-1)\, u_{n+1}(p)$.

Ou $(\lambda(n+2)-1)\left[u_{n+1} - u_p\, u_{n+1}(p)\right] = 0$.

Or $\lambda = \dfrac{1}{p+1}$ et $n+2 \geq p+2$ donc $\lambda(n+2) \geq \dfrac{p+2}{p+1} > 1$.

Alors $\lambda(n+2)-1 \neq 0$. Ainsi $u_{n+1} = u_p\, u_{n+1}(p)$ et la récurrence s'achève.

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_p\, u_n(p)$. Posons $\sigma = u_p$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sigma\, u_n(p)$; $(u_n)_{n\geq 0} = \sigma\, (u_n(p))_{n\geq 0}$.

Donc $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathrm{Vect}\left((u_n(p))_{n\geq 0}\right)$ et ceci achève de montrer que

$SEP(\Delta, \frac{1}{p+1}) = \mathrm{Vect}\left((u_n(p))_{n\geq 0}\right)$.

$\forall p \in \mathbb{N},\ SEP(\Delta, \frac{1}{p+1}) = \mathrm{Vect}\left((u_n(p))_{n\geq 0}\right)$ où $(u_n(p))_{n\geq 0}$ est la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n(p) = \begin{cases} \binom{n}{p} & \text{si } n \geq p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

(Q5) • Une petite analyse pour commencer.

Soit $u=(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$. Posons $v=(v_n)_{n\geqslant 0}=\Delta(u)$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{u_0+u_1+\cdots+u_n}{n+1}=v_n$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_0+u_1+\cdots+u_n=(n+1)v_n$.

Alors $u_0=v_0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=(u_0+\cdots+u_n)-(u_0+\cdots+u_{n-1})=(n+1)v_n-nv_{n-1}$.

Donc $u_0=v_0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=(n+1)v_n-nv_{n-1}$

Remarque.. Ceci montre qu'un élément de E a au plus un antécédent par Δ dans E, non ? On retrouve ainsi l'injectivité de Δ et cela donne surtout la possibilité de montrer que Δ est surjectif.

• Montrons que Δ est surjectif. Soit $\omega=(\omega_n)_{n\geqslant 0}\in E$.

Posons $u_0=\omega_0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=(n+1)\omega_n-n\omega_{n-1}$.

Posons encore $u=(u_n)_{n\geqslant 0}$. $u\in E$. Montrons que $\Delta(u)=\omega$.

Soit à montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{u_0+u_1+\cdots+u_n}{n+1}=\omega_n$.

C'est égalité est claire pour $n=0$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\frac{u_0+u_1+\cdots+u_n}{n+1}=\frac{1}{n+1}\left[\omega_0+\sum_{k=1}^{n}\big((k+1)\omega_k-k\omega_{k-1}\big)\right]=\frac{1}{n+1}\left[\omega_0+(n+1)\omega_n-\omega_0\right]=\omega_n.$$

Finalement $\forall n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{u_0+u_1+\cdots+u_n}{n+1}=\omega_n$. $\Delta(u)=\omega$.

Nous venons de montrer que : $\forall\omega\in E$, $\exists u\in E$, $\Delta(u)=\omega$.

Ainsi Δ est surjectif.

Δ est un endomorphisme injectif et surjectif de E. Δ est un automorphisme de E.

Remarque.. Soit $u=(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$. Posons $v=(v_n)_{n\geqslant 0}=\Delta^{-1}(u)$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=\begin{cases} u_0 & \text{si } n=0\\ (n+1)u_n-nu_{n-1} & \text{si } n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$.

R.

EXERCICE 52 **N2** **Endomorphisme d'un espace vectoriel de suites 4 ESCP 2010 2.3.**

On note $\mathcal{S} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}},$ avec $x_n \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n, \lim\limits_{n\to-\infty} x_n$ existent$\}$.

Nous comprendrons que $\mathcal{S}$ est l'ensemble des suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ indexées pas $\mathbb{Z}$ telles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ soient convergentes (donc de limites finies...).

Q1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{Z}$.

Soit T l'application définie sur $\mathcal{S}$ par $T((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, avec pour tout $n \in \mathbb{Z} : y_n = x_{n-1} + x_{n+1}$.

Q2. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{S}$. Déterminer son noyau.

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse aux valeurs propres réelles de T, c'est-à-dire aux réels λ tels que $\mathrm{Ker}(T-\lambda Id) \neq \{0\}$, *où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathcal{S}$ et on pose* $A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$.

Q3. Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose $U_k = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix}$.

Montrer que $x \in \mathrm{Ker}(T - \lambda Id)$ si et seulement si pour tout k de $\mathbb{Z}$, $U_{k+1} = A_\lambda U_k$.

En déduire que pour tout k de $\mathbb{Z}$, on a alors : $U_k = A_\lambda^k U_0$... si $x \in \mathrm{Ker}\,(T-\lambda Id)$!

Q4. a) On suppose que $\lambda \notin \{-2, 2\}$. Montrer que A_λ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

En déduire que si $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Ker}(T - \lambda Id)$, il existe des nombres complexes $\alpha, \beta, \mu_1, \mu_2$ tels que, pour tout k de $\mathbb{Z}$, on ait : $x_k = \alpha\mu_1^k + \beta\mu_2^k$.

En distinguant les deux cas $|\lambda| > 2$ et $|\lambda| < 2$, montrer que $\mathrm{Ker}(T - \lambda Id) = \{0\}$.

b) Que peut-on dire de $\mathrm{Ker}(T - 2Id)$?

c) Montrer que $\mathrm{Ker}(T + 2Id) = \{0\}$.

Conclure.

Q1 Notons E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des suites réelles indexées par $\mathbb{Z}$.

- $\underline{\mathcal{S} \subset E}$.
- Il est clair que $0_E \in \mathcal{S}$ donc $\underline{\mathcal{S} \neq \emptyset}$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ deux éléments de $\mathcal{S}$.

Les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

Donc les suites $\lambda(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\lambda(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}} + (y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent comme combinaisons linéaires de deux suites convergentes. Alors les suites $(\lambda x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\lambda x_{-n} + y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent donc $\lambda x + y = (\lambda x_n + y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un élément de $\mathcal{S}$.

$\underline{\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in \mathcal{S}^2,\ \lambda x + y \in \mathcal{S}}$.

Ceci achève de montrer que <u>$\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{Z}$.</u>

(Q2) • Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un élément de $\mathcal{S}$. Posons $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}} = T((x_n)_{n\in\mathbb{Z}})$.

$\forall n\in\mathbb{Z},\ y_n = x_{n-1}+x_{n+1}$. $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in E$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ y_n = x_{n-1}+x_{n+1}$ et $y_{-n} = x_{-n-1}+x_{-n+1}$.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites convergentes. Alors les suites $(x_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_{-n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Par somme $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Alors $y\in\mathcal{S}$. $T((x_n)_{n\in\mathbb{Z}})\in\mathcal{S}$.

$\forall x\in\mathcal{S},\ T(x)\in\mathcal{S}$. T est une application de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$.

• Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soient $x=(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $y=(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ deux éléments de $\mathcal{S}$.

$T(\lambda x+y) = T((\lambda x_n+y_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (\lambda x_{n-1}+y_{n-1}+\lambda x_{n+1}+y_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}} = (\lambda(x_{n-1}+x_{n+1})+(y_{n-1}+y_{n+1}))_{n\in\mathbb{Z}}$.

$T(\lambda x+y) = \lambda(x_{n-1}+x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}} + (y_{n-1}+y_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}} = \lambda T(x)+T(y)$.

$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall(x,y)\in E^2,\ T(\lambda x+y) = \lambda T(x)+T(y)$. T est linéaire.

Ainsi T est un endomorphisme de $\mathcal{S}$.

Soit $x=(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un élément de Ker T. $T(x)=0_{\mathcal{S}}$. $\forall n\in\mathbb{Z},\ x_{n-1}+x_{n+1}=0$.

En particulier $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ x_{n+1} = -x_{n-1}$. Alors $\forall p\in\mathbb{N},\ x_{2p+2} = -x_{2p}$.

$(x_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison (-1). Alors $\forall p\in\mathbb{N},\ x_{2p} = (-1)^p x_0$.

$((-1)^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite divergente. Si $x_0\neq 0$ la suite $(x_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ diverge. Il en est alors de même de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $(x_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge ...).

Ceci contredit l'appartenance de $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ à $\mathcal{S}$.

Ainsi $x_0=0$ et $\forall p\in\mathbb{N},\ x_{2p}=0$. Montrons par récurrence que $\forall p\in\mathbb{N},\ x_{-2p}=0$.

C'est clair pour $p=0$. Supposons que $x_{-2p}=0$ pour $p\in\mathbb{N}$ et montrons que $x_{-2(p+1)}=0$.

Alors $0 = x_{(-2p-1)-1} + x_{(-2p-1)+1} = x_{-2p-2}+x_{-2p} = x_{-2p-2}$. Donc $x_{-2(p+1)}=0$

Ceci achève la récurrence.

$\forall p \in \mathbb{N}$, $x_{2p} = x_{-2p} = 0$. $\underline{\forall n \in \mathbb{Z},\ x_{2n} = 0.}$

$\forall p \in \mathbb{N}^*$, $x_{2p-1} + x_{2p+1} = 0$. $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $x_{2p+1} = -x_{2p-1}$.

Alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $x_{2p+1} = (-1)^p x_1$ et $(x_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ converge. Comme $((-1)^p)_{p\in\mathbb{N}}$ diverge nécessairement $x_1 = 0$. $\forall p \in \mathbb{N}$, $x_{2p+1} = 0$.

Montrons par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}$, $x_{-(2p+1)} = 0$.

