R..

EXERCICE 1 N1 **Valeurs propres et des sous-espaces propres de A^{-1}.**

▶ *À savoir faite par cœur.*

A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{Sp}(A^{-1}) = \left\{\frac{1}{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\right\}$. Comparer les sous-espaces propres de A^{-1} avec ceux de A.

Montrer que A^{-1} est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

A et A^{-1} sont inversibles donc 0 n'est ni valeur propre de A ni valeur propre de A^{-1}.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Supposons que $AX = \lambda X$. Alors $A^{-1}AX = A^{-1}(\lambda X) = \lambda A^{-1}X$. Donc $X = \lambda A^{-1}X$. Ainsi $A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X$.

Réciproquement supposons que $A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X$. $AA^{-1}X = A(\frac{1}{\lambda}X)$; $X = \frac{1}{\lambda}AX$; $AX = \lambda X$.

Finalement, pour tout λ dans $\mathbb{K}^*$: $\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\} = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X\}$.

Soit λ un élément de $\mathbb{K}^*$.

$\lambda \in \mathrm{Sp}\, A \Leftrightarrow \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\} \neq \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\} \Leftrightarrow \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X\} \neq \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$

$\Updownarrow$

$\frac{1}{\lambda} \in \mathrm{Sp}\, A^{-1}$

donc $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \in \mathrm{Sp}\, A^{-1}$ et ceci pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Notons encore que si $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A$: $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\frac{1}{\lambda} \in \mathrm{Sp}\, A^{-1}$ et $\mathrm{SEP}(A, \lambda) = \mathrm{SEP}(A^{-1}, \frac{1}{\lambda})$.

$\{\frac{1}{\lambda} ; \lambda \in \mathrm{Sp}\, A\} \subset \mathrm{Sp}\, A^{-1}$ comme nous l'avons vu. Réciproquement soit $\mu \in \mathrm{Sp}\, A^{-1}$. $\mu \neq 0$.

Posons $\lambda = \frac{1}{\mu}$. $\mu = \frac{1}{\lambda}$. Alors $\frac{1}{\lambda} \in \mathrm{Sp}\, A^{-1}$ donc $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A$. $\mu = \frac{1}{\lambda}$ avec $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A$.

Ainsi $\forall \mu \in \mathrm{Sp}\, A^{-1}$, $\exists \lambda \in \mathrm{Sp}\, A$, $\mu = \frac{1}{\lambda}$. Donc $\mathrm{Sp}\, A^{-1} \subset \{\frac{1}{\lambda} ; \lambda \in \mathrm{Sp}\, A\}$.

Par conséquent $\mathrm{Sp}\, A^{-1} = \{\frac{1}{\lambda} ; \lambda \in \mathrm{Sp}\, A\}$.

De plus $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\, A$, $\mathrm{SEP}(A, \lambda) = \mathrm{SEP}(A^{-1}, \frac{1}{\lambda})$.

A diagonalisable $\Leftrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, A} \mathrm{SEP}(A, \lambda) \Leftrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, A} \mathrm{SEP}(A^{-1}, \frac{1}{\lambda}) \Leftrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\mu \in \mathrm{Sp}\, A^{-1}} \mathrm{SEP}(A^{-1}, \mu)$

$\Updownarrow$

A^{-1} est diagonalisable

A^{-1} est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

R..

EXERCICE 2 | N1 | **Valeurs propres et des sous-espaces propres de ^tA.**

▶ *À savoir faite par cœur.*

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{Sp}(^tA) = \mathrm{Sp}(A)$.

Comparer les dimensions des sous-espaces propres de ^tA et de A.

Montrer que ^tA est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Rappel.. si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\mathrm{rg}\,^tM = \mathrm{rg}\,M$ & M inversible $\Leftrightarrow$ ^tM inversible.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$\lambda \in \mathrm{Sp}\,A \Leftrightarrow A - \lambda I_n$ non inversible $\Leftrightarrow {}^t(A-\lambda I_n)$ non inversible $\Leftrightarrow {}^tA - \lambda I_n$ non inversible $\Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{Sp}\,^tA$.

Ainsi $\mathrm{Sp}\,A = \mathrm{Sp}\,^tA$ ... ou $\mathrm{Sp}\,^tA = \mathrm{Sp}\,A$.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,A$. $\lambda \in \mathrm{Sp}\,^tA$!

$\dim \mathrm{SEP}(A,\lambda) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n) = n - \mathrm{rg}\,^t(A - \lambda I_n) = n - \mathrm{rg}(^tA - \lambda I_n) = \dim \mathrm{SEP}(^tA,\lambda)$.

$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,A$, $\dim \mathrm{SEP}(A,\lambda) = \dim \mathrm{SEP}(^tA,\lambda)$.

$\mathrm{Sp}\,A = \mathrm{Sp}\,^tA$

A diagonalisable $\Leftrightarrow n = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,A} \dim \mathrm{SEP}(A,\lambda) \Leftrightarrow n = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,A} \dim \mathrm{SEP}(^tA,\lambda) \Leftrightarrow n = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,^tA} \dim \mathrm{SEP}(^tA,\lambda)$ $\Leftrightarrow$ ^tA est diagonalisable

^tA est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Remarque.. Notons qu'en général A et ^tA n'ont pas les mêmes sous-espaces propres. C'est pour cela que la preuve de $\mathrm{Sp}\,^tA = \mathrm{Sp}\,A$ ne peut se faire en partant de "$AX = \lambda X$" ou de "$^tAX = \lambda X$".

R..

EXERCICE **N1** **Endomorphisme (resp. matrice) diagonalisable n'ayant qu'une valeur propre.**

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'ayant qu'une seule valeur propre λ.

Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $A = \lambda\, I_n$.

▲ *Ceci vaut aussi pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$.*

V1 La dimension de l'unique sous-espace propre SEP (A, λ) de A est $n - \mathrm{rg}(A - \lambda\, I_n)$.

A diagonalisable $\Leftrightarrow \dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) = n \Leftrightarrow n - \mathrm{rg}(A - \lambda\, I_n) = n \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A - \lambda\, I_n) = 0 \Leftrightarrow A - \lambda\, I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \Leftrightarrow A = \lambda\, I_n$.

V2 • Si $A = \lambda\, I_n$, A est une matrice diagonale donc A est diagonalisable.

• Réciproquement supposons que A est digonalisable. Il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telle que $D = P^{-1}AP$.

D et A sont semblables donc λ est la seule valeur propre de D. Comme D est diagonale les éléments de sa diagonale sont ses valeurs propres. Ainsi les éléments de la diagonale de D sont tous égaux à λ et D vaut alors $\lambda\, I_n$.

Par conséquent $A = PDP^{-1} = P(\lambda\, I_n)P^{-1} = \lambda\, PP^{-1} = \lambda\, I_n$.

R..

EXERCICE 4 | N1 | **Projecteur spectraux.**

f est un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. λ_1, λ_2, ..., λ_s sont les valeurs propres distinctes de f. On suppose que $s \geqslant 2$.

Pour tout i dans $[\![1, s]\!]$, on note p_i la projection sur SEP (f, λ_i) parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s}$ SEP (f, λ_j).

Q1. i est un élément de $[\![1, s]\!]$. Justifier la définition de p_i.

Q2. Montrer que $\forall r \in \mathbb{N}$, $f^r = \lambda_1^r p_1 + \lambda_2^r p_2 + \cdots + \lambda_p^r p_s = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^r p_i$.

Montrer que si Q est un éléments de $\mathbb{K}[X]$, $Q(f) = \sum_{i=1}^{s} Q(\lambda_i)\, p_i$.

Q3. Soit j un éléments de $[\![1, s]\!]$.

Justifier l'existence et l'unicité d'un élément L_j de $\mathbb{K}_{s-1}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1, s]\!]$, $L_j(\lambda_i) \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que $p_j = L_j(f)$.

Thème abordé dans ESCP 2003 2.7, 2011 2.15.

Q1 f est diagonalisable donc $E = \bigoplus_{j=1}^{s} SEP(f, \lambda_j)$. Soit $i \in [\![1, s]\!]$.

$E = SEP(f, \lambda_i) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} SEP(f, \lambda_j) \right)$, non ?

Ainsi $\underline{SEP(f, \lambda_i)}$ et $\underline{\bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} SEP(f, \lambda_j)}$ sont supplémentaires ce qui justifie la définition de p_i

Dans la suite, pour tout i dans $[\![1, s]\!]$, nous notons G_i le sous-espace vectoriel $\bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} SEP(f, \lambda_j)$

et F_i le sous-espace vectoriel $SEP(f, \lambda_i)$; p_i est la projection sur F_i parallèlement à G_i.

Q2 Soit $r \in \mathbb{N}$. Soit $x \in E$. $\exists ! (x_1, x_2, \ldots, x_s) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_s$, $x = \sum_{j=1}^{s} x_j$.

$\forall j \in [\![1, s]\!]$, $x_j \in F_j$. Donc $\forall j \in [\![1, s]\!]$, $f(x_j) = \lambda_j x_j$.

Alors $\forall j \in [\![1, s]\!]$, $f^r(x_j) = \lambda_j^r x_j$ (en convenant que λ_j^0 vaut 1 même si $\lambda_j = 0$...)

donc $f^r(x) = f^r\left(\sum_{j=1}^{s} x_j\right) = \sum_{j=1}^{s} f^r(x_j) = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j^r x_j$. $\underline{f^r(x) = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j^r x_j \text{ ou } f^r(x) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^r x_i}$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. $x = x_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} x_j$, $x_i \in F_i$ et $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} x_j \in G_i$ donc $p_i(x) = x_i$.

