R.

EXERCICE 61

Exercice **N1+** **Inversion d'une "matrice de passage de vecteurs propres".**

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant n valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

$\mathcal{B} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Notons que SEP $(A, \lambda_j) = \text{Vect}(X_j)$

Soit P est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0 = (E_1, E_2, \ldots, E_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathcal{B}$. On pose $P = (p_{i,j})$.

Alors P est inversible et $P^{-1}AP$ est la matrice diagonale $D = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Q1 Montrer que ${}^tA$ a les mêmes valeurs propres que A.

En déduire l'existence d'une matrice inversible Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $Q^{-1}\,{}^tAQ = D$. On pose $Q = (q_{i,j})$.

Q2. a) Montrer que $A({}^tQ)^{-1} = ({}^tQ)^{-1}D$.

En déduire que pour tout j dans $[\![1, n]\!]$ il existe un élément δ_j de $\mathbb{K}$ tel que $({}^tQ)^{-1}E_j = \delta_j\, PE_j$.

b) On considère la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\Delta = \text{Diag}(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$.

Montrer que $P^{-1} = \Delta\,{}^tQ$ et que $\forall j \in [\![1, n]\!],\ \delta_j = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_{k,j}\, q_{k,j}}$.

Q3. On suppose ici que A est inversible. On pose $A^{-1} = (b_{i,j})$. Montrer que $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ b_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\delta_k \dfrac{p_{i,k}\, q_{j,k}}{\lambda_k} \right)$.

Q1 Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$\lambda \in Sp\,A \iff A - \lambda I_n$ non inversible $\iff {}^t(A-\lambda I_n)$ non inversible. Or ${}^t(A-\lambda I_n) = {}^tA - \lambda\,{}^tI_n = {}^tA - \lambda I_n$.

$\lambda \in Sp\,A \iff {}^tA - \lambda I_n$ non inversible $\iff \lambda \in Sp\,{}^tA$.

Ainsi $Sp\,A = Sp\,{}^tA$. ${}^tA$ a les mêmes valeurs propres que A.

Alors ${}^tA$ admet n valeurs propres deux à deux distinctes qui sont : $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. ${}^tA$ est diagonalisable.

Notons également que les sous-espaces propres de ${}^tA$ sont de dimension 1.

Pour tout j dans $[\![1,n]\!]$ considérons un vecteur propre Y_j de ${}^tA$ associé à la valeur propre λ_j.

1) Pour tout j dans $[\![1,n]\!]$, (Y_j) est une base de $SEP({}^tA, \lambda_j)$.

2) $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus\limits_{j=1}^{n} SEP({}^tA, \lambda_j)$ car ${}^tA$ est diagonalisable.

Alors $\hat{\mathcal{B}} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de ${}^tA$ respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Soit Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $\hat{\mathcal{B}}$.

Q est inversible comme matrice de passage et $Q^{-1}\,{}^tAQ = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = D$.

Il existe une matrice inversible Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $Q^{-1}\,{}^tAQ = D = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Q2 a) $Q^{-1}\,{}^tA\,Q = D$. $D = {}^tD = {}^t(Q^{-1}\,{}^tA\,Q) = {}^tQ\,{}^t({}^tA)\,{}^tQ^{-1} = {}^tQ\,A\,({}^tQ)^{-1}$.

${}^t({}^tA) = A$ et ${}^tQ^{-1} = ({}^tQ)^{-1}$

(Q est inversible donc ${}^tQ$ l'est également).

En multipliant par $({}^tQ)^{-1}$ à gauche il vient $({}^tQ)^{-1}D = A({}^tQ)^{-1}$.

$$\underline{\underline{A({}^tQ)^{-1} = ({}^tQ)^{-1}D.}}$$

Soit $j \in [\![1,n]\!]$. $A({}^tQ)^{-1}E_j = {}^tQ^{-1}DE_j = {}^tQ^{-1}(\lambda_j E_j)$

DE_j est la $j^{\text{ième}}$ colonne de D donc $DE_j = \lambda_j E_j$

$A\left(({}^tQ)^{-1}E_j\right) = \lambda_j ({}^tQ)^{-1}E_j$ donc $({}^tQ)^{-1}E_j \in SEP(A,\lambda_j) = \mathrm{Vect}(X_j)$.

Alors $\exists s_j \in \mathbb{K}$, $({}^tQ)^{-1}E_j = s_j X_j$. Or X_j est la $j^{\text{ième}}$ colonne de P donc $X_j = PE_j$.

Ainsi $({}^tQ)^{-1}E_j = s_j PE_j$.

$$\underline{\underline{\forall j \in [\![1,n]\!],\ \exists s_j \in \mathbb{K},\ ({}^tQ)^{-1}E_j = s_j PE_j.}}$$

b) $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $s_j E_j = \Delta E_j$.

$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $({}^tQ)^{-1}E_j = s_j PE_j = P(s_j E_j) = P\Delta E_j$.

Alors pour tout j dans $[\![1,n]\!]$, la $j^{\text{ième}}$ colonne de $({}^tQ)^{-1}$ est égale à la $j^{\text{ième}}$ colonne de $P\Delta$.

Ainsi $({}^tQ)^{-1} = P\Delta$. En multipliant à gauche par P^{-1} et droite par ${}^tQ$ on obtient :

$$\underline{\underline{P^{-1} = \Delta\,{}^tQ.}}$$ Alors $I_n = \Delta\,{}^tQ\,P$.

Posons $\Delta = (\delta_{i,j})$. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]$, $\delta_{i,j} = \begin{cases} s_j & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Posons $S = (s_{i,j}) = {}^tQ\,P$. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]$, $s_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} q_{k,i}\, p_{k,j}$.

Posons $L = \Delta\,{}^tQ\,P = (\ell_{i,j})$. $L = I_n$!!

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]$, $\ell_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k}\, s_{k,j} \overset{\delta_{i,k} = \begin{cases} s_i & \text{si } k=i \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}{=} s_i\, s_{i,j}$.

Alors $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $1 \underset{L = I_n}{=} \ell_{j,j} = s_j\, s_{j,j} = s_j \sum_{k=1}^{n} q_{k,j}\, p_{k,j}$. $s_j \sum_{k=1}^{n} q_{k,j}\, p_{k,j} = 1$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$.

R.

Alors $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{k=1}^{n} q_{k,j}\, p_{k,j} \neq 0$ et $S_j = \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} q_{k,j}\, p_{k,j}}$.