$x_{-1} + x_1 = 0$ et $x_1 = 0$ donc $x_{-1} = 0$ et la propriété est vraie pour $p=0$.

Supposons la propriété vraie pour p et montrons la pour $p+1$. $x_{-(2p+1)} = 0$.

$$x_{-(2p+3)} \underset{\substack{\uparrow \\ x_{-(2p+1)}=0}}{=} x_{-(2p+3)} + x_{-(2p+1)} = x_{-(2p+2)-1} + x_{-(2p+2)+1} = 0.$$ Ceci achève la récurrence.

$\forall p \in \mathbb{N}$, $x_{2p+1} = x_{-(2p+1)} = 0$. $\underline{\forall n \in \mathbb{Z},\ x_{2n+1} = 0.}$

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $x_{2n} = x_{2n+1} = 0$ donc $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = 0_{\mathcal{S}}$.

Finalement $\underline{\underline{\operatorname{Ker} T = \{0_{\mathcal{S}}\}}}$.

(Q3) $x \in \operatorname{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{S}}) \Leftrightarrow T(x) = \lambda x \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}$, $x_{k-1} + x_{k+1} = \lambda x_k$.

$x \in \operatorname{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{S}}) \Leftrightarrow \forall \ell \in \mathbb{Z}$, $x_\ell + x_{\ell+2} = \lambda x_{\ell+1}$ ($k \mapsto k-1$ est une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$!).

$x \in \operatorname{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{S}}) \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}$, $\begin{cases} x_{k+1} = x_{k+1} & ! \\ -x_k + \lambda x_{k+1} = x_{k+2} \end{cases}$

$x \in \operatorname{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{S}}) \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}$, $\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ -x_k + \lambda x_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+2} \end{pmatrix}$.

Ainsi $x \in \operatorname{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{S}}) \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}$, $A_\lambda U_k = U_{k+1}$.

$\underline{\underline{x \in \operatorname{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{S}}) \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z},\ U_{k+1} = A_\lambda U_k.}}$

<u>Remarque</u>. $A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \times \lambda - (-1)(1) = 1 \neq 0$. <u>$A_\lambda$ est donc inversible.</u>

Alors A_λ^n est définie pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Rappelons que si $n \in \mathbb{Z}$ et $n < 0$, $A^n = (A^{-1})^{-n}$ ou $(A^{-n})^{-1}$.

- Supposons que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $U_k = A_\lambda^k U_0$.

  Alors $\forall k \in \mathbb{Z}$, $U_{k+1} = A_\lambda^{k+1} U_0 = A(A_\lambda^k U_0) = A U_k$ donc $x \in \mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

- Réciproquement supposons que $x \in \mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id}_E)$. Alors $\forall k \in \mathbb{Z}$, $U_{k+1} = A_\lambda U_k$

  Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $U_{-k} = A_\lambda^{-k} U_0$ et $U_k = A_\lambda^k U_0$.

  - La propriété est vraie pour $k=0$ car $A_\lambda^{-0} = A_\lambda^0 = I_2$.
  - Supposons la propriété vraie pour k dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$.

    $A_\lambda U_{-k-1} = U_{-k-1+1}$ donc $U_{-(k+1)} = A_\lambda^{-1} U_{-k} = A_\lambda^{-1} A_\lambda^{-k} U_0 = A_\lambda^{-(k+1)} U_0$.

    $A_\lambda U_k = U_{k+1}$ donc $U_{k+1} = A_\lambda U_k = A_\lambda A_\lambda^k U_0 = A_\lambda^{k+1} U_0$. Ceci achève la récurrence.

  Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}$, $U_{-k} = A_\lambda^{-k} U_0$ et $U_k = A_\lambda^k U_0$. Donc $\forall k \in \mathbb{Z}$, $U_k = A_\lambda^k U_0$.

Finalement $x \in \mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z},\ U_k = A_\lambda^k U_0$.

Q4) a) $\lambda \notin \{-2, 2\}$. Soit $\mu \in \mathbb{C}$.

$\mu \in \mathrm{Sp}(A_\lambda) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\mu & 1 \\ -1 & \lambda-\mu \end{pmatrix}$ non inversible $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\mu & 1 \\ -1 & \lambda-\mu \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\mu(\lambda-\mu)+1 = 0 \Leftrightarrow \mu^2 - \lambda\mu + 1 = 0$.

Le discriminant de l'équation du second degré $\mu \in \mathbb{C}$ et $\mu^2 - \lambda\mu + 1 = 0$ est $\lambda^2 - 4$.

Or $\lambda^2 - 4 \neq 0$ car $\lambda \notin \{-2, 2\}$. Ainsi cette équation admet deux solutions distinctes

μ_1 et μ_2.

Alors $\mathrm{Sp}\, A_\lambda = \{\mu_1, \mu_2\}$, $\mu_1 \neq \mu_2$ et $A_\lambda \in M_2(\mathbb{C})$ donc A_λ est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$.

Ainsi il existe une matrice inversible P de $M_2(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1} A_\lambda P = D_\lambda$ où

$D_\lambda = \mathrm{Diag}(\mu_1, \mu_2)$. $A_\lambda = P D_\lambda P^{-1}$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $A_\lambda^k = (P D_\lambda P^{-1})^k = P D_\lambda^k P^{-1} = P\, \mathrm{Diag}(\mu_1^k, \mu_2^k) P^{-1}$. Soit $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

On a $A_\lambda^k = (A_\lambda^{-1})^{-k} = ((P D_\lambda P^{-1})^{-1})^{-k}$.

$\mathrm{Sp}\, D_\lambda = \mathrm{Sp}\, A_\lambda$ et A_λ est inversible. Donc $0 \notin \mathrm{Sp}\, A_\lambda$. Alors $0 \notin \mathrm{Sp}\, D_\lambda$. D_λ est inversible.

Ainsi $(P D_\lambda P^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1} D_\lambda^{-1} P^{-1} = P D_\lambda^{-1} P^{-1} = P\, \mathrm{Diag}(\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}) P^{-1}$

Ainsi $A_\lambda^k = (P D_\lambda^{-1} P^{-1})^{-k} = (P\, \mathrm{Diag}(\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}) P^{-1})^{-k}$.

ce qui donne : $A_\lambda^k = P(D_\lambda^{-1})^{-k}P^{-1} = P\left(\mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\rho_1},\frac{1}{\rho_2}\right)\right)^{-k}P^{-1}$ car $-k\in\mathbb{N}$.

donc $A_\lambda^k = P D_\lambda^k P^{-1} = P\,\mathrm{Diag}\left(\left(\frac{1}{\rho_1}\right)^{-k},\left(\frac{1}{\rho_2}\right)^{-k}\right)P^{-1} = P\,\mathrm{Diag}(\rho_1^k,\rho_2^k)P^{-1}$.

Finalement $\forall k\in\mathbb{Z}$, $A_\lambda^k = P D_\lambda^k P^{-1} = P\,\mathrm{Diag}(\rho_1^k,\rho_2^k)P^{-1}$.

Soit $x=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un élément de $\mathrm{Ker}(T-\lambda\,\mathrm{Id}_{\mathcal{S}})$. Soit $k\in\mathbb{Z}$.

x_k est la première ligne de U_k donc de $PD_\lambda^kP^{-1}U_0$ ou de $PD_\lambda^kP^{-1}\begin{pmatrix}x_0\\x_1\end{pmatrix}$.

Intéressons nous à la première ligne de $PD_\lambda^kP^{-1}$. Posons $P=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ et $P^{-1}=\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}$.

$D_\lambda^kP^{-1}=\begin{pmatrix}\rho_1^k&0\\0&\rho_2^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a'\rho_1^k&b'\rho_1^k\\c'\rho_2^k&d'\rho_2^k\end{pmatrix}$.

la première ligne de $PD_\lambda^kP^{-1}$ est alors $(aa'\rho_1^k+bc'\rho_2^k \quad ab'\rho_1^k+bd'\rho_2^k)$

comme x_k est la première ligne $PD_\lambda^kP^{-1}\begin{pmatrix}x_0\\x_1\end{pmatrix}$ il vient :

$x_k=(aa'\rho_1^k+bc'\rho_2^k)x_0+(ab'\rho_1^k+bd'\rho_2^k)x_1$ ou :

$x_k=(aa'x_0+ab'x_1)\rho_1^k+(bc'x_0+bd'x_1)\rho_2^k$.

Posons $\alpha=aa'x_0+ab'x_1$ et $\beta=bc'x_0+bd'x_1$. $\alpha\in\mathbb{C}$ et $\beta\in\mathbb{C}$.

$x_k=\alpha\rho_1^k+\beta\rho_2^k$ et ceci pour tout k dans $\mathbb{Z}$.

$\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2, \exists(\rho_1,\rho_2)\in\mathbb{C}^2, \forall k\in\mathbb{Z}, x_k=\alpha\rho_1^k+\beta\rho_2^k$.

__Exercice__ 1. Montrer que l'on peut prendre $P=\begin{pmatrix}1&1\\\rho_1&\rho_2\end{pmatrix}$

Montrer alors que $P^{-1}=\dfrac{1}{\rho_1-\rho_2}\begin{pmatrix}-\rho_2&1\\\rho_1&-1\end{pmatrix}$ et que pour tout $k\in\mathbb{Z}$

$$x_k=\frac{x_1-x_0\rho_2}{\rho_1-\rho_2}\rho_1^k+\frac{x_0\rho_1-x_1}{\rho_1-\rho_2}\rho_2^k.$$

2. Retrouver ce résultat en utilisant le cours sur les suites satisfaisant à une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

Rappelons que r_1 et r_2 sont les solutions de l'équation du second degré $z \in \mathbb{C}$ et $z^2 - \lambda z + 1 = 0$ dont le discriminant est $\lambda^2 - 4$.