Alors $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i^r x_i = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^r p_i(x) = \left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i^r p_i\right)(x)$.

Finalement $\forall x \in E$, $f^r(x) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^r x_i = \left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i^r p_i\right)(x)$.

Donc $f^r = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^r p_i$ et ceci pour tout r dans $\mathbb{N}$.

Soit φ un élément de $\mathbb{K}[X]$. $\exists m \in \mathbb{N}$, $\exists (a_0, a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{K}^{m+1}$, $\varphi = \sum_{r=0}^{m} a_r X^r$.

$\varphi(f) = \sum_{r=0}^{m} a_r f^r = \sum_{r=0}^{m} a_r \left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i^r p_i\right) = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{r=0}^{m} a_r \lambda_i^r\right) p_i = \sum_{i=1}^{s} \varphi(\lambda_i) p_i$.

$\forall \varphi \in \mathbb{K}[X]$, $\varphi(f) = \sum_{i=1}^{s} \varphi(\lambda_i) p_i$.

(Q3) Montrons l'existence et l'unicité demandée par analyse/synthèse.

* Analyse / Unicité. Supposons que L_j soit un élément de $\mathbb{K}_{s-1}[X]$ tel que
$$\forall i \in [\![1, s]\!], \quad L_j(\lambda_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors $\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_s$ sont des racines de L_j. Donc $\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{s} (X - \lambda_i)$ divise L_j.

Or $\deg \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{s} (X - \lambda_i) = s-1$ et $L_j \in \mathbb{K}_{s-1}[X]$.

Alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $L_j = \lambda \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{s} (X - \lambda_i)$. De plus $L_j(\lambda_j) = 1$. Alors $\lambda \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{s} (\lambda_j - \lambda_i) = 1$.

Donc $\lambda = \dfrac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{s} (\lambda_j - \lambda_i)}$ et $L_j = \dfrac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{s} (\lambda_j - \lambda_i)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{s} (X - \lambda_i)$. D'où l'unicité de L_j.

* Synthèse / Existence. Posons $L_j = \dfrac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{s} (\lambda_j - \lambda_i)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{s} (X - \lambda_i)$.

$\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{s} (X - \lambda_i)$ est un polynôme de degré $s-1$ admettant pour racines $\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_s$.

Donc $L_j \in \mathbb{K}_{s-1}[X]$ et L_j s'annule en $\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_s$.

De plus $L_j(\lambda_j) = \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{s}(\lambda_j-\lambda_i)} \prod\limits_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{s}(\lambda_j-\lambda_i) = 1$.

Ainsi $\forall i \in [\![1,s]\!]$, $L_j(\lambda_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ et $L_j \in \mathbb{K}_{s-1}[X]$. D'où l'existence.

<u>Il existe un unique élément L_j de $\mathbb{K}_{s-1}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1,s]\!]$, $L_j(\lambda_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.</u>

<u>De plus $L_j = \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{s}(\lambda_j-\lambda_i)} \prod\limits_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{s}(X-\lambda_i)$.</u>

Soit $j \in [\![1,s]\!]$. Q2 donne $L_j(f) = \sum\limits_{i=1}^{s} L_j(\lambda_i)\, p_i \underset{\uparrow}{=} p_j$.

$L_j(\lambda_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

<u>$\forall j \in [\![1,s]\!]$, $p_j = L_j(f)$.</u>

<u>Remarque</u>.. En toute rigueur il faut valider le résultat de Q2 pour r dans $\mathbb{N}^*$. Et faire alors attention dans la preuve de $\varphi(f) = \sum\limits_{i=1}^{s} \varphi(\lambda_i)\, p_i$ à détacher le terme $a_0 f^0$. On prendra alors soin de dire $\exists n \in \mathbb{N}^*$ à la place de $\exists n \in \mathbb{N}$...

R.

EXERCICE 5 | N1 | **Construction d'un polynôme annulateur.**

$n \in [\![2,+\infty[\![$ et A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\forall M \in E,\ T(M) = M - \operatorname{tr}(M)\,A$ ($\operatorname{tr}(M)$ est la trace de M donc la somme de ses éléments diagonaux).

Q1. Montrer que T est un endomorphisme de E.

Q2. a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\operatorname{tr}(A)$ pour que T soit bijectif.

Déterminer T^{-1} lorsque T est bijectif.

b) Caractériser T lorsque T n'est pas bijectif.

Q3. a) Trouver un polynôme annulateur de T de degré 2.

b) Retrouver alors le résultat de Q2.

c) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de T. T est-il diagonalisable ?

Thème abordé dans EDHEC 2005 ex 1.

Q1 * Soit $M \in E$. $\operatorname{tr}(M) \in \mathbb{R}$ et $A \in E$ donc $\operatorname{tr}(M)A \in E$. Alors $T(M)$ appartient à E comme différence de deux éléments de E.

$\forall M \in E,\ T(M) \in E$. <u>$T$ est une application de E dans E.</u>

* Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(M,N) \in E^2$.

$T(\lambda M+N) = \lambda M+N - \operatorname{tr}(\lambda M+N)A \underset{\text{tr est linéaire}}{=} \lambda M+N - (\lambda \operatorname{tr}(M)+\operatorname{tr}(N))A = \lambda(M-\operatorname{tr}(M)A) + (N-\operatorname{tr}(N)A)$.

Donc $T(\lambda M+N) = \lambda T(M)+T(N)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (M,N) \in E^2,\ T(\lambda M+N) = \lambda T(M)+T(N)$; <u>T est linéaire.</u>

Finalement <u>T est un endomorphisme de E.</u>

Q2 a) Examinons le noyau de T. Soit $M \in \operatorname{Ker} T$.

$T(M) = 0_E$. $M - \operatorname{tr}(M)A = 0_E$. $M = \operatorname{tr}(M)A$ (1). Notons déjà que $M \in \operatorname{Vect}(A)$.

$\operatorname{tr}(M) \underset{(1)}{=} \operatorname{tr}(\operatorname{tr}(M)A) = \operatorname{tr}(M)\operatorname{tr}(A)$. Alors $(1-\operatorname{tr}(A))\operatorname{tr}(M) = 0$.

tr est linéaire

→ <u>Supposons $\operatorname{tr}(A) \neq 1$.</u> Alors $(1-\operatorname{tr}(A)) \neq 0$ donc $\operatorname{tr}(M) = 0$.

En reportant dans (1) il vient $M = 0_E$. Dans ces conditions $\operatorname{Ker} T = \{0_E\}$.

Alors T est un endomorphisme injectif de E qui est de dimension finie. <u>T est bijectif.</u>

→ <u>Supposons $\operatorname{tr}(A) = 1$.</u> Nous avons vu que $\operatorname{Ker} T \subset \operatorname{Vect}(A)$.

Or $T(A) = A - \operatorname{tr}(A)A = A - A = 0_E$. Donc $A \in \operatorname{Ker} T$. Mieux, $\operatorname{Vect}(A) \subset \operatorname{Ker} T$ car $\operatorname{Ker} T$ est un sous-espace vectoriel de E.

Finalement $\ker T = \mathrm{Vect}(A)$. $A \neq 0_E$ car $tr(A)=1$ donc $\dim \ker T = 1$. T n'est pas injectif.

Alors T n'est pas bijectif.

Ainsi T est bijectif si et seulement si $tr(A) \neq 1$.

Supposons $tr(A) \neq 1$. Déterminons T^{-1}. Soit $M \in E$. Posons $N = T(M)$. $N = M - tr(M)A$.

Alors $tr(N) = tr(M) - tr(tr(M)A) = tr(M) - tr(M)\,tr(A) = (1-tr(A))\,tr(M)$. donc $tr(M) \overset{tr(A)\neq 1}{=} \frac{tr(N)}{1-tr(A)}$.

Ainsi $M = N + tr(M)A = N + \frac{tr(N)}{1-tr(A)} A$.

$\forall N \in E,\ T^{-1}(N) = N + \frac{tr(N)}{1-tr(A)} A$. Soit $N \in E$. $T^{-1}(N) = N + \frac{1}{1-tr(A)} tr(N)A \overset{T(N)=N-tr(N)A}{=} N + \frac{1}{1-tr(A)}(N - T(N))$.

$T^{-1}(N) = \left(1 + \frac{1}{1-tr(A)}\right)N - \frac{1}{1-tr(A)} T(N) = \frac{1}{tr(A)-1}\left[T(N) - (2-tr(A))N\right] = \frac{1}{tr(A)-1}(T - (2-tr(A))Id_E)(N)$

ceci étant vrai pour tout N dans E : $T^{-1} = \frac{1}{tr(A)-1}(T - (2-tr(A))Id_E)$.

b) Supposons que $tr(A)=1$. Alors $T(A) = 0_E$ car $A \in \ker T$.

$\forall M \in E,\ T(T(M)) = T(M - tr(M)A) = T(M) - tr(M)T(A) = T(M)$. $T \circ T = T$. Comme T est un endomorphisme de E : T est un projecteur donc une projection. Soit $M \in E$.

$M \in \ker(T - Id_E) \iff T(M) = M \iff M - tr(M)A = M \iff tr(M)A = 0 \underset{A \neq 0_E \text{ car } tr(A)=1}{\iff} tr(M) = 0 \iff M \in \ker tr$

Ainsi $\ker(T - Id_E) = \ker tr$ et $\ker T = \mathrm{Vect}(A)$.

Si $tr(A) = 1$: T est la projection sur $\ker tr$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(A)$.