(Q3) A inversible. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i \neq 0$. D est également inversible et $D^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$.

$P^{-1}AP = D$; $(P^{-1}AP)^{-1} = D^{-1}$. $P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1} = D^{-1}$; $P^{-1}A^{-1}P = D^{-1}$.

Alors $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = PD^{-1}\Delta\, {}^t\mathcal{Q}$

Or $D^{-1}\Delta = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right)\mathrm{Diag}(s_1, s_2, \dots, s_n) = \mathrm{Diag}\left(\frac{s_1}{\lambda_1}, \frac{s_2}{\lambda_2}, \dots, \frac{s_n}{\lambda_n}\right)$.

Posons $D^{-1}\Delta = (r_{i,j})$; $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $r_{i,j} = \begin{cases} s_i/\lambda_i & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$PD^{-1}\Delta = \left(\sum_{k=1}^{n} p_{i,k}\, r_{k,j}\right) = \left(p_{i,j}\, \frac{s_j}{\lambda_j}\right)$ et $A^{-1} = (PD^{-1}\Delta)\,{}^t\mathcal{Q} = (b_{i,j})$.

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} p_{i,k}\, \frac{s_k}{\lambda_k}\, q_{j,k}$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} s_k\, \dfrac{p_{i,k}\, q_{j,k}}{\lambda_k}$.

R

EXERCICE 62 **N2+** **Réduction de E défini par sa donnée sur deux supplémentaires de E. ESCP 2005 2.2.**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 2$ et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires dans E et non réduits au vecteur nul.

Soit $u_1 \in \mathcal{L}(E_1)$, $u_2 \in \mathcal{L}(E_2)$ et $u_3 \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$.

On note u l'endomorphisme de E tel que : $\begin{cases} \forall x \in E_1, u(x) = u_1(x) \\ \forall x \in E_2, u(x) = u_2(x) + u_3(x) \end{cases}$.

Q1. Donner la forme de la matrice de u dans une base de E obtenue en mettant "bout à bout" une base de E_1 et une base de E_2.

Q2. a) Soit $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $x = x_1 + x_2$.

Montrer que : $u(x) = \lambda x \iff \begin{cases} u_1(x_1) + u_3(x_2) = \lambda x_1 \\ u_2(x_2) = \lambda x_2 \end{cases}$.

b) Montrer que si que λ est valeur propre de u alors λ est valeur propre de u_1 ou de u_2.

Montrer que si λ est valeur propre de u_1 alors λ est valeur propre de u.

Montrer que si λ est valeur propre de u_2 sans être valeur propre de u_1 alors λ est valeur propre de u.

c) Soit λ un réel qui est valeur propre de u_1 mais pas de u_2. Comparer les sous-espaces propres de u et de u_1 associés à λ.

d) Soit λ un réel qui est valeur propre de u_2 mais pas de u_1. Comparer les dimensions des sous-espaces propres de u et de u_2 associés à λ.

Q3. On suppose dans cette question que u_1 et u_2 n'ont pas de valeur propre commune. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u_1 et u_2 le sont.

Q1 $E = E_1 \oplus E_2$. Posons $p_1 = \dim E_1$ et $p_2 = \dim E_2$. $p_1 \in \mathbb{N}^*$, $p_2 \in \mathbb{N}^*$, $p_1 + p_2 = n$.

Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_{p_1})$ une base de E_1 et $\mathcal{B}_2 = (e_{p_1+1}, \dots, e_n)$ une base de E_2.

Comme $E = E_1 \oplus E_2$, $\mathcal{B} =$ "$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$" est une base de E.

$u_1 \in \mathcal{L}(E_1)$. Notons A_1 la matrice de u_1 dans $\mathcal{B}_1$. $A_1 \in \mathcal{M}_{p_1}(\mathbb{R})$.

$u_2 \in \mathcal{L}(E_2)$. Notons A_2 la matrice de u_2 dans $\mathcal{B}_2$. $A_2 \in \mathcal{M}_{p_2}(\mathbb{R})$.

$u_3 \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$. Notons A_3 la matrice de u_3 relativement aux bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_1$. $A_3 \in \mathcal{M}_{p_1, p_2}(\mathbb{R})$.

Comme $\forall x \in E_1$, $u(x) = u_1(x)$ et $\forall x \in E_2$, $u(x) = u_2(x) + u_3(x)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice $\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0_{p_2,p_1} & A_2 \end{pmatrix}$ ($0_{p_2,p_1}$ est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{p_2,p_1}(\mathbb{R})$).

Q2 __Remarques.__ Soit x un élément de E. $\exists ! (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, $x = x_1 + x_2$.

Alors $\underline{u(x) = u(x_1) + u(x_2) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + u_3(x_2)}$.

R

a) Soit $x \in E$. $\exists ! (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, $x = x_1 + x_2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$u(x) = \lambda x \Leftrightarrow u_1(x_1) + u_2(x_2) + u_3(x_2) = \lambda(x_1 + x_2)$

$u(x) = \lambda x \Leftrightarrow (u_1(x_1) + u_3(x_2)) + u_2(x_2) = (\lambda x_1) + (\lambda x_2)$.

Or E_1 et E_2 sont en somme directe et $u_1(x_1) + u_3(x_2) \in E_1$, $u_2(x_2) \in E_2$, $\lambda x_1 \in E_1$ et $\lambda x_2 \in E_2$. De l'unicité de l'écriture d'un élément de E comme somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2 il résulte que :

$$u(x) = \lambda x \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(x_1) + u_3(x_2) = \lambda x_1 \\ u_2(x_2) = \lambda x_2 \end{cases}.$$

b) • Soit λ une valeur propre de u. $\exists x \in E$, $x \neq 0_E$ et $u(x) = \lambda x$.

$\exists ! (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, $x = x_1 + x_2$. Comme $u(x) = \lambda x$, a) donne $\begin{cases} u_1(x_1) + u_3(x_2) = \lambda x_1 \\ u_2(x_2) = \lambda x_2 \end{cases}$.

1er cas.. $x_2 \neq 0_E$. Alors λ est valeur propre de u_2.

2e cas.. $x_2 = 0_E$. Alors 1) $x_1 \neq 0_E$ ($x_1 = 0_E \Rightarrow x = 0_E$)

2) $\lambda x_1 = u_1(x_1) + u_3(x_2) = u_1(x_1) + u_3(0_E) = u_1(x_1)$

Ainsi λ est valeur propre de u_1.