<u>1er cas</u> $|\lambda| > 2$. Alors $\lambda^2 > 4$. $\lambda^2 - 4 > 0$. Donc $r_1 \in \mathbb{R}$ et $r_2 \in \mathbb{R}$.

$x_0 = \alpha + \beta$ et $x_1 = \alpha r_1 + \beta r_2$. Un calcul simple donne $\alpha = \dfrac{x_1 - x_0 r_2}{r_1 - r_2}$ et $\beta = \dfrac{x_0 r_1 - x_1}{r_1 - r_2}$.

Ainsi α et β sont réels.

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $x_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$. $r_1 r_2 = 1$ et $r_1 + r_2 = \lambda$.

Alors $1 = |r_1 r_2| = |r_1|\,|r_2|$ et $2 < |\lambda| = |r_1 + r_2| \leq |r_1| + |r_2|$.

Si $|r_1| = |r_2|$ alors $|r_1| = |r_2| = 1$ et $2 < |r_1| + |r_2| = 2$!!

Donc $|r_1| \neq |r_2|$. Quitte à échanger r_1 et r_2 supposons $|r_1| < |r_2|$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = r_2^n \left[\alpha\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^n + \beta\right]$ or $\left|\dfrac{r_1}{r_2}\right| = \dfrac{|r_1|}{|r_2|} < 1$. Par conséquent $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left(\alpha\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^n + \beta\right) = \beta$. Supposons $\beta \neq 0$. $x_n \underset{n \mapsto +\infty}{\sim} \beta r_2^n$.

$|x_n| \underset{n \mapsto +\infty}{\sim} |\beta|\,|r_2|^n$. Or $|r_1| < |r_2|$ donc $|r_1|\,|r_2| < |r_2|^2$; $1 = |r_1 r_2| < |r_2|^2$.

Ainsi $|r_2| > 1$ et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} |x_n| = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} (|\beta|\,|r_2|^n) = +\infty$. Ceci contredit la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, $(|x_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge).

Donc $\beta = 0$. $\forall n \in \mathbb{Z}$, $x_n = \alpha r_1^n$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{-n} = \alpha r_1^{-n} = \alpha \left(\dfrac{1}{r_1}\right)^n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{-n}| = |\alpha| \left|\dfrac{1}{r_1}\right|^n$. Or $\left|\dfrac{1}{r_1}\right| = \left|\dfrac{r_2}{r_1 r_2}\right| = |r_2| > 1$.

Si $|\alpha| \neq 0$ $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left(|\alpha| \left|\dfrac{1}{r_1}\right|^n\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} |x_{-n}| = +\infty$. Ceci contredit la convergence de $(x_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$. Donc $|\alpha| = 0$. Ainsi $\alpha = 0$. $\alpha = \beta = 0$.

Alors <u>$(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est la suite nulle.</u>

<u>2ème cas</u>.. $|\lambda|<2$. Alors r_1 et r_2 sont complexes et conjuguées... et non réels !

$\exists \rho\in\mathbb{R}_+^*, \exists \theta\in]0,\pi[\cup]\pi,2\pi[, r_1=\rho e^{i\theta}$ et $r_2=\rho e^{-i\theta}$

de plus $r_1 r_2=1$. Alors $\rho^2=1$ et $\rho>0$ donc $\rho=1$. $r_1=e^{i\theta}$ et $r_2=e^{-i\theta}$.

Soit $n\in\mathbb{Z}$. $x_n\in\mathbb{R}$ et $x_n=\alpha e^{in\theta}+\beta e^{-in\theta}$. $x_n=Re(x_n)=Re(\alpha e^{in\theta}+\beta e^{-in\theta})$.

donc $x_n=Re(\alpha e^{in\theta})+Re(\beta e^{-in\theta})$. Pour $\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$ et $\beta=\beta_1+i\beta_2$ avec $(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}^2$ et

$(\beta_1,\beta_2)\in\mathbb{R}^2$. $x_n=Re\left((\alpha_1+i\alpha_2)(\cos n\theta+i\sin n\theta)+(\beta_1+i\beta_2)(\cos n\theta-i\sin n\theta)\right)$

$x_n=\alpha_1\cos n\theta+\beta_1\cos n\theta-\alpha_2\sin n\theta+\beta_2\sin n\theta$. Posons $a=\alpha_1+\beta_1$ et $b=\beta_2-\alpha_2$.

Alors $x_n=a\cos(n\theta)+b\sin(n\theta)$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{Z}$.

$\forall n\in\mathbb{Z}$, $\frac{1}{2}(x_n+x_{-n})=\frac{1}{2}\left(a\cos(n\theta)+b\sin(n\theta)+a\cos(n\theta)-b\sin(n\theta)\right)=a\cos(n\theta)$.

Or les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc la suite $(a\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

<u>Supposons $a\neq 0$</u>. Alors la suite $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ sa limite.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\cos((n+1)\theta)=\cos(n\theta)\cos\theta-\sin(n\theta)\sin\theta$ et $\sin\theta\neq 0$ car $\theta\in]0,\pi[\cup]\pi,2\pi[$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sin(n\theta)=\frac{1}{\sin\theta}\left[\cos(n\theta)\cos\theta-\cos((n+1)\theta)\right]$.

Alors la suite $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ converge comme combinaison linéaire de deux suites convergentes.

Notons ℓ' sa limite.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\cos^2(n\theta)+\sin^2(n\theta)=1$, $\cos^2(n\theta)=\frac{1+\cos(2\theta)}{2}$, $\sin^2(n\theta)=\frac{1-\cos(2\theta)}{2}$ et $\sin(2n\theta)=2\sin(n\theta)\times\cos(n\theta)$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient :

$\ell^2+\ell'^2=1$, $\ell^2=\frac{1}{2}(1+\ell)$, $\ell'^2=\frac{1}{2}(1-\ell)$ et $\ell'=2\ell\ell'$.

$0=2\ell^2-\ell-1=(\ell-1)(2\ell+1)$. Ainsi $\ell=1$ ou $\ell=\frac{-1}{2}$

Supposons $\ell=1$. Alors $\ell'^2=\frac{1}{2}(1-1)=0$. $\ell'=0$

Or $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sin(n\theta)=\frac{1}{\sin\theta}\left[\cos(n\theta)\cos\theta-\cos((n+1)\theta)\right]$

En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient $0=\frac{1}{\sin\theta}[\cos\theta-1]$.

Alors $\cos\theta=1$. Ceci est impossible car $\theta\in]0,\pi[\cup]\pi,2\pi[$

Supposons $\ell = -\frac{1}{2}$. $\ell' = 2(-\frac{1}{2})\ell'$; $\ell' = -\ell'$; $\ell' = 0$.

Alors $1 = \ell^2 + \ell'^2 = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}$!!

Finalement $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas ! Il est donc impossible d'avoir $a \neq 0$.

Ainsi $a = 0$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $x_n = b \sin(n\theta)$.

<u>Supposons $b \neq 0$</u>. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\sin((n+1)\theta) = \sin n\theta \cos\theta + \cos(n\theta)\sin\theta$ et $\sin\theta \neq 0$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\cos(n\theta) = \frac{1}{\sin\theta}\left(\sin((n+1)\theta) - \sin(n\theta)\cos\theta\right)$. Alors la suite $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$

converge comme combinaison linéaire de deux suites convergentes. Or nous avons vu

que cela est impossible. Ainsi on ne peut pas avoir $b \neq 0$. Alors $b = 0$.

Dans ces conditions $\forall n \in \mathbb{Z}$, $x_n = 0$. $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est la suite nulle.

Finalement dans les deux cas si $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ appartient à $\mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{S}})$, $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est la suite

nulle. Ceci suffit pour dire que <u>$\mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{S}}) = \{0_{\mathcal{S}}\}$.</u>

b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un élément de $\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{Id}_{\mathcal{S}})$.

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $x_{n-1} + x_{n+1} = 2x_n$. $\forall n \in \mathbb{Z}$, $x_{n+1} - x_n = x_n - x_{n-1}$. Alors la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$

est constante. $\exists \hat{a} \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $x_{n+1} - x_n = \hat{a}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

En notant L sa limite et en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité précédente il vient :

$L - L = \hat{a}$. Donc $\hat{a} = 0$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n$. $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est constante.

$\exists \hat{b} \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $x_n = \hat{b}$. Posons $\forall n \in \mathbb{Z}$, $u_n = 1$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{-n} = 1$ donc $u \in \mathcal{S}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Vect}(u)$.

$\uparrow$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, $x_n = \hat{a} = \hat{a}\, u_n$.

Alors $\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{Id}_{\mathcal{S}}) \subset \mathrm{Vect}(u)$.

$u \in \mathcal{S}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $u_{n+1} + u_{n-1} = 2 = 2u_n$. Alors $u \in \mathcal{S}$ et $T(u) = 2u$.

Par conséquent $u \in \mathrm{Ker}(T - 2Id_S)$. Alors $\mathrm{Vect}(u) \subset \mathrm{Ker}(T-2Id_S)$ car $\mathrm{Ker}(T-2Id_S)$ est un sous-espace vectoriel de S.

Finalement $\mathrm{Ker}(T-2Id_S) = \mathrm{Vect}(u)$ où u est la suite de S dont tous les termes sont égaux à 1.

c) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Ker}(T+2Id_S)$. $T((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = -2(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $x_{n+1} + x_{n-1} = -2x_n$

En particulier $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} + x_n = (-1)(x_n + x_{n-1})$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} + x_n = (-1)^n (x_1 + x_0)$. $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ appartient à S donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Alors $(x_{n+1} + x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc $((-1)^n(x_1+x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Si $x_1 + x_0 \neq 0$ alors on obtient la convergence de $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$!!