Q3 Soit $M \in E$. $T(T(M)) = T(M - tr(M)A) = T(M) - tr(M)T(A)$.

$T(T(M)) = T(M) - tr\,M\,(A - tr(A)A) = T(M) - (1-tr(A))\,tr(M)\,A$.

Or $T(M) = M - tr(M)A$ donc $tr(M)A = M - T(M)$.

$T(T(M)) = T(M) - (1-tr(A))(M - T(M)) = (2-tr(A))T(M) - (1-tr(A))M$.

$T(T(M)) - (2-tr(A))T(M) + (1-tr(A))M = 0_E$.

$(T \circ T - (2-tr(A))T + (1-tr(A))Id_E)(M) = 0_E$ et ceci pour tout M dans E.

Alors $T \circ T - (2-tr(A))T + (1-tr(A))Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$X^2 - (2-tr(A))X + 1 - tr(A)$ est un polynôme annulateur de T de degré 2.

b) $T\circ T-(2-tr(A))T=(tr(A)-1)Id_E$

* Supposons $tr(A)\neq 1$.

Alors $Id_E=\frac{1}{tr(A)-1}\left(T\circ T-(2-tr(A))T\right)$

$$Id_E=\left(\frac{1}{tr(A)-1}(T-(2-tr(A))Id_E)\right)\circ T=T\circ\left(\frac{1}{tr(A)-1}(T-(2-tr(A))Id_E)\right).$$

Cela suffit pour dire que T est bijectif et que $T^{-1}=\frac{1}{tr(A)-1}\left(T-(2-tr(A))Id_E\right)$

* Supposons $tr(A)=1$.

Alors $T\circ T-(2-1)T=(1-1)Id_E=0_{\mathcal{L}(E)}$. $T\circ T-T=0_{\mathcal{L}(E)}$. $T\circ T=T$

T est un endomorphisme de E qui vérifie $T\circ T=T$. Alors T est un projecteur donc une projection.

$E=\mathrm{Ker}(T-Id_E)\oplus\mathrm{Ker}\,T$. Supposons $\mathrm{Ker}\,T=\{0_E\}$. Alors $E=\mathrm{Ker}(T-Id_E)$.

donc $T=Id_E$. Alors $T(I_n)=I_n$. $I_n-tr(I_n)A=I_n$. $tr(I_n)A=0_E$ et $A\neq 0_E$ (car $tr(A)=1$). Alors $n=tr(I_n)=0$!!

Ainsi $\mathrm{Ker}\,T\neq\{0_E\}$. T n'est donc pas injectif. T n'est pas bijectif.

Nous avons ainsi retrouvé tous les résultats de Q2.

c) Les zéros de $X^2-(2-tr(A))X+1-tr(A)$ sont 1 et $1-tr(A)$.

ce polynôme étant un polynôme annulateur de T : $S_pT\subset\{1,1-tr(A)\}$.

Remarque.. Notons que $1=1-tr(A)\Leftrightarrow tr(A)=0$.

Regardons si 1 et $1-tr(A)$ sont des valeurs propres de T.

Soit $M\in E$.

* $T(M)=M\Leftrightarrow M-tr(M)A=M\Leftrightarrow tr(M)A=0_E$.

<u>1er cas..</u> $A \neq 0_E$

$T(M) = M \Leftrightarrow tr(M) = 0 \Leftrightarrow M \in Ker(tr)$.

tr est une forme linéaire non nulle sur E ($tr(I_n) = n \neq 0$) donc son noyau est un hyperplan. dim $Ker(tr) = n-1 > 0$ car $n \in [\![2, +\infty[\![$.

Alors $Ker\, tr \neq \{0_E\}$.

donc 1 est valeur propre de T et le sous-espace propre associé est le noyau de tr ; c'est un hyperplan.

<u>2ème cas..</u> $A = 0_E$. Alors $T = Id_E$. donc $1 \in Sp\,T$ et $SEP(T,1) = E$!

* $T(M) = (1-tr(A))M \Leftrightarrow M - tr(M)A = M - tr(A)M \Leftrightarrow tr(A)M = tr(M)A$

$T(M) = (1-tr(A))M \Leftrightarrow tr(A)\,M = tr(M)A$

<u>1er cas..</u> $tr(A) \neq 0$

$T(M) = (1-tr(A))M \Leftrightarrow M = \dfrac{tr(M)}{tr(A)} A$

Ainsi $Ker(T-(1-tr(A))Id_E) \subset Vect(A)$!

Or $T(A) = A - tr(A)A = (1-tr(A))A$ donc $A \in Ker(T-(1-tr(A))Id_E)$.

mieux $Vect(A) \subset Ker(T-(1-tr(A))Id_E)$.

Finalement $Ker(T-(1-tr(A))Id_E) = Vect(A)$. Or $A \neq 0_E$ car $tr(A) \neq 0$.

donc $1-tr(A) \in Sp\,T$ et $SEP(T, 1-tr(A)) = Vect(A)$.

<u>2ème cas..</u> $tr(A) = 0$. Alors $1-tr(A) = 1$. Nous avons déjà vu que 1 est valeur propre et nous avons déterminé son sous-espace propre associé qui est $Ker\,tr$ si $A \neq 0_E$ et E si $A = 0_E$.

Résumons.

1er cas. $tr(A) \neq 0$. Notons alors que $A \neq 0_E$.

$Sp\,T = \{1, 1 - tr(A)\}$. $SEP(T, 1) = \mathrm{Ker}\,tr$ et $SEP(T, 1 - tr(A)) = \mathrm{Vect}(A)$.

$\mathrm{Ker}\,tr$ est un hyperplan et $\mathrm{Vect}(A)$ est une droite vectorielle.

Alors $\dim SEP(A, 1) + \dim SEP(T, 1 - tr(A)) = \dim E$. T est diagonalisable.

2ème cas. $tr(A) = 0$. $Sp\,T = \{1\}$

Si $A \neq 0_E$: $SEP(T, 1) = \mathrm{Ker}\,tr$. T n'est pas diagonalisable.

Si $A = 0_E$: $T = Id_E$. T est diagonalisable.

1 **EXERCICE 6**

Exercice $E=\mathbb{R}^3$. f est l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{C}=(e_1,e_2,e_3)$ est $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$.

Q1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Q2. Trouver une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est : $A'=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$.

Préciser la matrice de passage P de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$ et déterminer P^{-1}.

Q3. a) Montrer que $Q=(X-1)(X-3)^2$ est un polynôme annulateur de A'.

b) Montrer que A' n'admet pas de polynôme annulateur non nul de degré inférieur ou égal à 2.

c) Montrer que A et A' ont mêmes polynômes annulateurs.

d) Déterminer un polynôme annulateur non nul de A de degré minimal et de coefficient dominant égal à 1.

Q1 Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soit $u=xe_1+ye_2+ze_3$ un élément de E.

$$u\in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E)\Leftrightarrow (f-\lambda Id_E)(u)=0_E \Leftrightarrow (A-\lambda I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow \begin{cases}(2-\lambda)x+y+z=0\\ x+(2-\lambda)y+z=0\\ (3-\lambda)z=0\end{cases}$$

__1er Cas.__ $\lambda=3$.

$$u\in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E)\Leftrightarrow \begin{cases}-x+y+z=0\\ x-y+z=0\end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2+L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases}-x+y+z=0\\ 2z=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}z=0\\ y=x\end{cases}.$$

$\mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E)=\mathrm{Vect}(e_1+e_2)$. Alors __$3\in Sp\, f$ et $SEP(f,3)=\mathrm{Vect}(e_1+e_2)$.__

__2e Cas.__ $\lambda\neq 3$

$$u\in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E)\Leftrightarrow \begin{cases}z=0\\ (2-\lambda)x+y=0\\ x+(2-\lambda)y=0\end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases}z=0\\ (2-\lambda)x+y=0\\ (3-\lambda)(x+y)=0\end{cases} \underset{\lambda\neq 3}{\Leftrightarrow} \begin{cases}z=0\\ (2-\lambda)x+y=0\\ x+y=0\end{cases}$$

$$u\in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E)\Leftrightarrow \begin{cases}z=0\\ y=-x\\ 0=(2-\lambda)x-x=(1-\lambda)x\end{cases}.$$

__a) $\lambda\neq 1$__

$$u\in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E)\Leftrightarrow \begin{cases}z=0\\ y=-x\\ x=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=0 \Leftrightarrow u=0_E.$$

$\mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E)=\{0_E\}$. 0 n'est pas valeur propre de f.

b) $\lambda = 1$

$u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = -x \end{cases}$. $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2)$.

Ainsi $1 \in \mathrm{Sp} f$ et $\mathrm{SEP}(f, 1) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2)$.

Finalement $\mathrm{Sp} f = \{1, 3\}$, $\mathrm{SEP}(f, 1) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2)$ et $\mathrm{SEP}(f, 3) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2)$.

$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp} f} \dim \mathrm{SEP}(f, \lambda) = \dim \mathrm{SEP}(f, 1) + \dim \mathrm{SEP}(f, 3) = 1 + 1 = 2 \neq 3 = \dim E$.

Ainsi f n'est pas diagonalisable. Donc A n'est pas diagonalisable.