Si λ est valeur propre de u alors λ est valeur propre de u_1 ou de u_2. $\operatorname{Sp} u \subset \operatorname{Sp} u_1 \cup \operatorname{Sp} u_2$

• Supposons que λ est valeur propre de u_1. $\exists x_1 \in E_1$, $x_1 \neq 0_E$ et $u_1(x_1) = \lambda x_1$.

Posons $x_2 = 0_E$ et $x = x_1 + x_2$. $x = x_1 \neq 0_E$!

$x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. De plus $\begin{cases} u_1(x_1) + u_3(x_2) = \lambda x_1 + u_3(0_E) = \lambda x_1 \\ \text{et} \\ u_2(x_2) = u_2(0_E) = 0_E = \lambda 0_E = \lambda x_2 \end{cases}$. Alors $u(x) = \lambda x$.

$u(x) = \lambda x$ et $x \neq 0_E$ donc λ est valeur propre de u.

Si λ est valeur propre de u_1 : λ est valeur propre de u.

Remarque 2 Soit $\lambda \in \operatorname{Sp} u_1$! (donc $\lambda \in \operatorname{Sp} u$) Nous venons de montrer que si $x_1 \in SEP(u_1, \lambda)$ et $x_1 \neq 0_E$ alors $x_1 \in SEP(u, \lambda)$. Ceci vaut encore pour $x_1 = 0_E$ donc $SEP(u_1, \lambda) \subset SEP(u, \lambda)$. Ce sera utile pour c)

- Supposons que λ soit une valeur propre de u_2 sans être une valeur propre de u_1.
Montrons que λ est valeur propre de u. Il faut donc prouver l'existence d'un élément non nul x de E tel que $u(x)=\lambda x$.

ce qui revient à montrer l'existence de $(x_1,x_2)\in F_1\wedge F_2$ tel que :

$\rightarrow$ $x_1+x_2\neq 0_E$ (ce qui équivaut à $x_1\neq 0_E$ ou $x_2\neq 0_E$) E_1 et E_2 sont en somme directe.

$\rightarrow$ $u_1(x_1)+u_3(x_2)=\lambda x_1$ ou $(u_1-\lambda Id_{E_1})(x_1)=-u_3(x_2)$

$\rightarrow$ $u_2(x_2)=\lambda x_2$.

λ est valeur propre de u_2 donc il existe un élément non nul x_2 de E_2 tel que $u_2(x_2)=\lambda x_2$

λ n'est pas valeur propre de u_1. Ainsi $Ker(u_1-\lambda Id_{E_1})=\{0_E\}$.

$u_1-\lambda Id_{E_1}$ est un endomorphisme injectif de E_1 qui est un espace vectoriel de dimension finie. Alors $u_1-\lambda Id_{E_1}$ est un endomorphisme bijectif de E_1.

Posons alors $x_1=(u_1-\lambda Id_{E_1})^{-1}(-u_3(x_2))$ ($u_3(x_2)\in E_1$!) et $x=x_1+x_2$.

Alors 1) $x\in E$ et $x\neq 0_E$ car $x_2\neq 0_E$ et E_1 et E_2 sont en somme directe

($x=x_1+x_2=0_E \Rightarrow x_1=x_2=0_E$).

2) $u_2(x_2)=\lambda x_2$

3) $(u_1-\lambda Id_{E_1})(x_1)=(u_1-\lambda Id_{E_1})\left((u_1-\lambda Id_{E_1})^{-1}(-u_3(x_2))\right)=-u_3(x_2)$.

Alors $u_1(x_1)-\lambda x_1=-u_3(x_2)$. $u_1(x_1)+u_3(x_2)=\lambda x_1$.

2) & 3) montrent que $u(x)=\lambda x$. Comme $x\neq 0_E$: λ est valeur propre de u.

Si λ est valeur propre de u_2 sans être valeur propre de u_1, λ est valeur propre de u.

Remarque 3. Soit λ une valeur propre de u_2 qui n'est pas valeur propre de u_1.
Alors $\forall x_2\in SEP(u_2,\lambda)$, $x_2\neq 0_E \Rightarrow (u_1-\lambda Id_{E_1})^{-1}(-u_3(x_2))+x_2\in SEP(u,\lambda)$.
Notons que ceci vaut pour $x_2=0_E$.

Alors $\forall x_2\in SEP(u_2,\lambda)$, $(u_1-\lambda Id_{E_1})^{-1}(-u_3(x_2))+x_2\in SEP(u,\lambda)$. ce sera utile pour c)

Remarque 4.. Nous avons déjà $Sp\,u \subset Sp\,u_1 \cup Sp\,u_2$. Montrons l'inclusion inverse.

Soit $\lambda \in Sp\,u_1 \cup Sp\,u_2$. Si $\lambda \in Sp\,u_1$ alors $\lambda \in Sp\,u$. Supposons que $\lambda \notin Sp\,u_1$ alors $\lambda \notin Sp\,u_1$ mais $\lambda \in Sp\,u_2$ donc $\lambda \in Sp\,u$. Ainsi $Sp\,u_1 \cup Sp\,u_2 \subset Sp\,u$.

Alors $Sp\,u = Sp\,u_1 \cup Sp\,u_2$.

c) Soit λ une valeur propre de u_1 qui n'est pas une valeur propre de u_2. $\lambda \in Sp\,u$.

La remarque 2 a montré que $SEP(u_1,\lambda) \subset SEP(u,\lambda)$. Montrons l'inclusion inverse.

Soit $x \in SEP(u,\lambda)$. $\exists!\,(x_1,x_2) \in E_1 \times E_2$, $x_1 + x_2 = x$. De plus $\begin{cases} u_1(x_1)+u_3(x_2)=\lambda x_1 \\ u_2(x_2)=\lambda x_2 \end{cases}$.

Si $x_2 \neq 0_E$ alors λ est valeur propre de u_2 ce qui n'est pas.

Donc $x_2 = 0_E$. Alors $x = x_1$. Par conséquent $x \in E_1$.

De plus $\lambda x = \lambda x_1 = u_1(x_1)+u_3(x_2) = u_1(x) + u_3(0_E) = u_1(x)$. $u_1(x)=\lambda x$; $x \in SEP(u_1,\lambda)$.