Ainsi $x_1 + x_0 = 0$. Alors $x_1 = -x_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} + x_n = 0$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = -x_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = (-1)^n x_0$. La convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne la convergence de $((-1)^n x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ qui exige $x_0 = 0$ car $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

$x_0 = 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = (-1)^n x_0 = 0$. Montrons par récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{-n} = 0$.

- C'est vrai pour $n = 0$. De plus $x_{-1} + x_1 = -2x_0$ donc $x_{-1} = -x_1 - 2x_0 = 0$.
  L'égalité est vraie pour $n=0$ et $n=1$.
- Supposons la propriété vraie pour n et $n+1$ avec $n \in \mathbb{N}$. Alors $x_{-n} = x_{-n-1} = 0$.
  $x_{-n-2} + x_{-n} = -2x_{-n-1}$. Donc $x_{-(n+2)} = -x_{-n} - 2x_{-n-1} = 0$. Ceci achève la récurrence.

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = 0$ et $x_{-n} = 0$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = 0_S$.

Ici encore $\mathrm{Ker}(T+2Id_S) = \{0_S\}$.

Conclusion 1) 2 est la seule valeur propre de T.

2) $SEP(T,2) = \mathrm{Vect}(u)$ où u est la suite constante de S égale à 1,

EXERCICE 53 **N1** **Un marronnier !**

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n non nulle. a et b sont deux éléments distincts de $\mathbb{K}$.

f est un endomorphisme de E tel que $(f - a\,\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\,\mathrm{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que f est diagonalisable.

Thème abordé dans LYON 1993 MI Pb 1, EDHEC 2006 ex 1, oral ESCP 2005 2.9. Thème implicitement contenu dans ESCP 2006 2.17.

Dans une QSP ESCP 2008 on trouve $A(A - \alpha I_n) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ avec $\alpha \neq 0$...

- $(X-a)(X-b)$ est un polynôme annulateur de f dont les zéros sont a et b. $\underline{\mathrm{Sp} f \subset \{a, b\}}$.
- Posons $F_a = \mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{Id}_E)$ et $F_b = \mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{Id}_E)$.

Montrons que F_a et F_b sont supplémentaires.

Soit $x \in E$. Montrons par analyse-synthèse qu'il existe un unique couple (y, z) de $F_a \times F_b$ tel que $x = y + z$.

<u>Analyse</u> → <u>Supposons</u> que $y \in F_a$, $z \in F_b$ et $x = y + z$.

$f(x) = f(y) + f(z) = ay + bz$, $ax = ay + az$ et $bx = by + bz$.

Alors $f(x) - bx = ay + bz - by - bz = (a-b)y$; $\underline{y = \dfrac{1}{a-b}(f(x) - bx)}$.

$f(x) - ax = ay + bz - ay - az = (b-a)z$; $\underline{z = \dfrac{1}{b-a}(f(x) - ax)}$.

ce qui achève de montrer l'unicité du couple (y, z).

<u>Synthèse</u> → <u>Posons</u> $y = \dfrac{1}{a-b}(f(x) - bx)$ et $z = \dfrac{1}{b-a}(f(x) - ax)$. Notons que $z = \dfrac{1}{a-b}(ax - f(x))$.

$y + z = \dfrac{1}{a-b}(f(x) - bx - f(x) + ax) = \dfrac{1}{a-b}(a-b)\,x = x$; $\underline{y + z = x}$.

$(f - a\,\mathrm{Id}_E)\circ(f - b\,\mathrm{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

$(f - a\,\mathrm{Id}_E)(y) = \dfrac{1}{a-b}(f - a\,\mathrm{Id}_E)(f(x) - bx) = \dfrac{1}{a-b}\big((f - a\,\mathrm{Id}_E)\circ(f - b\,\mathrm{Id}_E)\big)(x) = 0_E$; $\underline{y \in F_a}$.

Notons que $(f - a\,\mathrm{Id}_E)\circ(f - b\,\mathrm{Id}_E) = f^2 - bf - af + ab\,\mathrm{Id}_E = (f - b\,\mathrm{Id}_E)\circ(f - a\,\mathrm{Id}_E)$.

Alors $(f - b\,\mathrm{Id}_E)\circ(f - a\,\mathrm{Id}_E) = (f - a\,\mathrm{Id}_E)\circ(f - b\,\mathrm{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Donc $(f - b\,\mathrm{Id}_E)(z) = \dfrac{1}{b-a}(f - b\,\mathrm{Id}_E)(f(x) - ax) = \dfrac{1}{b-a}\big((f - b\,\mathrm{Id}_E)\circ(f - a\,\mathrm{Id}_E)\big)(x) = 0_E$; $\underline{z \in F_b}$.

Ainsi $x = y + z$ et $(y, z) \in F_a \times F_b$. Ce qui achève de montrer l'existence du couple (y, z).

$\forall x \in E, \exists! (y,z) \in F_a \times F_b$, $x = y + z$. Ainsi $E = F_a \oplus F_b$.

Alors $\underline{\underline{E = \mathrm{Ker}(f - a\,Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - b\,Id_E)}}$.

Envisageons trois cas.

1er cas.. $\mathrm{Ker}(f - a\,Id_E) = \{0_E\}$. Alors $E = \mathrm{Ker}(f - b\,Id_E)$. $f - b\,Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $f = b\,Id_E$.

Alors $\mathrm{Sp}\,f = \{b\}$ et f est diagonalisable.

Remarque.. si $f = b\,Id_E$ alors $\mathrm{Ker}(f - b\,Id_E) = E$ et nécessairement $\mathrm{Ker}(f - a\,Id_E) = \{0_E\}$.

2ème cas.. $\mathrm{Ker}(f - b\,Id_E) = \{0_E\}$. Alors $E = \mathrm{Ker}(f - a\,Id_E)$. $f - a\,Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $f = a\,Id_E$

Alors $\mathrm{Sp}\,f = \{a\}$ et f est diagonalisable.

Remarque.. si $f = a\,Id_E$ alors $\mathrm{Ker}(f - a\,Id_E) = E$ et nécessairement $\mathrm{Ker}(f - b\,Id_E) = \{0_E\}$.

3ème cas.. $\mathrm{Ker}(f - a\,Id_E) \neq \{0_E\}$ et $\mathrm{Ker}(f - b\,Id_E) \neq \{0_E\}$. Alors a et b sont valeurs propres de f. Comme $\mathrm{Sp}\,f \subset \{a, b\}$: $\mathrm{Sp}\,f = \{a, b\}$.

De plus $E = \mathrm{Ker}(f - a\,Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - b\,Id_E) = SEP(f, a) \oplus SEP(f, b)$.

Donc f est diagonalisable.

Conclusion. 1°/ f est toujours diagonalisable

2°/ si $f = a\,Id_E$, $\mathrm{Sp}\,f = \{a\}$

3°/ si $f = b\,Id_E$, $\mathrm{Sp}\,f = \{b\}$

4°/ si $f \neq a\,Id_E$ et $f \neq b\,Id_E$ alors $\mathrm{Sp}\,f = \{a, b\}$.

R

EXERCICE 54

Exercice $\mathbf{f \circ g - g \circ f = g}$ $n \in \mathbb{N}^*$

E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$. f et g sont deux endomorphismes de E tel que : $f \circ g - g \circ f = g$.

Q1. Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}$: $f \circ g^k - g^k \circ f = kg^k$.

Q2. Pour tout u dans $\mathcal{L}(E)$ on pose : $\varphi(u) = f \circ u - u \circ f$.

a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

b) Montrer, en raisonnant par l'absurde, que g est nilpotent (c'est à dire qu'il existe r dans $\mathbb{N}$ tel que $g^r = 0_{\mathcal{L}(E)}$).

Q1 Montrons par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $f\circ g^k - g^k \circ f = kg^k$.

c'est clair pour $k=0$ car $g^0 = Id_E$. Supposons la propriété vraie pour un élément k de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$.

$f\circ g^k - g^k\circ f = kg^k$ donc $g\circ f\circ g^k - g^{k+1}\circ f = kg^{k+1}$ or $g\circ f = f\circ g - g$.

Alors $kg^{k+1} = (f\circ g - g)\circ g^k - g^{k+1}\circ f = f\circ g^{k+1} - g^{k+1} - g^{k+1}\circ f$.

Ainsi $f\circ g^{k+1} - g^{k+1}\circ f = kg^{k+1} + g^{k+1} = (k+1)g^{k+1}$. Ceci achève la récurrence.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $f\circ g^k - g^k\circ f = kg^k$.

Q2 a) • $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $f\circ u \in \mathcal{L}(E)$ et $u\circ f \in \mathcal{L}(E)$ car $u \in \mathcal{L}(E)$

donc $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi(u) = f\circ u - u\circ f \in \mathcal{L}(E)$. φ est une application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $(u,v) \in \mathcal{L}(E)\times\mathcal{L}(E)$.

$\varphi(\lambda u+v) = f\circ(\lambda u+v) - (\lambda u+v)\circ f = \lambda f\circ u + f\circ v - \lambda u\circ f - v\circ f$

$\varphi(\lambda u+v) = \lambda(f\circ u - u\circ f) + f\circ v - v\circ f = \lambda\varphi(u) + \varphi(v)$. φ est linéaire.

Ainsi φ est un endomorphisme de E.

b) Supposons que g ne soit pas nilpotent. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $g^k \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Or d'après Q1 : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f\circ g^k - g^k\circ f = kg^k$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $g^k \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\varphi(g^k) = kg^k$. Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $k \in Sp\,\varphi$.

Donc φ admet une infinité de valeurs propres or φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ qui est de dimension finie égale à n^2. Ceci est donc contradictoire.

Ainsi $\exists r \in \mathbb{N}^*$, $g^r = 0_{\mathcal{L}(E)}$. g est nilpotent.

R.