Q2 Analyse.. Supposons que $\mathcal{B} = (e'_1, e'_2, e'_3)$ soit une base de E telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ soit $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Alors $f(e'_1) = e'_1$, $f(e'_2) = 3e'_2$ et $f(e'_3) = e'_2 + 3e'_3$.

donc $e'_1 \in \mathrm{SEP}(f, 1) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2)$, $e'_2 \in \mathrm{SEP}(f, 3) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2)$ et $e'_2 = (f - 3\mathrm{Id})(e'_3)$. Notons que $e'_2 \in \mathrm{SEP}(f, 3) \cap \mathrm{Im}(f - 3\mathrm{Id}_E)$ donc $e'_2 \in \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Im}(f - 3\mathrm{Id}_E)$.

Synthèse Posons $e'_1 = e_1 - e_2$. $e'_1 \in \mathrm{SEP}(f, 1)$ donc $f(e'_1) = e'_1$.

$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\mathrm{Im}(f - 3\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}((f - 3\mathrm{Id}_E)(e_1), (f - 3\mathrm{Id}_E)(e_2), (f - 3\mathrm{Id}_E)(e_3))$.

$\mathrm{Im}(f - 3\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(-e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_1 + e_2) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2, e_1 + e_2)$

Notons que : $\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2) \subset \mathrm{Im}(f - 3\mathrm{Id}_E)$.

Ainsi $\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Im}(f - 3\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2)$.

Posons alors $e'_2 = e_1 + e_2$. $e'_2 \in \mathrm{SEP}(f, 3)$; $f(e'_2) = 3e'_2$.

Observons que $(f-3Id)(e_3)=e_1+e_2$.

Posons alors $e'_3=e_3$. $(f-3Id_E)(e'_3)=(f-3Id_E)(e_3)=e_1+e_2=e'_2$.

$f(e'_3)=e'_2+3e'_3$.

▲ Remarque.. Si on ne remarque pas que $(f-3Id_E)(e_3)=e_1+e_2$. On cherche $u=xe_1+ye_2+ze_3$ dans E tel que $(f-3Id_E)(u)=e_1+e_2$.

ce qui revient à résoudre le système $\begin{cases}-x+y+z=1\\ x-y+z=1\\ 0=0\end{cases}$.

$\begin{cases}-x+y+z=1\\ x-y+z=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y+z=1\\ 2z=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=1\\ y=x\end{cases}$.

L'ensemble des vecteurs u de E tel que $(f-3Id_E)(u)=e_1+e_2$ est :

$\{e_3+\alpha(e_1+e_2)\,;\,\alpha\in\mathbb{R}\}$ ... donc "$e_3+\mathrm{Ker}(f-3Id_E)$" ... ▲

Posons $\mathcal{B}=(e'_1,e'_2,e'_3)$. Montrons que $\mathcal{B}$ est une base de E. Il suffit de montrer que cette famille est libre car elle est de cardinal 3 qui est la dimension de E.

Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\alpha e'_1+\beta e'_2+\gamma e'_3=0_E$.

$0_E=\alpha(e_1-e_2)+\beta(e_1+e_2)+\gamma e_3=(\alpha+\beta)e_1+(\beta-\alpha)e_2+\gamma e_3$

La liberté de (e_1,e_2,e_3) donne alors : $\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \beta-\alpha=0\\ \gamma=0\end{cases}$. Donc $\alpha=\beta=\gamma=0$.

$\mathcal{B}=(e'_1,e'_2,e'_3)=(e_1-e_2,e_1+e_2,e_3)$ est une base de E telle que la matrice de f dans cette base est $A'=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$.

$P = Pas(\mathcal{E}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} e'_1 = e_1 - e_2 \\ e'_2 = e_1 + e_2 \\ e'_3 = e_3 \end{cases}$; $\begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}(e'_1 + e'_2) \\ e_2 = \frac{1}{2}(e'_2 - e'_1) \\ e_3 = e'_3 \end{cases}$

Or $P^{-1} = Pas(\mathcal{B}, \mathcal{E})$.

Ainsi $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Notons que $A' = P^{-1}AP$

Q3 a) $(A' - I_3)(A' - 3I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (*)

$(A' - I_3)(A' - 3I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi $Q = (X-1)(X-3)^2$ est un polynôme annulateur de A'.

b) Supposons que $\hat{Q}$ soit un polynôme annulateur non nul de A' de degré inférieur ou égal à 2.

$Sp\, A' = Sp\, f = \{1, 3\}$.

Alors $(X-1)(X-3)$ divise $\hat{Q}$. Comme $\deg \hat{Q} \leq 2$ et $\hat{Q} \neq 0$:

$\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$, $\hat{Q} = \lambda (X-1)(X-3)$.

Alors $\lambda(A - I_3)(A - 3I_3) = \hat{Q}(A) = 0_{M_3(\mathbb{R})}$. Comme λ n'est pas nul.

$(A - I_3)(A - 3I_3) = 0_{M_3(\mathbb{R})}$. Or nous avons vu que $(A - I_3)(A - 3I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (au niveau de (*)). Ceci est contradictoire.

Ainsi A' n'a pas de polynôme annulateur non nul de degré inférieur ou égal à 2.

c) Soit R un élément de $\mathbb{R}[X]$

$R(A)$ (resp. $R(A')$) est la matrice de $R(f)$ dans $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{B}$).

Ainsi $R(A) = 0_{M_3(\mathbb{R})} \Leftrightarrow R(f) = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow R(A') = 0_{M_3(\mathbb{R})}$.

Donc A et A' ont mêmes polynômes annulateurs.

d) Les polynômes annulateurs non nuls de A' donc de A ont un degré supérieur ou égal à 3 d'après b).

$Q = (X-1)(X-3)^2$ est un polynôme annulateur non nul de A' donc de A de degré 3 donc de degré minimal. De plus il est unitaire.

Ainsi $Q = (X-1)(X-3)^2$ est un polynôme annulateur non nul de A de degré minimal et de coefficient dominant égal à 1.

Exercice.. Montrer que Q est l'unique polynôme annulateur non nul de A de degré minimal et de coefficient dominant égal à 1.

Q est LE POLYNÔME MINIMAL de A.

EXERCICE 7 **N1** **Cours : existence d'un polynôme annulateur non nul pour une matrice.**

Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède au moins un polynôme annulateur non nul.

▲ *Ceci vaut aussi pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$.*

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2})$ est une famille de cardinal n^2+1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est un espace vectoriel de dimension n^2. Cette famille est donc nécessairement liée.

Ainsi on peut trouver n^2+1 éléments λ_0, λ_1, ..., λ_{n^2} de $\mathbb{K}$, non tous nuls et tels que :

$$\lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \cdots + \lambda_{n^2} A^{n^2} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}.$$

Posons $P = \sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k X^k$. P est un élément non nul de $\mathbb{K}[X]$ (l'un au moins de ses coefficients n'est pas nul) tel que $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

P est un polynôme annulateur non nul de A.

EXERCICE 8 **N1** **Dans C au moins une racine d'un polynôme annulateur non nul est valeur propres.**

Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et P un polynôme annulateur non nul de A.

Montrer que l'une au moins des racines de P est une valeur propre de A.

▲ *Ceci vaut aussi pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$.*

Soit P un élément non nul de $\mathbb{C}[X]$ tel que $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

Supposons que P soit constant. Alors il exite un élément non nul λ de $\mathbb{C}$ tel que $P = \lambda$. Ainsi $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} = P(A) = \lambda\, I_n$ et donc $\lambda = 0$!

P est donc un élément non constant de $\mathbb{C}[X]$. P est alors scindé.

Il existe alors des $r+1$ éléments γ, a_1, ..., a_r de $\mathbb{C}$ tels que $P = \gamma \displaystyle\prod_{k=1}^{r} (X - a_k)$. a_1, ..., a_r sont les racines de P.

$P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ et γ n'est pas nul donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{r} (A - a_k\, I_n) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$. Ainsi $\displaystyle\prod_{k=1}^{r} (A - a_k\, I_n)$ n'est pas inversible. Sachant que le produit de r matrices inversibles est inversible nécessairement l'une des matrices du produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{r} (A - a_k\, I_n)$ n'est pas inversible.

Alors il existe un élément i_0 de $[\![1, r]\!]$ tel que la matrice $A - a_{i_0}\, I_n$ ne soit pas inversible. a_{i_0} est alors une valeur propre de A.

Ainsi l'un des zéros de P est une valeur propre de A.

EXERCICE 9 **N1** **Existence d'une valeur propre pour une matrice à coefficients complexes.**

Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède au moins une valeur propre.

▲ *Ceci vaut aussi pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$.*

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

• Montrons que A possède un polynôme annulateur non nul.

$(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n^2})$ est une famille de cardinal n^2+1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est un espace vectoriel de dimension n^2. Cette famille est donc nécessairement liée.

Ainsi on peut trouver n^2+1 éléments λ_0, λ_1, ..., λ_{n^2} de $\mathbb{C}$, non tous nuls et tels que :

$$\lambda_0\, I_n + \lambda_1\, A + \lambda_2\, A^2 + \cdots + \lambda_{n^2}\, A^{n^2} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}.$$

Posons $P = \sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k\, X^k$. P est un élément non nul de $\mathbb{C}[X]$ (l'un au moins de ses coefficients n'est pas nul) tel que $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

P est un polynôme annulateur non nul de A.

• Montrons que A possède au moins une valeur propre.

P un élément non nul de $\mathbb{C}[X]$ tel que $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

Supposons que P soit constant. Alors il existe un élément non nul λ de $\mathbb{C}$ tel que $P = \lambda$. Ainsi $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} = P(A) = \lambda\, I_n$ et donc $\lambda = 0$!

P est donc un élément non constant de $\mathbb{C}[X]$. P est alors scindé.