Ceci achève de montrer que $SEP(u,\lambda) \subset SEP(u_1,\lambda)$.

Finalement $SEP(u,\lambda) = SEP(u_1,\lambda)$.

d) Soit λ une valeur propre de u_2 qui n'est pas une valeur propre de u_1. $\lambda \in Sp\,u$.

La remarque 3 a montré que $\forall x_2 \in SEP(u_2,\lambda)$, $(u_1 - \lambda Id_{E_1})^{-1}(-u_3(x_2)) + x_2 \in SEP(u,\lambda)$.

Ce que l'on peut aussi écrire $\forall x \in SEP(u_2,\lambda)$, $(u_1 - \lambda Id_{E_1})^{-1}(-u_3(x)) + x \in SEP(u,\lambda)$ pour alléger les notations. Nous allons nous servir de cela pour montrer que $SEP(u_2,\lambda)$ est isomorphe à $SEP(u,\lambda)$ ce qui donnera $\dim SEP(u_2,\lambda) = \dim SEP(u,\lambda)$.

Posons $\forall x \in SEP(u_2,\lambda)$, $\varphi(x) = (u_1 - \lambda Id_{E_1})^{-1}(-u_3(x)) + x$.

Toujours pour alléger les notations posons $v_1 = (u_1 - \lambda Id_{E_1})^{-1}$. v_1 est un automorphisme de E_1 et $\forall x \in SEP(u_2,\lambda)$, $\varphi(x) = v_1(-u_3(x)) = -v_1(u_3(x)) + x = -(v_1 \circ u_3)(x) + x$.

- 1) φ est une application de $SEP(u_2,\lambda)$ dans $SEP(u,\lambda)$.
- 2) Montrons que φ est linéaire. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $(x,y) \in (SEP(u_2,\lambda))^2$.

  Notons que $v_1 \circ u_3$ est une application linéaire de E_2 dans E_1.

$\varphi(\alpha x+y) = -(v_1\circ u_3)(\alpha x+y)+\alpha x+y = -\alpha\, v_1\circ u_3(x)-(v_1\circ u_3)(y)+\alpha x+y$.

$\varphi(\alpha x+y) = \alpha\left(-(v_1\circ u_3)(x)+x\right)+\left(-(v_1\circ u_3)(y)+y\right) = \alpha\varphi(x)+\varphi(y)$.

$\forall \alpha\in\mathbb{R}$, $\forall (x,y)\in (SEP(u_2,\lambda))^2$, $\varphi(\alpha x+y)=\alpha\varphi(x)+\varphi(y)$. φ est linéaire.

- 3) Montrons que φ est bijective.

  Soit $z\in SEP(u,\lambda)$. Montrons par analyse-synthèse que : $\exists!\, x\in SEP(u_2,\lambda)$, $\varphi(x)=z$

  Notons que $\exists!\,(z_1,z_2)\in E_1\times E_2$, $z=z_1+z_2$.

<u>Analyse-Unicité</u>. <u>Supposons</u> que $x\in SEP(u_2,\lambda)$ et que $\varphi(x)=z$.

$z_1+z_2=z=\varphi(x)=-(v_1\circ u_3)(x)+x$. De plus $z_1\in E_1$, $z_2\in E_2$, $-(v_1\circ u_3)(x)\in E_1$ et $x\in E_2$.

Par unicité de la décomposition d'un élément de E comme somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2 il vient : $\begin{cases} z_1=-(v_1\circ u_3)(x) \\ \text{et } z_2=x \end{cases}$. Alors $x=z_2$. D'où l'unicité.

<u>Synthèse-Existence</u>. <u>Posons</u> $x=z_2$. Montrons que $x\in SEP(u_2,\lambda)$ et que $\varphi(x)=z$.

$z\in SEP(u,\lambda)$. $u(z)=\lambda z$ et $z=z_1+z_2$ avec $(z_1,z_2)\in E_1\times E_2$.

Alors $\begin{cases} u_1(z_1)+u_3(z_2)=\lambda z_1 \\ \text{et} \\ u_2(z_2)=\lambda_2 z_2 \end{cases}$. La seconde ligne donne alors $u_2(x)=\lambda_2 x$ et ainsi $x\in SEP(u_2,\lambda)$. Exploitons la première ligne.

Elle donne $(u_1-\lambda\, Id_{E_1})(z_1)=-u_3(z_2)$. Ainsi $z_1=(u_1-\lambda\, Id_{E_1})^{-1}(-u_3(z_2))$.

Donc $z_1=v_1(-u_3(z_2))=-v_1(u_3(z_2))=-v_1(u_3(x))$; $-v_1(u_3(x))=z_1$

Alors $\varphi(x)=-v_1(u_3(x))+x=z_1+x=z_1+z_2=z$.

$x\in SEP(u_2,\lambda)$ et $\varphi(x)=z$. D'où l'existence.

$\forall z\in SEP(u,\lambda)$, $\exists!\, x\in SEP(u_2,\lambda)$, $\varphi(x)=z$. φ est bijective.

Finalement φ est un isomorphisme de $SEP(u_2,\lambda)$ sur $SEP(u,\lambda)$. $\dim SEP(u_2,\lambda)=\dim SEP(u,\lambda)$.

<u>Si λ est une valeur propre de u_2 sans être une valeur propre de u_1 alors λ est une valeur propre de u et $\dim SEP(u,\lambda)=\dim SEP(u_2,\lambda)$.</u>

Q3) Ici $\mathrm{Sp}\, u_1 \cap \mathrm{Sp}\, u_2 = \emptyset$. Notons que l'on a toujours $\mathrm{Sp}\, u = \mathrm{Sp}\, u_1 \cup \mathrm{Sp}\, u_2$.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\, u$.

1er cas. $\lambda \in \mathrm{Sp}\, u_1$. Alors $\lambda \notin \mathrm{Sp}\, u_2$. Ainsi d'après Q2 c) $SEP(u,\lambda) = SEP(u_1,\lambda)$.

Donc $\dim SEP(u,\lambda) = \dim SEP(u_1,\lambda)$.

2e cas. $\lambda \in \mathrm{Sp}\, u_2$. Alors $\lambda \notin \mathrm{Sp}\, u_1$. d'après Q2 a) $\dim SEP(u,\lambda) = \dim SEP(u_2,\lambda)$.