EXERCICE 55 | N1 | **Une QSP classique.**

A est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un élément p de $\mathbb{N}^*$ vérifiant : $A^p = I_n$. Montrer que $A^2 = I_n$.

A est diagonalisable donc il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P^{-1}AP = D$.

$\exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

$D^p = (P^{-1}AP)^p = P^{-1}A^pP = P^{-1}I_nP = I_n$.

De plus $D^p = \mathrm{Diag}(\alpha_1^p, \alpha_2^p, \dots, \alpha_n^p)$. Alors $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_k^p = 1$.

donc $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_k = 1$ ou -1. $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_k^2 = 1$.

Dans ces conditions $D^2 = (\mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n))^2 = \mathrm{Diag}(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_n^2) = \mathrm{Diag}(1, 1, \dots, 1) = I_n$.

$P^{-1}AP = D$ donc $A = PDP^{-1}$. Alors $A^2 = (PDP^{-1})^2 = PD^2P^{-1} = PI_nP^{-1} = I_n$.

Donc $\underline{\underline{A^2 = I_n}}$.

__Remarque__... On trouve souvent cet exercice avec A symétrique à la place de A diagonalisable ...

R.

EXERCICE 56 **N1** **QSP ESCP 2007, QSP HEC 2009**

f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$. Montrer que si $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ ne sont pas supplémentaires alors f n'est pas diagonalisable.

Il suffit de montrer que si f est diagonalisable alors $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires.

$\boxed{V1}$ Supposons que f est diagonalisable et montrons que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

C'est clair si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ (alors $\operatorname{Im} f = E$) et si $\operatorname{Ker} f = E$ (alors $\operatorname{Im} f = \{0_E\}$).

Supposons $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$ et $\operatorname{Ker} f \neq E$.

Alors 0 est valeur propre de E et $SEP(f,0) = \operatorname{Ker} f$. Comme f est diagonalisable et que $SEP(f,0) \subsetneq E$, f possède au moins une valeur propre non nulle. Notons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres non nulles de f.

$E = SEP(f,0) \oplus SEP(f,\lambda_1) \oplus \cdots \oplus SEP(f,\lambda_p)$.

$E = SEP(f,0) \oplus F$ où $F = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} SEP(f,\lambda_i)$.

Notons que $\dim E = \dim SEP(f,0) + \dim F = \dim \operatorname{Ker} f + \dim F$. $\underline{\dim F = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f}$.

Soit $i \in [\![1,p]\!]$ et $x \in SEP(f,\lambda_i)$. $f(x) = \lambda_i x$. $x = \frac{1}{\lambda_i} f(x) = f\left(\frac{1}{\lambda_i} x\right) \in \operatorname{Im} f$.

Alors pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $SEP(f,\lambda_i) \subset \operatorname{Im} f$. Alors $F = \bigoplus SEP(f,\lambda_i) \subset \operatorname{Im} f$ car $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de E.

Donc $\dim F = \dim \operatorname{Im} f$ et $F \subset \operatorname{Im} f$. Ainsi $F = \operatorname{Im} f$. Alors $\operatorname{Ker} f \oplus F = E$ donne

$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

$\boxed{V2}$ Supposons f diagonalisable et montrons que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Le théorème du rang donne $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$.

Comme E est de dimension finie il ne reste plus qu'à montrer que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$.

f est diagonalisable donc il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Soit $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. $f(x) = 0_E$ et $\exists t \in E$, $f(t) = x$.

$\exists (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{K}^n$, $t = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i e_i$

Alors $x = f(\sum_{i=1}^{n} t_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} t_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} t_i \alpha_i e_i$. $\underline{x = \sum_{i=1}^{n} t_i \alpha_i e_i}$.

$0_E = f(x) = f(\sum_{i=1}^{n} t_i \alpha_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} t_i \alpha_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} t_i \alpha_i^2 e_i$

La liberté de $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ donne : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $t_i \alpha_i^2 = 0$.

Alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $t_i = 0$ ou $\alpha_i^2 = 0$,

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $t_i = 0$ ou $\alpha_i = 0$.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $t_i \alpha_i = 0$,

Ainsi $x = \sum_{i=1}^{n} t_i \alpha_i e_i = 0_E$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

On retrouve ainsi la supplémentarité de Ker f et Im f.

<u>Si f est diagonalisable alors Ker f et Im f sont supplémentaires.</u>

<u>Exercice..</u> Montrer que la réciproque est fausse.

<u>Si Ker f et Im f ne sont pas supplémentaires alors f n'est pas diagonalisable.</u>

EXERCICE 57 **N1⁺** **Une QSP HEC 2011**

$n \in [\![2,+\infty[\![$. Soient x et y deux réels et F l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $F(M) = x\,M + y\,{}^tM$.

Q1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que F soit un projecteur.

Q2. Donner les valeurs propres de F.

Q3. F est-il diagonalisable ?

Dans une QSP ESCP 2011 on trouve Q2 et Q3 avec $x = y = 1$.

Q1 Soit $M \in E$. $\boxed{\text{dans tout ce qui suit } E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

$F(F(M)) = x\,F(M) + y\,{}^tF(M) = x(xM + y\,{}^tM) + y\,{}^t(xM + y\,{}^tM)$.

$F^2(M) = x^2M + xy\,{}^tM + y(x\,{}^tM + y\,{}^t({}^tM)) = x^2M + xy\,{}^tM + yx\,{}^tM + y^2M$.

$\underline{\underline{F^2(M) = (x^2+y^2)M + 2xy\,{}^tM}}$.

* Supposons que F est un projecteur.

Alors $F^2 = F$. $\forall M \in E$, $F^2(M) = M$. $\forall M \in E$, $(x^2+y^2)M + 2xy\,{}^tM = xM + yM$.

En particulier $(x^2+y^2)I_n + 2xy\,{}^tI_n = x\,I_n + y\,{}^tI_n$. $(x^2+y^2)I_n + 2xy\,I_n = x\,I_n + y\,I_n$.

Comme $I_n \neq 0_E$ $\quad x^2+y^2+2xy = x+y$; $(x+y)^2 = x+y$.

Soit $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $A = E_{1,2} - E_{2,1}$.

$A \neq 0_E$ et ${}^tA = -A$. De plus $(x^2+y^2)A + 2xy\,{}^tA = xA + y\,{}^tA$.

Donc $(x^2+y^2)A - 2xy\,A = xA - yA$ et $A \neq 0_E$.

Ainsi $x^2+y^2-2xy = x-y$; $(x-y)^2 = x-y$.

Finalement $\begin{cases}(x+y)^2 = (x+y)\\(x-y)^2 = (x-y)\end{cases}$. $\begin{cases}(x+y)(x+y-1) = 0\\(x-y)(x-y-1) = 0\end{cases}$ $\bullet$ $\begin{cases}y = -x \text{ ou } y = 1-x\\ \text{et}\\ y = x \text{ ou } y = x-1\end{cases}$

$\underline{1^{\text{er}}\text{ cas}}$.. $y = -x$

Alors $-x = x$ ou $-x = x-1$; $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$. Alors $(x,y) = (0,0)$ ou $(x,y) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

$\underline{2^{\text{ème}}\text{ cas}}$.. $y = 1-x$

Alors $1-x = x$ ou $1-x = x-1$; $x = \frac{1}{2}$ ou $x = 1$; Alors $(x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ou $(x,y) = (1,0)$

$\underline{\underline{\text{Finalement si } F \text{ est un projecteur : } (x,y) \in \{(0,0), (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}), (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}), (1,0)\}.}}$

montrons la réciproque. Rappelons que F est un endomorphisme de E.

1er cas.. $(x,y)=(0,0)$. $F=0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$ donc $F\circ F=F$ et F est un projecteur.

2ème cas.. $(x,y)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

$\forall M\in E$, $F(M)=\frac{1}{2}M-\frac{1}{2}{}^tM$ et $F^2(M)=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)M+2\times\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right){}^tM=\frac{1}{2}M-\frac{1}{2}{}^tM=F(M)$.

$F\circ F=F$. F est un projecteur.

3ème cas.. $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

$\forall M\in E$, $F(M)=\frac{1}{2}M+\frac{1}{2}{}^tM$ et $F^2(M)=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)M+2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}{}^tM=\frac{1}{2}M+\frac{1}{2}{}^tM=F(M)$

$F\circ F=F$. F est un projecteur.

4ème cas.. $(x,y)=(1,0)$. $F=Id$ donc $F\circ F=F$. F est un projecteur.

Finalement F est un projecteur si et seulement si $(x,y)\in\left\{(0,0),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),(1,0)\right\}$.

(Q2) Soit $M\in E$. $F^2(M)=(x^2+y^2)M+2xy{}^tM=(x^2+y^2-2x^2)M+2x^2M+2xy{}^tM$.

$F^2(M)=(y^2-x^2)M+2x(xM+y{}^tM)=(y^2-x^2)M+2xF(M)$.

Alors $(F^2-2xF+(x^2-y^2)Id_E)(M)=0_E$ et ceci pour tout M dans E.

donc $F^2-2xF+(x^2-y^2)Id_E=0_{\mathcal{L}(E)}$.

$X^2-2xX+x^2-y^2$ est un polynôme annulateur de F.

$X^2-2xX+x^2-y^2=(X-x)^2-y^2=(X-x-y)(X-x+y)$.

les zéros de $X^2-2xX+x^2-y^2$ sont $x+y$ et $x-y$.

donc $Sp\,F\subset\{x+y,x-y\}$.