Il existe alors des $r+1$ éléments γ, a_1, ..., a_r de $\mathbb{C}$ tels que $P = \gamma \prod_{k=1}^{r} (X - a_k)$. Les racines de P sont a_1, ..., a_r.

$P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ et γ n'est pas nul donc $\prod_{k=1}^{r} (A - a_k\, I_n) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$. Ainsi $\prod_{k=1}^{r} (A - a_k\, I_n)$ n'est pas inversible. Sachant que le produit de r matrices inversibles est inversible nécessairement l'une des matrices du produit $\prod_{k=1}^{r} (A - a_k\, I_n)$ n'est pas inversible.

Alors il existe un élément i_0 de $[\![1, r]\!]$ tel que la matrice $A - a_{i_0}\, I_n$ ne soit pas inversible. a_{i_0} est alors une valeur propre de A.

Ainsi A possède au moins une valeur propre.

R.

EXERCICE 10 **N1** **Polynôme d'une matrice diagonalisable**

A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Q est un élément de $\mathbb{K}[X]$.

Montrer que si $B = P^{-1}AP$ alors $Q(B) = P^{-1}Q(A)P$.

Application. Montrer que si A est diagonalisable $Q(A)$ est diagonalisable et $\operatorname{Sp} Q(A) = Q(\operatorname{Sp} A)$.

▲ *Ce dernier résultat vaut aussi pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$.*

• Il existe un élement n de $\mathbb{N}$ et un élément $(a_0, a_1, \dots, a_{n+1})$ de $\mathbb{K}^{n+1}$ tel que $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Alors $Q(B) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k B^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (P^{-1}AP)^k$. Une récurrence simple donne $\forall k \in \mathbb{N},\ (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$.

Alors $Q(B) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k P^{-1}A^kP = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k A^k\right)P = P^{-1}Q(A)P$.

$$\boxed{Q(B) = P^{-1}Q(A)P.}$$

• Suppons la matrice A diagonalisable. A est alors semblable à une matrice diagonale D. Il existe une matrice inversible S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $D = S^{-1}AS$.

D'après ce qui précède $Q(D) = S^{-1}Q(A)S$. Ainsi $Q(A)$ est semblable à $Q(D)$.

D étant diagonale il en est de même pour D^k et ceci pour tout élément k de $\mathbb{N}$.

Alors $Q(D) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k D^k$ est alors une matrice diagonale comme combinaison linéaire de matrices diagonales.

$Q(A)$ étant semblable à une matrice diagonale, ainsi :

$$\boxed{Q(A) \text{ est diagonalisable.}}$$

Posons $D = \operatorname{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$. Alors $\operatorname{Sp} D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$.

Ainsi $\operatorname{Sp} A = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ car A et D sont semblables.

De plus $Q(D) = \operatorname{Diag}\big(Q(d_1), Q(d_2) \dots, Q(d_n)\big)$. Donc $\operatorname{Sp} Q(D) = \big\{Q(d_1), Q(d_2) \dots, Q(d_n)\big\}$.

Alors $\operatorname{Sp} Q(A) = \big\{Q(d_1), Q(d_2) \dots, Q(d_n)\big\}$ car $Q(A)$ et $Q(D)$ sont semblables.

Finalement $\operatorname{Sp} Q(A) = \big\{Q(\lambda)\,;\, \lambda \in \operatorname{Sp} A\big\}$, donc :

$$\boxed{\operatorname{Sp} Q(A) = Q\big(\operatorname{Sp} A\big).}$$

EXERCICE 11 **Comparaison entre P(Sp A) et Sp P(A).**

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

N1 Q1. Montrer que $P(\mathrm{Sp}\, A) \subset \mathrm{Sp}\, P(A)$.

N2 Q2. Ici $\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{C}}$. Montrer que $P(\mathrm{Sp}\, A) = \mathrm{Sp}\, P(A)$.

Q1 Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A$. $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ & $AX = \lambda X$.

Alors $P(A)X = P(\lambda)X$ (cours). Comme X n'est pas nul (le), $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(A)$.

Ainsi $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\, A$, $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}\, P(A)$. Ce qui s'écrit encore $P(\mathrm{Sp}\, A) \subset \mathrm{Sp}\, P(A)$.

Q2 Ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Nous avons déjà $P(\mathrm{Sp}\, A) \subset \mathrm{Sp}\, P(A)$. Montrons l'inclusion inverse.

Soit $\mu \in \mathrm{Sp}\, P(A)$. Montrons que $\mu \in P(\mathrm{Sp}\, A)$. Ce qui revient à montrer que :

$\exists \lambda \in \mathrm{Sp}\, A$, $\mu = P(\lambda)$. Posons $Q = P - \mu$.

$\mu \in \mathrm{Sp}\, P(A)$ donc $P(A) - \mu I_n$ n'est pas inversible, alors $Q(A)$ n'est pas inversible.

__1er cas..__ $\deg Q \leqslant 0$. Q est constant. $\exists \alpha \in \mathbb{C}$, $Q = \alpha$. $Q(A) = \alpha I_n$.

. $Q(A)$ étant non inversible nécessairement $\alpha = 0$. Alors $Q = 0_{\mathbb{C}[X]}$ et $P = \mu$.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc A possède au moins une valeur propre. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

Comme P est constant égal à μ : $P(\lambda) = \mu$. Donc $\mu = P(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A$.

Ainsi $\mu \in P(\mathrm{Sp}\, A)$.

__2ème cas..__ $\deg Q \geqslant 1$. Comme Q est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, Q est scindé.

$\exists r \in \mathbb{N}^*$, $\exists \delta \in \mathbb{C}^*$, $\exists (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{C}^r$, $Q = \delta \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)$.

$Q(A) = \delta \prod_{k=1}^{r} (A - \alpha_k I_n)$ & $Q(A)$ est non inversible. Comme δ n'est pas nul $\prod_{k=1}^{r} (A - \alpha_k I_n)$ n'est pas inversible. Alors l'une des matrices (au moins...) de ce produit est non inversible car un produit de matrices inversibles est inversible.

$\exists k_0 \in [\![1, r]\!]$, tel que $A - \alpha_{k_0} I_n$ ne soit pas inversible. Donc $\alpha_{k_0} \in \mathrm{Sp}\, A$.

Or $Q(\alpha_{k_0}) = 0$. Donc $P(\alpha_{k_0}) - \mu = 0$. Alors $\mu = P(\alpha_{k_0})$ avec $\alpha_{k_0} \in \mathrm{Sp}\, A$. Ainsi $\mu \in P(\mathrm{Sp}\, A)$.

Ceci achève de montrer que $Sp\, P(A) \subset P(Sp\, A)$.

Finalement $\underline{\underline{P(Sp\, A) = Sp\, P(A)}}$.

<u>Exercice.</u> $n \geq 2$. Donner un exemple d'une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $P(Sp_{\mathbb{R}} A)$ soit strictement contenu dans $Sp_{\mathbb{R}} P(A)$.

EXERCICE **N1** **Comparaison entre P(Sp A) et Sp P(A) suite et fin...**

n est un élément de $[\![2,+\infty[\![$ et $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $A=E_{1,2}-E_{2,1}$ et $P=X^2$.

Montrer que $P(\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} A)$ est strictement contenu dans $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} P(A)$.

1er Cas.. $n=2$. $\quad A = E_{1,2}-E_{2,1} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. $\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} A \Leftrightarrow A-\lambda I_2$ non inversible $\Leftrightarrow \begin{pmatrix}-\lambda&1\\-1&-\lambda\end{pmatrix}$ non inversible $\Leftrightarrow \begin{vmatrix}-\lambda&1\\-1&-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (-\lambda)^2+1=0$

$\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} A \Leftrightarrow \lambda^2+1=0$. Ainsi $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} A=\emptyset$ et $P(\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} A)=\emptyset$.

$P(A)=A^2=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-I_n$. $\quad \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} P(A)=\mathrm{Sp}(-I_n)=\{-1\}$.

Donc $P(\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} A) \subsetneq \mathrm{Sp}\, P(A)$.

2ème cas.. $n\geqslant 3$. $\quad A=\left(\begin{array}{c|c}\begin{matrix}0&1\\-1&0\end{matrix}&(0)\\ \hline (0)&(0)\end{array}\right)$. Soit $(E_1,E_2,\dots,E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\mathrm{rg}\, A=\dim \mathrm{Vect}(-E_2,E_1,0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})},\dots,0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})})=\dim\mathrm{Vect}(-E_2,E_1)=\dim\mathrm{Vect}(E_1,E_2)\overset{(E_1,E_2)\text{ est libre}}{=}2<n.$$

Alors A n'est pas inversible donc 0 est valeur propre de A.

Soit $\lambda\in\mathbb{R}^*$ et soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases}x_2=\lambda x_1\\-x_1=\lambda x_2\\0=\lambda x_3\\\vdots\\0=\lambda x_n\end{cases} \underset{\lambda\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases}x_2=\lambda x_1\\-x_1=\lambda^2 x_1\\x_3=0\\\vdots\\x_n=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(\lambda^2+1)x_1=0\\x_2=\lambda x_1\\x_3=0\\\vdots\\x_n=0\end{cases} \overset{\lambda^2+1\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\x_3=0\\\vdots\\x_n=0\end{cases} \Leftrightarrow X=0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

Alors si $\lambda\in\mathbb{R}^*$, λ n'est pas valeur propre de A. Donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} A=\{0\}$.

Ainsi $P(\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} A)=\{0\}$ car $P=X^2$.