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u} \dim SEP(u,\lambda) \underset{\uparrow}{=} \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u_1} \dim SEP(u,\lambda) + \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u_2} \dim SEP(u,\lambda) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u_1} \dim SEP(u_1,\lambda) + \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u_2} \dim SEP(u_2,\lambda).$$

$\mathrm{Sp}\, u = \mathrm{Sp}\, u_1 \cup \mathrm{Sp}\, u_2$ et $\mathrm{Sp}\, u_1 \cap \mathrm{Sp}\, u_2 = \emptyset$

• Supposons que u_1 et u_2 sont diagonalisables.

$E = E_1 \oplus E_2$

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u} \dim SEP(u,\lambda) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u_1} \dim SEP(u_1,\lambda) + \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u_2} \dim SEP(u_2,\lambda) = \dim E_1 + \dim E_2 = \dim E.$$

Alors u est diagonalisable.

• Supposons que u est diagonalisable.

$$\dim E_1 + \dim E_2 = \dim E = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u} \dim SEP(u,\lambda) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u_1} \dim SEP(u_1,\lambda) + \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u_2} \dim SEP(u_2,\lambda).$$

Alors $\left(\dim E_1 - \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u_1} \dim SEP(u_1,\lambda)\right) + \left(\dim E_2 - \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u_2} \dim SEP(u_2,\lambda)\right) = 0$.

Or $\dim E_1 - \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u_1} \dim SEP(u_1,\lambda) \geq 0$ et $\dim E_2 - \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u_2} \dim SEP(u_2,\lambda) \geq 0$.

Alors $\dim E_1 - \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u_1} \dim SEP(u_1,\lambda) = \dim E_2 - \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u_2} \dim SEP(u_2,\lambda) = 0$.

Donc $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u_1} \dim SEP(u_1,\lambda) = \dim E_1$ et $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u_2} \dim SEP(u_2,\lambda) = \dim E_2$.

Ainsi u_1 et u_2 sont diagonalisables.

Finalement <u>u est diagonalisable si et seulement si u_1 et u_2 sont diagonalisables</u>

<u>lorsque u_1 et u_2 n'ont pas de valeur propre commune.</u>

R.

EXERCICE 63

Exercice p est un élément de $[\![1, +\infty[\![$.

On considère la matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{2p+1}(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = 1$ si $i = j$ ou $i + j = 2p + 2$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

Q1. La matrice A est-elle inversible ?

Q2. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Q3. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

Q1.. Soit $(E_1, E_2, \dots, E_{2p+1})$ la base canonique de $\mathcal{M}_{2p+1,1}(\mathbb{R})$.

Notons que $\forall k \in [\![1, 2p+1]\!] - \{p+1\}$, $AE_k = E_k + E_{2p+2-k}$ et $AE_{p+1} = E_{p+1}$.

Ainsi $AE_1 = E_1 + E_{2p+1}$ et $AE_{2p+1} = E_{2p+1} + E_1$.

Donc $AE_1 = AE_{2p+1}$. $A(E_1 - E_{2p+1}) = 0_{\mathcal{M}_{2p+1,1}(\mathbb{R})}$ et

$E_1 - E_{2p+1} \neq 0_{\mathcal{M}_{2p+1,1}(\mathbb{R})}$. Donc A n'est pas inversible.

Q2 $A = \begin{pmatrix} 1 & (0) & 1 \\ (0) & 1 & (0) \\ 1 & (0) & 1 \end{pmatrix}$! A est symétrique à coefficients réels donc A est diagonalisable.

Notons plus précisément la symétrie. Soit $(i,j) \in [\![1, 2p+1]\!]^2$.

1er cas.. $i=j$. Alors $a_{ij} = a_{ii} = a_{ji}$!

2e cas.. $i+j = 2p+2$. Alors $j+i = 2p+2$. Donc $a_{ij} = 1 = a_{ji}$.

3e cas.. $i \neq j$ et $i+j \neq 2p+2$. Alors $j \neq i$ et $j+i \neq 2p+2$. Donc $a_{ij} = 0 = a_{ji}$.

Ainsi $\forall (i,j) \in [\![1, 2p+1]\!]^2$, $a_{ij} = a_{ji}$. A est symétrique.

Q3 $\boxed{\text{V1.}}$ $\forall k \in [\![1, 2p+1]\!] - \{p+1\}$, $AE_k = E_k + E_{2p+2-k}$ et $AE_{p+1} = E_{p+1}$.

1/ 1 est valeur propre de A et E_{p+1} est un vecteur propre associé.

Donc $1 \in \mathrm{Sp}\, A$ et $\dim \mathrm{SEP}(A,1) \geq 1$.

2) $\forall k\in [\![1,p]\!]$, $A(E_k+E_{2p+2-k}) = AE_k + AE_{2p+2-k} = E_k+E_{2p+2-k}+$

$E_{2p+2-k}+E_{2p+2-(2p+2-k)} = 2(E_k+E_{2p+2-k})$.

$\forall k\in [\![1,p]\!]$, $A(E_k+E_{2p+2-k}) = 2(E_k+E_{2p+2-k})$ et $E_k+E_{2p+2-k}\neq 0_{\mathcal{M}_{2p+1,1}(\mathbb{R})}$

donc 2 est valeur propre de A et $(E_1+E_{2p+1}, E_2+E_{2p},\dots, E_p+E_{p+2})$ est une famille de vecteurs propres associés. Notons que cette famille est libre.

Soit $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p)\in\mathbb{R}^p$ tel que $\sum_{k=1}^{p}\alpha_k(E_k+E_{2p+2-k}) = 0_{\mathcal{M}_{2p+1,1}(\mathbb{R})}$.

$\sum_{k=1}^{p}\alpha_k E_k + \sum_{k=1}^{p}\alpha_k E_{2p+2-k} = 0_{\mathcal{M}_{2p+1,1}(\mathbb{R})}$.

$\sum_{k=1}^{p}\alpha_k E_k + \sum_{i=p+2}^{2p+1}\alpha_{2p+2-i} E_i = 0_{\mathcal{M}_{2p+1,1}(\mathbb{R})}$

Or $(E_1,E_2,\dots,E_p,E_{p+2},\dots,E_{2p+1})$ est une famille libre car c'est une sous-famille de la base $(E_1,E_2,\dots,E_{2p+1})$.

Ainsi $\forall k\in [\![1,p]\!], \alpha_k=0$.