Si $y=0$ $\forall M\in E$, $F(M)=xM$; $F=x\,Id_E$. $Sp\,F=\{x\}$ et $SEP(F,x)=E$.

supposons $y\neq 0$ Alors $x+y\neq x-y$. Soit $M\in E$

$M\in Ker(F-(x+y)Id_E)\Leftrightarrow F(M)=(x+y)M\Leftrightarrow xM+y{}^tM=xM+yM\Leftrightarrow y{}^tM=yM\overset{y\neq0}{\Leftrightarrow}{}^tM=M$.

$M\in Ker(F-(x-y)Id_E)\Leftrightarrow F(M)=(x-y)M\Leftrightarrow xM+y{}^tM=xM-yM\Leftrightarrow y{}^tM=-yM\overset{y\neq0}{\Leftrightarrow}{}^tM=-M$.

Alors $Ker(F-(x+y)Id_E)=\{M\in E\mid {}^tM=M\}$ et $Ker(F-(x-y)Id_E)=\{M\in E\mid {}^tM=-M\}$.

${}^tI_n = I_n$ et $I_n \neq 0_E$ donc $\mathrm{Ker}(F-(x+y)\mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$. Alors $x+y$ est valeur propre de F.

${}^t(E_{1,2}-E_{2,1}) = -(E_{1,2}-E_{2,1})$ et $E_{1,2}-E_{2,1} \neq 0_E$ donc $\mathrm{Ker}(F-(x-y)\mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$ alors $x-y$ est valeur propre de F.

Conclusion.
- Si $y=0$: $\mathrm{Sp}\,F = \{x\}$
- Si $y \neq 0$: $\mathrm{Sp}\,F = \{x+y, x-y\}$

Notons que dans les deux cas $\mathrm{Sp}\,F = \{x+y, x-y\}$!

(Q3) 1er cas.. $y=0$. $F = x\mathrm{Id}_E$. $\mathrm{Sp}\,F = \{x\}$ et $\mathrm{SEP}(F,x) = E$. F est diagonalisable.

2e cas.. $y \neq 0$ $\mathrm{Sp}\,F = \{x+y, x-y\}$, $\mathrm{SEP}(F, x+y) = \{M \in E \mid {}^tM = M\}$ et

$\mathrm{SEP}(F, x-y) = \{M \in E \mid {}^tM = -M\}$.

Posons $E_1 = \mathrm{SEP}(F, x+y)$ et $E_2 = \mathrm{SEP}(F, x-y)$. Montrons que les deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 de E sont supplémentaires.

- Soit $M \in E_1 \cap E_2$. ${}^tM = M$ et ${}^tM = -M$. $M = -M$. $M = 0_E$. Ainsi $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.
- Soit $M \in E$.

$M = S + A$ avec $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.

de plus ${}^tS = \frac{1}{2}({}^tM + {}^t({}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM + M) = S$ et

${}^tA = \frac{1}{2}({}^tM - {}^t({}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM - M) = -A$.

Alors $M = S + A$ avec $S \in E_1$ et $A \in E_2$. $M \in E_1 + E_2$ et ceci pour tout $M \in E$.

donc $E \subset E_1 + E_2$. Or $E_1 + E_2 \subset E$. Ainsi $E = E_1 + E_2$.

Finalement $E = E_1 \oplus E_2$.

donc $\mathrm{Sp}\,M = \{x+y, x-y\}$ et $E = \mathrm{SEP}(F, x+y) \oplus \mathrm{SEP}(F, x-y)$. F est diagonalisable.

Par conséquent F est toujours diagonalisable.

Exercice On munit $E = M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique que l'on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Montrer que F est un endomorphisme symétrique.

Rappel.. $\forall (M, N) \in E^2$, $\langle M, N \rangle = \mathrm{tr}({}^tMN)$.

2.

EXERCICE 58 **PC** **Endomorphisme égal à la somme de deux projecteurs qui commutent.**
LYON 1989 MI Pb 1 Partie A

p et q sont deux projecteurs du $\mathbb{K}-$espace vectoriel E tels que : $p \circ q = q \circ p$. $f = p + q$.

Q0 Justifier les inclusions $\operatorname{Sp} p \subset \{0,1\}$ et $\operatorname{Sp} q \subset \{0,1\}$

Q1. Soit λ une valeur propre de f et x un vecteur propre associé.

a) Montrer que $p(q(x)) = q(p(x)) = (\lambda - 1)\, p(x) = (\lambda - 1)\, q(x)$ (1).

b) En utilisant Q0 et (1) montrer que $\lambda \in \{0, 1, 2\}$.

Q2. Montrer que 0 est valeur propre de f si et seulement si : $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \neq \{0_E\}$ (un sens clair ; pour l'autre Q0+(1)).

Q3. Montrer que 2 est valeur propre de f si et seulement si : $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q \neq \{0_E\}$ (again).

Q4. Ils ont oublié 1, toi pas , hein ?

On retrouve ce thème dans ESCP 2007 2.10.

Q0 $p^2 = p$ (resp. $q^2 = q$). Alors $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de p et de q dont les zéros sont 0 et 1. Alors $\underline{\operatorname{Sp} p \subset \{0,1\} \text{ et } \operatorname{Sp} q \subset \{0,1\}}$.

Q1 $\lambda \in \operatorname{Sp} f$ et x est un vecteur propre associé. Donc $x \neq 0_E$ et $f(x) = \lambda x$.

a) $f(x) = \lambda x$ donc $p(x) + q(x) = \lambda x$.

- $p(p(x) + q(x)) = p(\lambda x) = \lambda p(x)$; $p^2(x) + p(q(x)) = \lambda p(x)$.

  Comme $p^2 = p$: $p(q(x)) = \lambda p(x) - p^2(x) = \lambda p(x) - p(x) = (\lambda - 1)\, p(x)$.

- $q(p(x) + q(x)) = q(\lambda x) = \lambda q(x)$; $p(q(x)) + q^2(x) = \lambda q(x)$.

  Alors $p(q(x)) = \lambda q(x) - q^2(x) = \lambda q(x) - q(x) = (\lambda - 1)\, q(x)$ car $q^2 = q$.

Rappelons que $p \circ q = q \circ p$ par hypothèse.

Ainsi $\underline{p(q(x)) = q(p(x)) = (\lambda - 1)\, p(x) = (\lambda - 1)\, q(x)}$. (1)

b) • Supposons $q(x) \neq 0_E$. Comme $p(q(x)) = (\lambda - 1)\, q(x)$: $\lambda - 1 \in \operatorname{Sp} p$.

donc $\lambda - 1 \in \{0,1\}$. Alors $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$.

• Supposons $q(x) = 0_E$. Alors $p(x) = p(x) + q(x) = f(x) = \lambda x$ et $x \neq 0_E$. $\lambda \in \operatorname{Sp} p$.

donc $\lambda \in \{0,1\}$. Alors $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

Finalement $\underline{\lambda \in \{0, 1, 2\}}$.

(Q2) * Supposons que $\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q \neq \{0_E\}$.

Alors $\exists x_0 \in \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$ et $x_0 \neq 0_E$. $f(x_0) = p(x_0) + q(x_0) = 0_E = 0 \times x_0$.

Donc 0 est valeur propre de f.

* Supposons que 0 est valeur propre de f. $\exists x \in E$, $f(x) = 0 \cdot x$ et $x \neq 0_E$.

(1) avec $\lambda = 0$ donne en particulier $(0-1)p(x) = (0-1)q(x)$ donc $p(x) = q(x)$.

$0_E = 0 \cdot x = f(x) = p(x) + q(x) = 2p(x)$; $p(x) = 0_E$. Puis $p(x) = q(x) = 0_E$.

Alors $x \neq 0_E$ et $x \in \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$. $\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q \neq \{0_E\}$.

<u>0 est valeur propre de f si et seulement si $\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q \neq \{0_E\}$.</u>

(Q3) * Supposons que $\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q \neq \{0_E\}$.

Alors $\exists x_2 \in \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$ et $x_2 \neq 0_E$. p et q sont deux projecteurs donc

$\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}\, q = \mathrm{Ker}(q - \mathrm{Id}_E)$. $p(x_2) = x_2$ et $q(x_2) = x_2$.

Ainsi $f(x_2) = p(x_2) + q(x_2) = 2x_2$ et $x_2 \neq 0_E$. 2 est valeur propre de f.

* Supposons que 2 est valeur propre de f. $\exists x \in E$, $f(x) = 2x$ et $x \neq 0_E$.

(1) donne en particulier $(2-1)p(x) = (2-1)q(x)$; $p(x) = q(x)$.

Alors $2x = f(x) = p(x) + q(x) = 2p(x)$; $p(x) = x$. Donc $p(x) = x$ et $q(x) = x$.

Ainsi $x \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(q - \mathrm{Id}_E)$; $x \in \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$ et $x \neq 0_E$.

Donc $\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q \neq \{0_E\}$

<u>2 est valeur propre de f si et seulement si $\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q \neq \{0_E\}$.</u>

(Q4) Ici la réponse n'est pas donnée. Commençons par une analyse.

* Supposons que 1 est valeur propre de f. $\exists x \in E$, $f(x) = x$ et $x \neq 0_E$.

Alors $p(x) + q(x) = x$ et (1) donne en particulier $p(q(x)) = q(p(x)) = 0_E$.

1er cas.. $q(x) \neq 0_E$. $q(x) \in \mathrm{Im}\, q$ et $p(q(x)) = 0_E$.

Alors $q(x) \neq 0_E$ et $q(x) \in \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$; $\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Im}\, q \neq \{0_E\}$.

2ème cas.. $q(x) = 0_E$. Alors $x \in \mathrm{Ker}\, q$ et $p(x) = p(x) + q(x) = x$.
$f(x) = x$.

$x \in \mathrm{Ker}\, q \cap \mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}\, p$.

Ainsi $x \neq 0_E$ et $x \in \mathrm{Ker}\, q \cap \mathrm{Im}\, p$. $\mathrm{Ker}\, q \cap \mathrm{Im}\, p = \{0_E\}$.