$P(A)=A^2=(E_{1,2}-E_{2,1})(E_{1,2}-E_{2,1})=E_{1,2}^2-E_{1,2}E_{2,1}-E_{2,1}E_{1,2}+E_{2,1}E_{2,1}$.

Lemme.. $\forall (p,q)\in[\![1,n]\!]^2,\ E_{p,q}=E_p\,{}^tE_q$

$\forall (p,q,r,s)\in[\![1,n]\!]^4,\ E_{p,q}E_{r,s}=\begin{cases}E_{p,s} & \text{si } q=r\\ 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} & \text{sinon}\end{cases}$.

▲ Preuve du lemme.

- Soit $(p,q) \in [\![1,n]\!]^2$. Soit $j \in [\![1,n]\!]$.

$E_{p,q} E_j$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne de $E_{p,q}$ donc $E_{p,q} E_j = \begin{cases} E_p & \text{si } j = q \\ 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} & \text{sinon} \end{cases}$

$E_p {}^tE_q E_j \underset{\uparrow}{=} \langle E_q, E_j \rangle E_p = \begin{cases} E_p & \text{si } j = q \\ 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} & \text{sinon} \end{cases}$ car $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ est orthonormée.

${}^tE_q E_j = \langle E_q, E_j \rangle$ où $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Ainsi pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de $E_{p,q}$ est égale à la $j^{\text{ème}}$ colonne de $E_p {}^tE_q$.

Alors $E_{p,q} = E_p {}^tE_q$.

- Soit $(p,q,r,s) \in [\![1,n]\!]^4$. ${}^tE_q E_r = \langle E_q, E_r \rangle \in \mathbb{R}$.

$E_{p,q} E_{r,s} = E_p {}^tE_q E_r {}^tE_s = \langle E_q, E_r \rangle E_p {}^tE_s = \langle E_q, E_r \rangle E_{p,s} = \begin{cases} E_{p,s} & \text{si } q = r \\ 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} & \text{sinon} \end{cases}$

$\langle E_q, E_r \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } q = r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Ceci achève la preuve du lemme. ▲

Alors $P(A) = E_{1,2} - E_{1,2} E_{2,1} - E_{2,1} E_{1,2} + E_{2,1} E_{2,1} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} - E_{1,1} - E_{2,2} + 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = -E_{1,1} - E_{2,2}$.

Ainsi $P(A)$ est la matrice diagonale dont les deux premiers coefficients diagonaux sont -1 et les autres sont nuls. Alors $Sp_{\mathbb{R}} P(A) = \{-1, 0\}$.

$P(Sp_{\mathbb{R}} A) = \{0\}$ et $Sp_{\mathbb{R}} P(A) = \{-1, 0\}$. $P(Sp_{\mathbb{R}} A) \subsetneq Sp_{\mathbb{R}} P(A)$.

<u>$P(Sp_{\mathbb{R}} A)$ est strictement contenu dans $Sp_{\mathbb{R}} P(A)$.</u>

EXERCICE 13 **N2** **Polynôme minimal.**

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q1. Montrer que si P est un polynôme annulateur non nul de A, de degré minimal, l'ensemble des polynômes annulateurs de A est l'ensemble des multiples de P et le spectre de A coïncide avec l'ensemble des zéros de P.

Q2. Montrer que A possède un polynôme annulateur unitaire P_0 et un seul tel que l'ensemble des polynômes annulateurs de A soit l'ensemble des multiples de ce polynôme.

Notons que le spectre de A est l'ensemble des zéros de P_0.

▲ *Ceci vaut aussi pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$.*

Thème abordé dans oral ESCP 2010 2.11

Q1 Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des polynomes annulateurs de A et $\mathcal{S}'$ l'ensemble des multiples de P. Montrons que $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$.

Soit T un élément de $\mathcal{S}'$. Il existe un élément Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que : $T = QP$.

$T(A) = Q(A)\,P(A) = Q(A)\,0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Alors T appartient à $\mathcal{S}$. Ainsi $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$.

Réciproquement soit T un élément de $\mathcal{S}$. Notons Q et R le quotient et le reste dans la division de T par P.

$T = QP + R$ et $\deg R < \deg P$.

$T(A) = Q(A)\,P(A) + R(A)$ et $T(A) = P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Alors $R(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Si R n'est pas nul, R est un polynôme annulateur non nul de A dont le degré est strictement inférieur à celui de P et P est un polynôme annulateur non nul de A, de degré minimal. Cela est contradictoire.

Par conséquent R est nul et T est un multiple de P donc appartient à $\mathcal{S}'$. Ainsi $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$.

Ceci achève de prouver que $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$.

Si P est un polynôme annulateur non nul de A, de degré minimal, l'ensemble des polynômes annulateurs de A est l'ensemble des multiples de P.

Notons $\mathcal{H}$ l'ensemble des zéros de P. Le cours indique que $\operatorname{Sp} A \subset \mathcal{H}$. Montrons l'inclusion inverse.

Soit α un zéro de P. Supposons que α n'est pas une valeur propre de A. La matrice $A - \alpha\, I_n$ est alors inversible.

Il existe un élement non nul U de $\mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)\,U$.

Notons que U n'est pas nul (car P n'est pas nul) et que $\deg U < \deg P$.

$P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ et $P(A) = (A - \alpha\, I_n)\,U(A)$. Alors $(A - \alpha\, I_n)\,U(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

En multipliant à gauche par $(A - \alpha\, I_n)^{-1}$ on obtient $U(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Ainsi U est un polynôme annulateur non nul de A dont le degré est strictement inférieur à celui de P et P est un polynôme annulateur non nul de A de degré minimal. Cela est contradictoire.

Alors α appartient à $\operatorname{Sp} A$. $\mathcal{H} \subset \operatorname{Sp} A$. Finalement $\operatorname{Sp} A = \mathcal{H}$.

Si P est un polynôme annulateur non nul de A, de degré minimal, le spectre de A coïncide avec l'ensemble des zéros de P.

$\boxed{\textbf{Q2}}$ Notons $\mathcal{S}^*$ l'ensemble des polynômes annulateurs non nuls de A. Nous savons que $\mathcal{S}^*$ n'est pas vide car A possède au moins un polynôme annulateur non nul.

Alors $\{\deg T; T \in \mathcal{S}^*\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$; elle possède un plus petit élément v.

Il existe un élément V de $\mathcal{S}^*$ tel que $\deg V = v$.

V est un polynôme annulateur non nul de A de degré minimal donc $\mathcal{S}$ est l'ensemble des multiples de V.

Soit a le coefficient du terme de plus haut degré de V. Posons $P_0 = \dfrac{1}{a} V$. P_0 est unitaire et son degré est celui de V.

Ainsi P_0 est un polynôme annulateur non nul et unitaire de A, de degré minimal.

Alors, d'après ce qui précède, P_0 est un polynôme unitaire et l'ensemble $\mathcal{S}$ des polynômes annulateurs de A est l'ensemble des multiples de P_0.

Soit $\widehat{P_0}$ un second polynôme unitaire tel que $\mathcal{S}$ soit l'ensemble des multiples de $\widehat{P_0}$.

Notons que P_0 et $\widehat{P_0}$ sont dans $\mathcal{S}$ donc P_0 est un multiple de $\widehat{P_0}$ et $\widehat{P_0}$ est un multiple de P_0.

Alors il existe deux éléments Q et $\widehat{Q}$ de $\mathbb{K}[X]$ tels que $\widehat{P_0} = \widehat{Q}\, P_0$ et $P_0 = Q\,\widehat{P_0}$. Donc $P_0 = Q\,\widehat{Q}\,P_0$.

Comme P_0 n'est pas nul : $Q\,\widehat{Q} = 1$. Q et $\widehat{Q}$ sont des poynômes constants.

Alors il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ tel que $\widehat{P_0} = \lambda\, P_0$.

$\widehat{P_0}$ et P_0 étant deux polynômes unitaires on a nécessairement $\lambda = 1$ et ainsi $\widehat{P_0}$ et P_0 sont égaux.

A possède un polynôme annulateur unitaire P_0 et un seul tel que l'ensemble des polynômes annulateurs de A soit l'ensemble des multiples de ce polynôme. P_0 est un polynôme annulateur non nul de A de degré minimal. Le spectre de A est l'ensemble des zéros de P_0.

EXERCICE 14 **N2** **Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il possède un polynôme annulateur scindé à racines simples (version 1).**

$n \in \mathbb{N}^*$. f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$.

Q1. On suppose que f est diagonalisable. λ_1, λ_2, ..., λ_p sont les valeurs propres distinctes de f et $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)$.

P est donc un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E constituée de vecteurs de f respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n.

Montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(f)(e_i) = P(\alpha_i)\, e_i = 0_E$. En déduire que $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Morale ?

Q2. Un petit résultat préliminaire pour la réciproque.

a) g et h sont deux endomorphismes de E. On pose $\forall x \in \mathrm{Ker}(h \circ g)$, $\varphi(x) = g(x)$.

Montrer que $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,g$ et $\mathrm{Im}\,\varphi \subset \mathrm{Ker}\,h$. En déduire que $\dim \mathrm{Ker}(h \circ g) \leqslant \dim \mathrm{Ker}\,h + \dim \mathrm{Ker}\,g$.

b) Généraliser ce dernier résultat à r endomorphismes de E.

Q3. On suppose que f possède un polynôme annulateur Q scindé à racines simples.

Ainsi il existe λ dans $\mathbb{K}^*$, il existe r dans $\mathbb{N}^*$ et il existe r éléments γ_1, γ_2, ..., γ_r de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts tels que $Q = \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X - \gamma_k)$.

a) Montrer que $T = \displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X - \gamma_k)$ est encore un polynôme annulateur de f.