Ceci achève de montrer que $(E_1+E_{2p+1}, E_2+E_{2p},\dots, E_p+E_{p+2})$ est libre. Notons que cette famille est de cardinal p.

Donc $\underline{\underline{2\in Sp\,A \text{ et } \dim SEP(A,2)\geqslant p}}$.

3) $\forall k\in [\![1,p]\!]$, $A(E_k-E_{2p+2-k}) = AE_k - AE_{2p+2-k}$.

$\forall k\in [\![1,p]\!]$, $A(E_k-E_{2p+2-k}) = E_k+E_{2p+2-k}-(E_{2p+2-k}+E_{2p+2-(2p+2-k)})$

$\forall k\in [\![1,p]\!]$, $A(E_k-E_{2p+2-k}) = 0_{\mathcal{M}_{2p+1,1}(\mathbb{R})}$ et $E_k-E_{2p+2-k}\neq 0_{\mathcal{M}_{2p+1,1}(\mathbb{R})}$.

donc 0 est valeur propre de A et $(E_1-E_{2p+1}, E_2-E_{2p},\dots, E_p-E_{p+2})$ est une famille de vecteurs propres associés.

On montre comme dans 2) que cette famille est libre et de cardinal p.

Ainsi $\underline{\underline{0\in Sp\,A \text{ et } \dim SEP(A,0)\geqslant p}}$.

Résumons : • $\{0,1,2\} \subset \mathrm{Sp}\, A$

• $\dim \mathrm{SEP}(A,0) \geq p$, $\dim \mathrm{SEP}(A,1) \geq 1$ et $\dim \mathrm{SEP}(A,2) \geq p$.

$$2p+1 \underset{\text{cours}}{\geq} \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp} A} \dim \mathrm{SEP}(A,\lambda) \underset{\{0,1,2\}\subset \mathrm{Sp}A}{\geq} \dim \mathrm{SEP}(A,0) + \dim \mathrm{SEP}(A,1) + \dim \mathrm{SEP}(A,2) \geq p+1+p = 2p+1$$

Alors $$2p+1 = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp} A} \dim \mathrm{SEP}(A,\lambda) = \dim \mathrm{SEP}(A,0) + \dim \mathrm{SEP}(A,1) + \dim \mathrm{SEP}(A,2).$$

cela permet d'affirmer que :

1) A est diagonalisable (ce que nous savions déjà)

2) A n'a pas d'autres valeurs propres que 0, 1 et 2. $\mathrm{Sp}A = \{0,1,2\}$.

3) $\dim \mathrm{SEP}(A,0) = p$, $\dim \mathrm{SEP}(A,1) = 1$ et $\dim \mathrm{SEP}(A,2) = p$.

En effet si $\dim \mathrm{SEP}(A,0) > p$ ou $\dim \mathrm{SEP}(A,1) > 1$ ou $\dim \mathrm{SEP}(A,2) > p$ alors $\dim \mathrm{SEP}(A,0) + \dim \mathrm{SEP}(A,1) + \dim \mathrm{SEP}(A,2) > 2p+1$!

4) • $(E_1 - E_{2p+1}, E_2 - E_{2p}, \dots, E_p - E_{p+2})$ est une famille libre de cardinal p de $\mathrm{SEP}(A,0)$ qui est de dimension p.

Alors $(E_1 - E_{2p+1}, E_2 - E_{2p}, \dots, E_p - E_{p+2})$ est une base de $\mathrm{SEP}(A,0)$.

• De même (E_{p+1}) est une base de $\mathrm{SEP}(A,1)$ et

$(E_1 + E_{2p+1}, E_2 + E_{2p}, \dots, E_p + E_{p+2})$ est une base de $\mathrm{SEP}(A,2)$.

Fin de la première version

Nous allons retrouver ce résultat "à la main"

$\boxed{V2}$ Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2p+1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2p+1,1}(\mathbb{R})$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_{2p+1} = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_p + x_{p+2} = \lambda x_p \\ x_{p+1} = \lambda x_{p+1} \\ x_{p+2} + x_p = \lambda x_{p+2} \\ \vdots \\ x_{2p+1} + x_1 = \lambda x_{2p+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in [\![1, 2p+1]\!] - \{p+1\},\ x_k + x_{2p+2-k} = \lambda x_k \\ x_{p+1} = \lambda x_{p+1} \end{cases}$$

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_{2p+1} = (\lambda-1) x_1 \\ \vdots \\ x_{p+2} = (\lambda-1) x_p \\ (1-\lambda) x_{p+1} = 0 \\ x_p = (\lambda-1) x_{p+2} \\ \vdots \\ x_1 = (\lambda-1) x_{2p+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{2p+1} = (\lambda-1) x_1 \\ \vdots \\ x_{p+2} = (\lambda-1) x_p \end{cases} (1) \\ \begin{cases} (1-\lambda) x_{p+1} = 0 \end{cases} (2) \\ \begin{cases} x_p = (\lambda-1)^2 x_p \\ \vdots \\ x_1 = (\lambda-1)^2 x_1 \end{cases} (3)$$

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in [\![1, p]\!],\ (1-(\lambda-1)^2) x_k = 0 \text{ ou } \lambda(2-\lambda) x_k = 0 & \leftarrow (3) \\ (1-\lambda) x_{p+1} = 0 & \leftarrow (2) \\ \forall k \in [\![1, p]\!],\ x_{2p+2-k} = (\lambda-1) x_k & \leftarrow (1) \end{cases}$$

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in [\![1, p]\!],\ \lambda(2-\lambda) x_k = 0 \\ (1-\lambda) x_{p+1} = 0 \\ \forall i \in [\![p+2, 2p+1]\!],\ x_i = (\lambda-1) x_{2p+2-i} \end{cases}$$

__1er cas.__ $\lambda \notin \{0, 1, 2\}$. Alors $\lambda(2-\lambda) \neq 0$ et $1-\lambda \neq 0$.

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in [\![1, p]\!],\ x_k = 0 \\ x_{p+1} = 0 \\ \forall i \in [\![p+2, 2p+1]\!],\ x_i = (\lambda-1) \times 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{2p+1,1}(\mathbb{R})}.$$

__λ n'est pas valeur propre de A.__

2ème cas.. $\lambda = 1$. Alors $\lambda(2-\lambda) \neq 0$.