Si 1 est valeur propre de f : $\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Im}\, q \neq \{0_E\}$ ou $\mathrm{Ker}\, q \cap \mathrm{Im}\, p \neq \{0_E\}$.

* Réciproquement supposons que $\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Im}\, q \neq \{0_E\}$ ou $\mathrm{Ker}\, q \cap \mathrm{Im}\, p \neq \{0_E\}$.

. supposons $\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Im}\, q \neq \{0_E\}$. $\exists x_1 \in \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$ et $x_1 \neq 0_E$.

Alors $x_1 \in \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\,(q - \mathrm{Id}_E)$. $p(x_1) = 0_E$ et $q(x_1) = x_1$.

Alors $x_1 \neq 0_E$ et $f(x_1) = p(x_1) + q(x_1) = 0_E + x_1 = x_1$. 1 est valeur propre de f.

. On montre de même que si $\mathrm{Ker}\, q \cap \mathrm{Im}\, p \neq \{0_E\}$. 1 est valeur propre de f.

Finalement 1 est valeur propre de f si et seulement si $(\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Im}\, q) \cup (\mathrm{Ker}\, q \cap \mathrm{Im}\, p) \neq \{0_E\}$

A

EXERCICE 59 | N2 | **Transvection ou presque... QSP ESCP 2007**

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n ($n \geqslant 2$). φ est une forme linéaire sur E et a est un élément de E.

On considère l'application f définie sur E par : $\forall x \in E,\ f(x) = x + \varphi(x)\, a$.

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

Q2. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f. f est-il diagonalisable ?

Thème abordé dans ESCP 2007 2.17.

Q1 • Soit $x \in E$. $\varphi(x) \in \mathbb{K}$ donc $x + \varphi(x) a$ appartient à E comme combinaison linéaire de deux éléments de E. Alors $f(x) \in E$.

$\forall x \in E$, $f(x) \in E$. f est une application de E dans E.

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(x, y) \in E^2$.

$f(\lambda x + y) = \lambda x + y + \varphi(\lambda x + y) a = \lambda x + y + (\lambda \varphi(x) + \varphi(y)) a = \lambda(x + \varphi(x))a + y + \varphi(y) a$.

$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

$\forall (x,y) \in E^2$, $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$. f est linéaire.

Ainsi f est un endomorphisme de E.

Q2 1er cas... $a = 0_E$ ou $\varphi = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}$. Alors $f = \mathrm{Id}_E$. Donc $\mathrm{Sp}\, f = \{1\}$ et $\mathrm{SEP}(f, 1) = E$.

2ème cas... $a \neq 0_E$ et $\varphi \neq 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}$.

Remarque... $\mathrm{Im}\,\varphi \subset \mathbb{K}$ et $\mathrm{Im}\,\varphi \neq \{0_E\}$. Alors $1 \leqslant \dim \mathrm{Im}\,\varphi \leqslant \dim \mathbb{K} = 1$.

Donc $\mathrm{Im}\,\varphi \subset \mathbb{K}$ et $\dim \mathrm{Im}\,\varphi = 1$. $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{K}$.

$\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = \dim E - \dim \mathrm{Im}\,\varphi$; $\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = n - 1$. $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est un hyperplan de E... ce qui n'est pas un scoop.

Alors $\forall x \in E$, $f(x) = x \iff \varphi(x)\, a = 0_E \underset{a \neq 0_E}{\iff} \varphi(x) = 0_{\mathbb{K}} \iff x \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}\,\varphi$.

Or $\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = n - 1 \geqslant 1$. Donc $\mathrm{Ker}\,\varphi \neq \{0_E\}$. Alors $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$.

Donc $1 \in \mathrm{Sp}\, f$ et $\mathrm{SEP}(f, 1) = \mathrm{Ker}\,\varphi$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K} - \{1\}$. Soit $x \in E$.

$x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \iff f(x) = \lambda x \iff x + \varphi(x) a = \lambda x \iff \varphi(x) a = (\lambda - 1) x$

$x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \iff x = \dfrac{\varphi(x)}{\lambda - 1}\, a$

$x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda Id_E) \Leftrightarrow x = \frac{\varphi(x)}{\lambda-1} a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\varphi(x)}{\lambda-1} a \\ \varphi(x) = \varphi\left(\frac{\varphi(x)}{\lambda-1} a\right) = \frac{\varphi(x)}{\lambda-1} \varphi(a) \end{cases}$.

$\uparrow$ équivalence à vérifier

$$x \in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\varphi(x)}{\lambda-1} a \\ \varphi(x)[\lambda - 1 - \varphi(a)] = 0 \end{cases}.$$

a) $\lambda - 1 - \varphi(a) \neq 0$

$x \in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) = 0 \\ x = \frac{0}{\lambda-1} a = 0_E \end{cases} \Leftrightarrow x = 0_E$. Alors λ n'est pas valeur propre.

b) $\lambda - 1 - \varphi(a) = 0$; $\lambda = 1 + \varphi(a)$

Remarque.. Nous sommes dans le cas où $\lambda \neq 1$. Ainsi $\lambda - 1 - \varphi(a) = 0$ suppose que $\varphi(a) \neq 0$, c'est à dire que $a \notin \mathrm{Ker}\,\varphi$.

$x \in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E) \Leftrightarrow x = \frac{\varphi(x)}{\lambda-1} a \Rightarrow x \in \mathrm{Vect}(a)$. Donc $\mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E) \subset \mathrm{Vect}(a)$.

Réciproquement soit $z \in \mathrm{Vect}(a)$. $\exists \gamma \in \mathbb{R}$, $z = \gamma a$.

$(f - \lambda Id_E)(z) = f(z) - \lambda z = z + \varphi(z) a - (1+\varphi(a)) z = \varphi(z) a - \varphi(a) z = \varphi(\gamma a) a - \varphi(a) \gamma a$.

$(f - \lambda Id_E)(z) = \gamma \varphi(a) a - \varphi(a) \gamma a = 0_E$. $z \in \mathrm{Ker}(f - \lambda Id_E)$.

Ainsi $\mathrm{Ker}(f - \lambda Id_E) = \mathrm{Vect}(a)$ et $\mathrm{Vect}(a) \neq \{0_E\}$ car $a \neq 0_E$.

Alors λ est valeur propre de f et $SEP(f, \lambda) = \mathrm{Vect}(a)$... lorsque $\lambda = 1 + \varphi(a)$ et $\varphi(a) \neq 0$.

Concluons le 2$^{\text{ème}}$ cas.. $a \neq 0_E$ et $\varphi \neq 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{K})}$.

Si $a \in \mathrm{Ker}\,\varphi$: $Sp\, f = \{1\}$ et $SEP(f, 1) = \mathrm{Ker}\,\varphi$

Si $a \notin \mathrm{Ker}\,\varphi$: $Sp\, f = \{1, 1+\varphi(a)\}$, $SEP(f, 1) = \mathrm{Ker}\,\varphi$ et $SEP(f, 1+\varphi(a)) = \mathrm{Vect}(a)$.

Remarque.. Notons que si $a \notin \mathrm{Ker}\,\varphi$, $\varphi(a) \neq 0_{\mathbb{K}}$ donc $a \neq 0_E$ et $\varphi \neq 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{K})}$.

Conclusion. – Si $a \notin \operatorname{Ke} \varphi$: $\operatorname{Sp} f = \{1, 1+\varphi(a)\}$, $SEP(f,1) = \operatorname{Ke} \varphi$ et $SEP(f, 1+\varphi(a)) = \operatorname{Vect}(a)$

Si $a \in \operatorname{Ke} \varphi$: $\operatorname{Sp} f = \{1\}$ et $SEP(f,1) = \begin{cases} \operatorname{Ke} \varphi & \text{si } a \neq 0_E \\ E & \text{si } a = 0_E \end{cases}$

• Supposons que $a \notin \operatorname{Ke} \varphi$. Comme nous l'avons dit $\varphi \neq 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}$ et $a \neq 0_E$.

Alors $\operatorname{Sp} f = \{1, 1+\varphi(a)\}$

et $\dim SEP(f,1) + \dim SEP(f, 1+\varphi(a)) = \dim \operatorname{Ke} \varphi + \dim \operatorname{Vect}(a) = n-1+1 = n = \dim E$

Alors f est diagonalisable.

• Supposons que $a \in \operatorname{Ke} \varphi$. Alors $\operatorname{Sp} f = \{1\}$.

Si $a = 0_E$: $SEP(f,1) = E$. f est diagonalisable

Supposons $a \neq 0_E$. $SEP(f,1) = \operatorname{Ke} \varphi$. Donc f est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ke} \varphi = E$ donc si et seulement si $\varphi = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}$.

Remarque. – Notons que si $a = 0_E$ ou si $\varphi = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}$: $a \in \operatorname{Ke} \varphi$.

Finalement :

f est diagonalisable si et seulement si : $a \notin \operatorname{Ke} \varphi$ ou $a = 0_E$ ou $\varphi = 0_{\mathcal{L}(E,K)}$.

R.

EXERCICE 60

C'EST RIEN QUE POUR TOI C. H.

Exercice ESCP 98 E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n ($n \in [\![2, +\infty[\![$). Un endomorphisme f de E est dit cyclique si l'on peut trouver x_0 élément de E tel que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

Q1. Dans cette question on suppose que f est un endomorphisme de E tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Montrer que f est cyclique. Préciser son noyau et son image. f est-il diagonalisable ?

Q2. f est un endomorphisme cyclique de E et x_0 est un élément de E tel que $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E. $\mathcal{C} = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$.

a) Soit g un élément de $\mathcal{C}$. En écrivant $g(x_0)$ dans la base $\mathcal{B}$, montrer qu'il existe un élément P de $\mathbb{C}_n[X]$ tel que $g = P(f)$.

et même $\mathbb{C}_{n-1}[X]$

b) Achever la détermination de $\mathcal{C}$.