En déduire, à l'aide de Q2, que $\dim E \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \dim \mathrm{Ker}(f - \gamma_k\ \mathrm{Id}_E)$.

b) I est l'ensemble des éléments i de $[\![1, r]\!]$ tels $\mathrm{Ker}(f - \gamma_i\ \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$.

Montrer par double inclusion que $\mathrm{Sp}\, f = \{\gamma_i\,, i \in I\}$. Prouver enfin que f est diagonalisable et conclure l'exercice.

▲ *Ceci vaut aussi pour une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Thème abordé dans oral ESCP 2011 2.5.

Q1 Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $f(e_i) = \alpha_i e_i$. Le cours donne $P(f)(e_i) = P(\alpha_i)\, e_i$.

α_i est une valeur propre de f donc $\alpha_i \in \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$. Or $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont les racines de P. Alors α_i est une racine de P et $P(\alpha_i) = 0$.

Par conséquent $P(f)(e_i) = P(\alpha_i)\, e_i = 0_E$ et ceci pour tout i dans $[\![1,n]\!]$.

$P(f)$ et $0_{\mathcal{L}(E)}$ sont alors deux endomorphismes de E qui coïncident sur la base $\mathcal{B}$ de E.

Donc $\underline{P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}}$. <u>$P$ est un polynôme annulateur de f, scindé et à racines simples.</u>

Q2 a) Notons que φ est linéaire car g est linéaire.

$\mathrm{Ker}\,g \subset \mathrm{Ker}(h \circ g)$

$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{x \in \mathrm{Ker}(h \circ g) \mid g(x) = 0_E\}$. $\underline{\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}(h \circ g) \cap \mathrm{Ker}\,g = \mathrm{Ker}\,g}$.

Soit $x \in \mathrm{Im}\,\varphi$. $\exists t \in \mathrm{Ker}(h\circ g)$, $x = \varphi(t) = g(t)$.

$h(x) = h(g(t)) = (h\circ g)(t) = 0_E$ car $t \in \mathrm{Ker}(h\circ g)$. Alors $x \in \mathrm{Ker}\, h$.

Ainsi $\underline{\mathrm{Im}\,\varphi \subset \mathrm{Ker}\, h}$.

Les deux résultats précédents donnent $\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = \dim \mathrm{Ker}\, g$ et $\dim \mathrm{Im}\,\varphi \leq \dim \mathrm{Ker}\, h$.

Appliquons alors le théorème du rang à φ.

$\dim \mathrm{Ker}(h\circ g) = \dim \mathrm{Ker}\,\varphi + \dim \mathrm{Im}\,\varphi = \dim \mathrm{Ker}\, g + \dim \mathrm{Im}\,\varphi \leq \dim \mathrm{Ker}\, g + \dim \mathrm{Ker}\, h$.

$\underline{\dim \mathrm{Ker}(h\circ g) \leq \dim \mathrm{Ker}\, g + \dim \mathrm{Ker}\, h}$.

Montrons par récurrence que, pour tout r dans $\mathbb{N}^*$, si $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r$ sont r endomorphismes de E :

$\dim \mathrm{Ker}(\psi_1 \circ \psi_2 \circ \dots \circ \psi_r) \leq \sum_{i=1}^{r} \dim \mathrm{Ker}\, \psi_i$.

- La propriété est vraie pour $r=1$ (et même pour $r=2$).
- Supposons la vraie pour un élément r de $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $r+1$.

Soient $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{r+1}$ $r+1$ endomorphismes de E.

$\psi_1 \circ \psi_2 \circ \dots \circ \psi_r$ et ψ_{r+1} sont deux endomorphismes de E. Ainsi :

$\dim \mathrm{Ker}((\psi_1 \circ \psi_2 \circ \dots \circ \psi_r) \circ \psi_{r+1}) \leq \dim \mathrm{Ker}(\psi_1 \circ \psi_2 \circ \dots \circ \psi_r) + \dim \mathrm{Ker}\, \psi_{r+1}$.

L'hypothèse de récurrence donne $\dim \mathrm{Ker}(\psi_1 \circ \psi_2 \circ \dots \circ \psi_r) \leq \sum_{i=1}^{r} \dim \mathrm{Ker}\, \psi_i$

Alors $\dim \mathrm{Ker}(\psi_1 \circ \psi_2 \circ \dots \circ \psi_r \circ \psi_{r+1}) \leq \sum_{i=1}^{r} \dim \mathrm{Ker}\, \psi_i + \dim \mathrm{Ker}\, \psi_{r+1} = \sum_{i=1}^{r+1} \dim \mathrm{Ker}\, \psi_i$

Ceci achève la récurrence.

$\underline{\forall r \in \mathbb{N}^*, \forall (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r) \in (\mathcal{L}(E))^r, \dim \mathrm{Ker}(\psi_1 \circ \psi_2 \circ \dots \circ \psi_r) \leq \sum_{i=1}^{r} \dim \mathrm{Ker}\, \psi_i}$.

Q3 $\lambda \neq 0$ donc $T = \frac{1}{\lambda} \varphi$. $T(f) = \frac{1}{\lambda}\varphi(f) = \frac{1}{\lambda} 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$\underline{T \text{ est encore un polynôme annulateur de } f}$.

Pour $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $\psi_k = f - \gamma_k \mathrm{Id}_E$. $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r$ sont r endomorphismes de E.

De plus $\psi_1 \circ \psi_2 \circ \dots \circ \psi_r = T(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $\dim E = \dim \mathrm{Ker}\, 0_{\mathcal{L}(E)} = \dim \mathrm{Ker}(\psi_1 \circ \psi_2 \circ \dots \circ \psi_r) \overset{Q2b}{\leq} \sum_{k=1}^{r} \dim \mathrm{Ker}\, \psi_k$.

Ainsi $\dim E \leqslant \sum_{i=1}^{r} \dim \mathrm{Ker}(f-\sigma_i \mathrm{Id}_E)$.

b) Notons d'abord que I est non vide. Supposons que I est vide.
$\forall i \in [\![1,r]\!]$, $\mathrm{Ker}(f-\sigma_i \mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$.

Alors $1 \leqslant n = \dim E \leqslant \sum_{i=1}^{r} \dim \mathrm{Ker}(f-\sigma_i \mathrm{Id}_E) = \sum_{i=1}^{r} 0 = 0$!

Ainsi I n'est pas vide.

Si $i \in I$, $\mathrm{Ker}(f-\sigma_i \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$ et donc σ_i est valeur propre de f.

Par conséquent $\{\sigma_i \,;\, i \in I\} \subset \mathrm{Sp} f$.

Réciproquement soit λ une valeur propre de f. Comme T est un polynôme annulateur de f, λ est une racine de T. Alors $\exists i_0 \in [\![1,r]\!]$, $\lambda = \sigma_{i_0}$.

Mais $\mathrm{Ker}(f-\lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$ donc $\mathrm{Ker}(f-\sigma_{i_0} \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$. Alors $i_0 \in I$.

λ est donc un élément de $\{\sigma_i \,;\, i \in I\}$.

$\mathrm{Sp} f \subset \{\sigma_i \,;\, i \in I\}$.

$\mathrm{Ker}(f-\sigma_i \mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$ si $i \notin I$

Finalement $\mathrm{Sp} f = \{\sigma_i \,;\, i \in I\}$.

$$\dim E \underset{\text{car}}{\geqslant} \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp} f} \dim \mathrm{SEP}(f,\lambda) = \sum_{i \in I} \dim \mathrm{SEP}(f,\sigma_i) = \sum_{i \in I} \dim \mathrm{Ker}(f-\sigma_i \mathrm{Id}_E) = \sum_{i=1}^{r} \dim \mathrm{Ker}(f-\sigma_i \mathrm{Id}_E)$$

donc $\dim E \geqslant \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp} f} \dim \mathrm{SEP}(f,\lambda) \geqslant \sum_{i=1}^{r} \dim \mathrm{Ker}(f-\sigma_i \mathrm{Id}_E) \underset{a)}{\geqslant} \dim E$.

Ainsi $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp} f} \dim \mathrm{SEP}(f,\lambda) = \dim E$. f est diagonalisable.

EXERCICE 25 **N2** **Lemme des noyaux. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il possède un polynôme annulateur scindé à racines simples (version 2).**

f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Q1. A et B sont deux éléments non nuls de $\mathbb{K}[X]$. On suppose que les seuls éléments de $\mathbb{K}[X]$ qui divisent A et B sont les polynômes de degré 0 c'est à dire les polynômes constants et non nuls. On dira que A et B sont étrangers ou premiers entre eux.

a) On pose $\mathcal{S} = \{AU + BV; (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2\}$. D est un élément non nul de $\mathcal{S}$ de degré minimum.

Dire pourquoi un tel D existe et montrer que $\mathcal{S}$ est l'ensemble des multiples de D (on procédera par double inclusion et on pourra utiliser la division euclidienne).

b) En remarquant que A et B sont dans $\mathcal{S}$, montrer que D est constant et en déduire qu'il existe deux éléments U_0 et V_0 de $\mathbb{K}[X]$ tels que $AU_0 + BV_0 = 1$.

c) Utiliser ce qui précède pour montrer que $\operatorname{Ker}(AB)(f) = \operatorname{Ker} A(f) \oplus \operatorname{Ker} B(f)$.