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in [\![1,p]\!],\ x_k = 0 \\ \forall i \in [\![p+2, 2p+1]\!],\ x_i = (\lambda-1)\, x_{2p+2-i} = 0 \times 0 = 0 \end{cases}$$

$AX = \lambda X \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_p = x_{p+2} = \dots = x_{2p+1} = 0$.

Alors 1 est valeur propre de A et $SEP(A,1) = Vect(E_{2p+1})$.

3ème cas.. $\lambda = 0$. Alors $\lambda(2-\lambda) = 0$ et $1-\lambda \neq 0$.

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_{p+1} = 0 \\ \forall i \in [\![p+2, 2p+1]\!],\ x_i = -x_{2p+2-i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{p+1} = 0 \\ x_{p+2} = -x_p \\ x_{p+3} = -x_{p-1} \\ \vdots \\ x_{2p+1} = -x_1 \end{cases}$$

Alors 0 est valeur propre de A et $SEP(A,0) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ 0 \\ -x_p \\ \vdots \\ -x_1 \end{pmatrix} ; (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \right\}$

notons que $\forall (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ 0 \\ -x_p \\ \vdots \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1(E_1 - E_{2p+1}) + x_2(E_2 - E_{2p}) + \dots + x_p(E_p - E_{p+2})$.

Alors $SEP(A,0) = Vect(E_1 - E_{2p+1}, E_2 - E_{2p}, \dots, E_p - E_{p+2})$.

$(E_1 - E_{2p+1}, E_2 - E_{2p}, \dots, E_p - E_{p+2})$ est une famille génératrice de $SEP(A,0)$. Comme dans V1 on montre que cette famille est libre.

Ainsi $(E_1 - E_{2p+1}, E_2 - E_{2p}, \dots, E_p - E_{p+2})$ est une base de $SEP(A,0)$ de cardinal p.

Alors $\dim SEP(A,0) = p$.

<u>4ème Cas.</u> $\lambda = 2$. Alors $\lambda(2-\lambda)=0$ et $1-\lambda \neq 0$.

$$AX=\lambda X \iff \begin{cases} x_{p+1}=0 \\ \forall i \in [\![p+2, 2p+1]\!],\ x_i = x_{2p+2-i} \end{cases} \iff \begin{cases} x_{p+1}=0 \\ x_{p+2}=x_p \\ x_{p+3}=x_{p-1} \\ \vdots \\ x_{2p+1}=x_1 \end{cases}.$$

Alors 2 est valeur propre de A et $SEP(A,2)=\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ 0 \\ x_p \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix} ; (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \right\}$.

Notons que $\forall (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ 0 \\ x_p \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1(E_1+E_{2p+1}) + x_2(E_2+E_{2p}) + \dots + x_p(E_p+E_{p+2})$.

Alors $SEP(A,2) = Vect(E_1+E_{2p+1}, E_2+E_{2p}, \dots, E_p+E_{p+2})$.

$(E_1+E_{2p+1}, E_2+E_{2p}, \dots, E_p+E_{p+2})$ est une famille génératrice de $SEP(A,2)$. On montre comme dans V1 que cette famille est libre.

Ainsi <u>$(E_1+E_{2p+1}, E_2+E_{2p}, \dots, E_p+E_{p+2})$ est une base de $SEP(A,2)$</u>. de cardinal p.

Alors <u>$\dim SEP(A,2)=p$.</u>

Finalement

1°) $Sp\,A = \{0,1,2\}$

2°) → $(E_1-E_{2p+1}, E_2-E_{2p}, \dots, E_p-E_{p+2})$ est une base de $SEP(A,0)$.

→ (E_{p+1}) est une base de $SEP(A,1)$

→ $(E_1+E_{2p+1}, E_2+E_{2p}, \dots, E_p+E_{p+2})$ est une base de $SEP(A,2)$

3°) $\dim SEP(A,0) + \dim SEP(A,1) + \dim SEP(A,2) = 2p+1$ donc A est diagonalisable.

EXERCICE 64

Exercice

$n \in [\![2, +\infty[\![$. E est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $(n-1)$.

Soit T l'application qui à tout polynôme $P \in E$, associe le polynôme $Q = T(P)$ défini par :

$Q(X) = P(X) + \dfrac{1-X}{n} P'(X)$, où P' désigne le polynôme dérivé de P.

Q1 Montrer que T est un endomorphisme de E.

Q2 Donner la matrice associée à T dans la base canonique de E.

Q3 Montrer que T admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$.

JF Attention à ne pas faire d'erreur sur la valeur de λ_k...

Q4 a) Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_n.

b) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ et P un vecteur propre associé à la valeur propre λ_k. Montrer que $P(1) = 0$.

On pose alors $P(X) = (X-1)^r R(X)$, avec $r \in [\![1, n-1]\!]$ et $R(1) \neq 0$. Montrer que $r = n-k$ et que R est constant.

c) En déduire le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Q5 On considère la suite de polynômes définie par $U_1(X) = X^{n-1}$ et $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $U_{j+1}(X) = T(U_j)(X)$.

a) Montrer que : $U_1(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (X-1)^k$.

b) En déduire l'expression de $U_j(X)$ en fonction de $1, X-1, \ldots, (X-1)^{n-1}$, ceci pour tout $j \in [\![2, +\infty[\![$.

Q1 * Soit $P \in E$, P' est un polynôme de degré au plus $n-2$. Alors $\dfrac{1-X}{n} P'$ est un polynôme de degré au plus $n-1$ donc est un élément de E.

Alors $P + \dfrac{1-X}{n} P'$ appartient à E comme somme de deux éléments de E.

Donc $\forall P \in E, T(P) \in E$. <u>$T$ est une application de E dans E.</u>

* Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(P, \hat{P}) \in E^2$.

$T(\lambda P + \hat{P}) = \lambda P + \hat{P} + \dfrac{1-X}{n}(\lambda P + \hat{P})' = \lambda P + \hat{P} + \dfrac{1-X}{n}(\lambda P' + \hat{P}')$.

$T(\lambda P + \hat{P}) = \lambda\left(P + \dfrac{1-X}{n} P'\right) + \hat{P} + \dfrac{1-X}{n}\hat{P}' = \lambda T(P) + T(\hat{P})$.

Donc <u>T est linéaire</u>.

Finalement <u>T est un endomorphisme de E.</u>

(Q2) • $T(1) = 1 + \frac{1-X}{n} \times 0 = 1$.