Q3. f est un endomorphisme cyclique de E et x_0 est un élément de E tel que $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E. On suppose que $f^n(x_0) = x_0$.

a) Montrer que $f^n = Id_E$.

b) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Q1 Soit $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$. ($f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$). Montrons que

$\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E

card $\mathcal{B} = n = \dim E$, il suffit donc de montrer que la famille est libre.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(x_0) = 0_E$.

Montrons par récurrence que $\forall k \in [\![0, n[\![, \alpha_k = 0$

- $0_E = f^{n-1}(0_E) = f^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(x_0)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^{n-1+i}(x_0)$. Or $\forall k \in [\![n, +\infty[\![, f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

  Alors $0_E = \alpha_0 f^{n-1}(x_0) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f^{n-1+i}(x_0)}_{n-1+i \geqslant n \text{ si } i \geqslant 1} = \alpha_0 f^{n-1}(x_0)$ et $f^{n-1}(x_0) \neq 0$.

  Ainsi $\alpha_0 = 0$.
- Supposons la propriété vraie jusqu'à k où $k \in [\![0, n-2]\!]$. $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$.

  Alors $0_E = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(x_0) = \sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i f^i(x_0)$.

  Ainsi $f^{n-1-(k+1)}\left(\sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i f^i(x_0)\right) = f^{n-1-(k+1)}(0_E) = 0_E$ ($k \in [\![0, n-2]\!]$ donc $n-1-(k+1) \geqslant 0$).

  si $i \geqslant k+2$: $n-1-(k+1)+i \geqslant n$.

  Alors $0_E = \sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i f^{n-1-(k+1)+i}(x_0) = \alpha_{k+1} f^{n-1}(x_0)$ et $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$.

Ainsi $\alpha_{l+1}=0$ ce qui achève la récurrence. Cela achève aussi de montrer que $B=(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

Alors il existe un élément x_0 de E tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E donc <u>f est cyclique.</u>

$(f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une famille d'éléments de $\operatorname{Im} f$. C'est aussi une sous-famille d'une famille libre. Alors $(f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une famille libre de $\operatorname{Im} f$.

Ainsi <u>$\dim \operatorname{Im} f \geq n-1$</u>.

$f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$ et $f(f^{n-1}(x_0)) = f^n(x_0) = 0_E$. $f^{n-1}(x_0)$ est un élément non nul de $\operatorname{Ker} f$.

Ainsi <u>$\dim \operatorname{Ker} f \geq 1$.</u>

Or <u>$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = n$</u> donc $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ et $\dim \operatorname{Im} f = n-1$.

$\operatorname{Ker} f$ est une droite vectorielle de E et $f^{n-1}(x_0)$ est un élément non nul de $\operatorname{Ker} f$.

<u>$(f^{n-1}(x_0))$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.</u>

$(f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une famille libre de $\operatorname{Im} f$ de cardinal $n-1$. Comme $\dim \operatorname{Im} f = n-1$:

<u>$(f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de $\operatorname{Im} f$.</u>

X^n est un polynôme annulateur de f admettant un zéro et un seul : 0.

Alors $\operatorname{Sp} f \subset \{0\}$. Mais $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$ donc $0 \in \operatorname{Sp} f$.

Ainsi <u>$\operatorname{Sp} f = \{0\}$</u> et $\dim SEP(f, 0) = \dim \operatorname{Ker} f = 1 < n = \dim E$.

Donc <u>f n'est pas diagonalisable.</u>

(Q2) <u>a)</u> Soit $g \in G$. $g(x_0)$ appartient à E donc

$\exists! (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n, \quad g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x_0)$.

Posons $h=\sum_{\ell=0}^{n-1}\alpha_\ell f^\ell$ et montrons que $g=h$. g et h sont deux endomorphismes de E et $\mathcal{B}=(v_0, f(v_0),\dots, f^{n-1}(v_0))$ est une base de E.

Pour montrer que $g=h$ il suffit de montrer que $\forall i\in [\![0,n-1]\!]$, $g(f^i(v_0))=h(f^i(v_0))$.

$g\circ f=f\circ g$; alors une récurrence simple donne $\forall i\in\mathbb{N}$, $g\circ f^i=f^i\circ g$.

$\forall i\in [\![0,n-1]\!]$, $g(f^i(v_0))=f^i(g(v_0))=f^i\left(\sum_{\ell=0}^{n-1}\alpha_\ell f^\ell(v_0)\right)=\sum_{\ell=0}^{n-1}\alpha_\ell f^{i+\ell}(v_0)=\sum_{\ell=0}^{n-1}\alpha_\ell f^{\ell+i}(v_0)$.

$\forall i\in [\![0,n-1]\!]$, $g(f^i(v_0))=\sum_{\ell=0}^{n-1}\alpha_\ell f^\ell(f^i(v_0))=\left(\sum_{\ell=0}^{n-1}\alpha_\ell f^\ell\right)(f^i(v_0))=h(f^i(v_0))$.

Ceci achève de montrer que $g=h=\sum_{\ell=0}^{n-1}\alpha_\ell f^\ell$.

Posons $P=\sum_{\ell=0}^{n-1}\alpha_\ell X^\ell$. $P\in\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $g=P(f)$.

<u>$\forall g\in\mathcal{C}$, $\exists P\in\mathbb{C}_{n-1}[X]$, $g=P(f)$.</u>

Réciproquement soit $P\in\mathbb{C}_{n-1}[X]$. Posons $g=P(f)$. Posons aussi $Q=X$.

$g\circ f=P(f)\circ Q(f)=(PQ)(f)=(QP)(f)=Q(f)\circ P(f)=f\circ g$; $g\in\mathcal{C}$.

Finalement <u>$\mathcal{C}=\{P(f)\,;\ P\in\mathbb{C}_{n-1}[X]\}$.</u>

<u>Remarque</u>.. Ceci signifie aussi que $\mathcal{C}=\mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f,\dots, f^{n-1})$.

<u>Exercice</u>.. Montrer que $(\mathrm{Id}_E, f,\dots, f^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}$.

Q3 <u>a)</u> f^n et Id_E sont deux endomorphismes de E et $\mathcal{B}=(v_0, f(v_0),\dots, f^{n-1}(v_0))$ est une base de E. Pour montrer que $f^n=\mathrm{Id}_E$ il suffit de montrer que f^n et Id_E coïncident sur les éléments de $\mathcal{B}$.

$\forall i\in [\![0,n-1]\!]$, $f^n(f^i(v_0))=f^i(f^n(v_0))=f^i(v_0)=\mathrm{Id}_E(f^i(v_0))$.

Ainsi <u>$f^n=\mathrm{Id}_E$.</u>

R.

b) Notons que $X^n - 1$ est un polynôme annulateur de f.

Alors $Sp f \subset \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \{e^{i\ell \times \frac{2\pi}{n}} \,;\, \ell \in [\![0, n-1]\!]\}$.

Soit $\ell \in [\![0, n-1]\!]$. Posons $\lambda = e^{i\ell\times\frac{2\pi}{n}}$. Soit u un élément de E de coordonnées $(t_0, t_1, \dots, t_{n-1})$ dans $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$.

$u \in Ker(f - \lambda Id_E)$

$\Updownarrow$

$f(u) = \lambda u$

$\Updownarrow$ $M_{\mathcal{B}}(f) \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{n-1} \end{pmatrix}$

$\Updownarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{n-1} \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} t_{n-1} = \lambda t_0 \\ t_0 = \lambda t_1 \\ \vdots \\ t_{n-2} = \lambda t_{n-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_{n-1} = \lambda t_0 \\ t_{n-2} = \lambda t_{n-1} \\ t_{n-3} = \lambda t_{n-2} \\ \dots \\ t_1 = \lambda t_2 \\ t_0 = \lambda t_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_{n-1} = \lambda t_0 \\ t_{n-2} = \lambda t_{n-1} \\ t_{n-3} = \lambda^2 t_{n-1} \\ \dots \\ t_1 = \lambda^{n-2} t_{n-1} \\ t_0 = \lambda^{n-1} t_{n-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_{n-1} = \lambda^n t_{n-1} \\ t_{n-2} = \lambda t_{n-1} \\ t_{n-3} = \lambda^2 t_{n-1} \\ \vdots \\ t_1 = \lambda^{n-2} t_{n-1} \\ t_0 = \lambda^{n-1} t_{n-1} \end{cases}$$

Or $\lambda^n = 1$: $u \in Ker(f - \lambda Id_E) \Leftrightarrow \begin{cases} t_0 = \lambda^{n-1} t_{n-1} \\ t_1 = \lambda^{n-2} t_{n-1} \\ \dots \\ t_{n-2} = \lambda t_{n-1} \end{cases}$.

$(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est libre

Ainsi $Ker(f - \lambda Id_E) = Vect\left(\lambda^{n-1} x_0 + \lambda^{n-2} f(x_0) + \dots + \lambda f^{n-2}(x_0) + f^{n-1}(x_0)\right) \neq \{0_E\}$. $\lambda \in Sp f$.

Ainsi $\underline{Sp f = \{e^{i\ell\times\frac{2\pi}{n}} \,;\, \ell \in [\![0, n-1]\!]\}}$.

$\underline{\forall \lambda \in Sp f,\ Ker(f - \lambda Id_E) = Vect\left(\lambda^{n-1} x_0 + \lambda^{n-2} f(x_0) + \dots + \lambda f^{n-2}(x_0) + f^{n-1}(x_0)\right)}$.

Notons que f a n valeurs propres distinctes et que $\dim E = n$. Ainsi $\underline{f \text{ est diagonalisable}}$.