• $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $T(X^k) = X^k + \frac{1-X}{n} k X^{k-1} = \left(1 - \frac{k}{n}\right) X^k + \frac{k}{n} X^{k-1}$.

Posons $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_k = 1 - \frac{k}{n}$ et $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $b_k = \frac{k}{n}$.

La matrice de T dans la base canonique $(1, X, \dots, X^{n-1})$ de E est
$$\begin{pmatrix} a_0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & a_1 & b_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & (0) & & \ddots & b_{n-1} \\ & & & & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

(Q3) cette matrice est triangulaire supérieure.

Ses valeurs propres sont les éléments de sa diagonale. Son spectre est $\{1 - \frac{k}{n} ; k \in [\![0, n-1]\!]\}$. $Sp\,T = \{1 - \frac{k}{n} ; k \in [\![0, n-1]\!]\}$

Rappelons que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_k = 1 - \frac{k}{n}$.

$\forall k \in [\![0, n-2]\!]$, $a_{k+1} - a_k = 1 - \frac{k+1}{n} - 1 + \frac{k}{n} = -\frac{1}{n} < 0$.

La suite $(a_k)_{k \in [\![0, n-1]\!]}$ est strictement décroissante.

Posons $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k = a_{n-k}$ (si $k \in [\![1, n]\!]$, $n-k \in [\![0, n-1]\!]$!).

Alors $(\lambda_k)_{k \in [\![1, n]\!]}$ est strictement croissante et $Sp\,T = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$

Donc T admet n valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ telles que $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$.

Remarque : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k = a_{n-k} = 1 - \frac{n-k}{n} = \frac{k}{n}$. $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $a_k = \frac{k}{n}$

Comme $\dim E = n$: T est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

(Q4) a) $\lambda_n = 1$. Or $T(1) = 1$. Donc le polynôme 1 est un élément non nul de $SEP(T, \lambda_n)$ qui est de dimension 1. Alors $SEP(T, \lambda_n) = \mathrm{Vect}(1)$.

b) Soit $k\in[\![1,n-1]\!]$. $\lambda_k=\frac{k}{n}$. $T(P)=\frac{k}{n}P$.

Alors $P+\frac{1-X}{n}P'=\frac{k}{n}P$. En évaluant en 1 on obtient :

$P(1)=\frac{k}{n}P(1)$. Or $\frac{k}{n}\neq 1$ car $k\in[\![1,n-1]\!]$. Ainsi $\underline{P(1)=0}$.

$P=(X-1)^r R$ avec $r\in[\![1,n-1]\!]$ et $R(1)\neq 0$

r n'est autre que l'ordre de multiplicité de la racine 1 dans P.

$$\frac{k}{n}(X-1)^rR=\frac{k}{n}P=T(P)=P+\frac{1-X}{n}P'=(X-1)^rR-\frac{X-1}{n}\left[r(X-1)^{r-1}R+(X-1)^rR'\right]$$

Donc $\frac{k}{n}(X-1)^rR=(X-1)^rR-\frac{1}{n}(X-1)^r\left[rR+(X-1)R'\right]$

Donc $(X-1)^r\left[\left(\frac{k}{n}-1\right)R+\frac{1}{n}\left(rR+(X-1)R'\right)\right]=0_E$.

Comme $(X-1)^r$ n'est pas le polynôme nul il vient :

$\left(\frac{k}{n}-1+\frac{r}{n}\right)R+\frac{1}{n}(X-1)R'=0_E$. (1)

En évaluant en 1 il vient : $\left(\frac{k}{n}-1+\frac{r}{n}\right)R(1)=0$. Or $R(1)\neq 0$

donc $\frac{k}{n}-1+\frac{r}{n}=0$; $\frac{r}{n}=1-\frac{k}{n}$; $\underline{r=n-k}$.

Comme $r=n-k$, (1) donne : $0.R+\frac{1}{n}(X-1)R'=0_E$.

$\frac{1}{n}(X-1)$ étant un polynôme différent du polynôme nul : $R'=0_E$.

Alors $\underline{R \text{ est constant.}}$ donc $\underline{\exists\lambda\in\mathbb{R} \text{ (et même } \mathbb{R}^*\text{)},\ P=\lambda(X-1)^{n-k}}$.

c) Soit $k\in[\![1,n-1]\!]$. Nous venons de voir que si P est un élément non nul de $SEP(T,\lambda_k)$ alors $P\in \mathrm{Vect}\left((X-1)^{n-k}\right)$.

Comme en plus $0_E\in \mathrm{Vect}\left((X-1)^{n-k}\right)$ donc $SEP(T,\lambda_k)\subset \mathrm{Vect}\left((X-1)^{n-k}\right)$.

Or $\dim SEP(T,\lambda_k)=1=\dim \mathrm{Vect}\left((X-1)^{n-k}\right)<+\infty$. Plus de doute :

$$\underline{SEP(T, \lambda_k) = \text{Vect}\left((X-1)^{n-k}\right).}$$

Observons que ce résultat vaut encore pour $k = n$.

Ainsi $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $SEP(T, \lambda_k) = \text{Vect}\left((X-1)^{n-k}\right)$.

<u>Remarque</u>.. $\mathcal{B} = \left((X-1)^{n-1}, (X-1)^{n-2}, \dots, (X-1), 1\right)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de T respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ou $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$!

Q5 a) $U_1 = X^{n-1} = (X-1+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}(X-1)^k$.

$$U_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (X-1)^k.$$

b) $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $U_{j+1} = T(U_j)$.

Alors $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $U_j = T^{j-1}(U_1)$.

Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $U_j = T^{j-1}(U_1) = T^{j-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (X-1)^k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} T^{j-1}\left((X-1)^k\right)$.

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $T\left((X-1)^k\right) = T\left((X-1)^{n-(n-k)}\right) \overset{\boxed{Q4}\,(*)}{=} \frac{n-k}{n} (X-1)^{n-(n-k)} = \frac{n-k}{n} (X-1)^k$.

Alors $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $T^{j-1}\left((X-1)^k\right) = \left(\frac{n-k}{n}\right)^{j-1} (X-1)^k$.

Donc $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $U_j = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^{j-1} (X-1)^k$.

(*) $(X-1)^{n-(n-k)}$ est un vecteur propre de T associé à la valeur propre $\frac{n-k}{n}$.