Q2. a) r est un élément de $[\![2, +\infty[\![$. P_1, P_2, ..., P_r sont r éléments non nuls de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux étrangers. Montrer que :

$$\operatorname{Ker}(P_1 P_2 \cdots P_r)(f) = \operatorname{Ker} P_1(f) \oplus \operatorname{Ker} P_2(f) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} P_r(f).$$

b) r est un élément de $[\![2, +\infty[\![$. λ_1, λ_2, ..., λ_r sont r éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$.

Montrer que : $\operatorname{Ker}\big((X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_r)\big)(f) = \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 Id_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - \lambda_2 Id_E) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(f - \lambda_r Id_E)$.

Q3. On suppose ici que E est de dimension finie non nulle.

Déduire de ce qui précède que si f admet un polynômes annulateur scindé à racines simples alors f est diagonalisable.

Montrer la réciproque.

▲ *Ce dernier résultat vaut encore pour une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Q1 a) Notons $\mathcal{S}^*$ l'ensemble des éléments non nuls de $\mathcal{S}$.

A et B donc des éléments non nuls appartenant à $\mathcal{S}$ donc $\mathcal{S}^*$ est non vide.

Alors $\{\deg S\,;\, S \in \mathcal{S}^*\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Elle possède donc un plus petit élément d.

Il existe alors un élément D de $\mathcal{S}^*$ de degré d. D est un élément non nul de $\mathcal{S}$ de degré minimal.

$$\boxed{\text{Il existe un élément non nul } D \text{ de } \mathcal{S} \text{ de degré minimal.}}$$

• Soit P un multiple de D. Il existe Q dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $P = QD$. Comme D est dans $\mathcal{S}$, on peut trouver deux éléments de $\mathbb{K}[X]$, U_1 et V_1, tels que : $D = AU_1 + BV_1$.

Alors $P = A(QU_1) + B(QV_1)$ est élément de $\mathcal{S}$ car QU_1 et QV_1 sont deux éléments de $\mathbb{K}[X]$.

Ainsi l'ensemble des multiples de D est contenu dans $\mathcal{S}$.

• Réciproquement soit P un élément de $\mathcal{S}$. Le théorème de la division euclidienne montre l'existence (et l'unicité) de deux éléments Q et R de $\mathbb{K}[X]$ tels que : $P = QD + R$ et $\deg R < \deg D$.

Rappelons que $D = AU_1 + BV_1$. Comme P est dans $\mathcal{S}$, il existe deux éléments U et V de $\mathbb{K}[X]$ tels que $P = AU + BV$.

Alors $R = P - QD = AU + BV - Q(AU_1 + BV_1) = A(U - QU_1) + B(V - QV_1)$ donc R est un élément de $\mathcal{S}$.

Or $\deg R < \deg D$ et D un élément non nul de $\mathcal{S}$ de degré minimum donc R est le polynôme nul.

Ainsi $P = QD$ et P est un multiple de D.

Alors $\mathcal{S}$ est contenu dans l'ensemble des multiples de D. Finalement :

$$\boxed{\mathcal{S} \text{ est l'ensemble des multiples de } D.}$$

b) A et B sont deux éléments de $\mathcal{S}$. Ce sont donc des multiples de D. Alors D divise A et B.

Comme A et B sont étrangers D est constant et non nul. Il existe un élément non nul λ de $\mathbb{K}$ tel que $D = \lambda$.

Alors $AU_1 + BV_1 = \lambda$. $A\left(\dfrac{1}{\lambda}U_1\right) + B\left(\dfrac{1}{\lambda}V_1\right) = 1$. Posons $U_0 = \dfrac{1}{\lambda}U_1$ et $V_0 = \dfrac{1}{\lambda}V_1$.

U_0 et V_0 sont deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ tels que $AU_0 + BV_0 = 1$.

$$\boxed{\text{Il existe deux éléments } U_0 \text{ et } V_0 \text{ de } \mathbb{K}[X] \text{ tels que } AU_0 + BV_0 = 1.}$$

c) • Montrons que $\operatorname{Ker} A(f)$ et $\operatorname{Ker} B(f)$ sont en somme directe.

Soit x un élément de $\operatorname{Ker} A(f) \cap \operatorname{Ker} B(f)$.

$AU_0 + BV_0 = 1$ donc $U_0A + V_0B = 1$. Alors $U_0(f) \circ A(f) + V_0(f) \circ B(f) = Id_E$.

Ainsi $x = U_0(f)\big(A(f)(x)\big) + V_0(f)\big(B(f)(x)\big) = U_0(f)(0_E) + V_0(f)(0_E) = 0_E + 0_E = 0_E$; $x = 0_E$.

Par conséquent $\operatorname{Ker} A(f) \cap \operatorname{Ker} B(f) = \{0_E\}$ donc $\operatorname{Ker} A(f)$ et $\operatorname{Ker} B(f)$ sont en somme directe.

• Montrons que $\operatorname{Ker}(AB)(f) = \operatorname{Ker} A(f) + \operatorname{Ker} B(f)$.

Soit x un élément de $\operatorname{Ker} A(f)$. $(AB)(f)(x) = (BA)(f)(x) = B(f)\big(A(f)(x)\big) = B(f)(0_E) = 0_E$; donc x appartient à $\operatorname{Ker}(AB)(f)$.

Par conséquent $\operatorname{Ker} A(f) \subset \operatorname{Ker}(AB)(f)$. On montre de même que $\operatorname{Ker} B(f) \subset \operatorname{Ker}(AB)(f)$.

Alors $\operatorname{Ker} A(f) + \operatorname{Ker} B(f) \subset \operatorname{Ker}(AB)(f)$ car $\operatorname{Ker}(AB)(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Réciproquement soit x un élément de $\operatorname{Ker}(AB)(f)$. Comme $AU_0 + BV_0 = 1$, $x = (AU_0)(f)(x) + (BV_0)(f)(x)$.

$B(f)\big((AU_0)(f)(x)\big) = (BAU_0)(f)(x) = (U_0AB)(f)(x) = U_0(f)\big((AB)(f)(x)\big) = U_0(f)(0_E) = 0_E$.

Ainsi $(AU_0)(f)(x) \in \operatorname{Ker} B(f)$. On montre de même que $(BV_0)(f)(x) \in \operatorname{Ker} A(f)$.

Comme $x = (AU_0)(f)(x) + (BV_0)(f)(x)$, x appartient à $\operatorname{Ker} B(f) + \operatorname{Ker} A(f) = \operatorname{Ker} A(f) + \operatorname{Ker} B(f)$.

Ceci achève de prouver que $\operatorname{Ker}(AB)(f) \subset \operatorname{Ker} A(f) + \operatorname{Ker} B(f)$.

Finalement $\operatorname{Ker}(AB)(f) = \operatorname{Ker} A(f) + \operatorname{Ker} B(f)$. Mieux :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(AB)(f) = \operatorname{Ker} A(f) \oplus \operatorname{Ker} B(f).}$$

Q2 a) Montons par récurrence que $\forall k \in [\![2, r]\!]$, $\operatorname{Ker}(P_1P_2\cdots P_k)(f) = \operatorname{Ker} P_1(f) \oplus \operatorname{Ker} P_2(f) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} P_k(f)$.

La propriété est vraie pour $k = 2$ d'après la question précédente car P_1 et P_2 sont étrangers.

Supposons la propriété vraie pour un élément k de $[\![1, r-1]\!]$ et montrons la pour $k+1$.

Par hypothèse $\operatorname{Ker}(P_1P_2\cdots P_k)(f) = \operatorname{Ker} P_1(f) \oplus \operatorname{Ker} P_2(f) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} P_k(f)$.

Posons $P = P_1P_2\cdots P_k$ et montrons que P et P_{k+1} sont étrangers.

Supposons que Q est un diviseur commun de P et P_{k+1}. Montrons que Q est constant non nul.

Q n'est pas nul car Q divise P_{k+1} et P_{k+1} n'est pas nul. Supposons que Q est de degré supérieur ou égal à 1.

Premier cas : $K = \mathbb{C}$.

Q admet au moins un zéros α dans $\mathbb{C}$ car Q est de degré supérieur ou égale à un.

α est un zéro de P et P_{k+1} car Q divise P et P_{k+1}.

Comme $P = P_1 P_2 \cdots P_k$ et P_{k+1}, il existe un élément ℓ de $[\![1, k]\!]$ tel que $P_\ell(\alpha) = 0$.

Donc $P_\ell(\alpha) = 0$ et $P_{k+1}(\alpha) = 0$. Alors $X - \alpha$ est un élément de $\mathbb{C}[X]$ de degré 1 qui divise P_ℓ et P_{k+1}. Ceci contredit le fait que P_ℓ et P_{k+1} sont étrangers.

Deuxième cas $K = \mathbb{R}$.

Q admet au moins un zéros α dans $\mathbb{C}$ car Q est de degré supérieur ou égale à un.

α est un zéro de P et P_{k+1} car Q divise P et P_{k+1}.

Comme $P = P_1 P_2 \cdots P_k$ et P_{k+1}, ici encore il existe un élément ℓ de $[\![1, k]\!]$ tel que $P_\ell(\alpha) = P_{k+1}(\alpha) = 0$.

Envisageons encore deux cas.

Premier cas : $\alpha \in \mathbb{R}$.

Alors $X - \alpha$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$ qui divise P_ℓ et P_{k+1}. Ceci contredit le fait que P_ℓ et P_{k+1} sont étrangers.

Deuxième cas : $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

Comme P_ℓ et P_{k+1} sont dans $\mathbb{R}[X]$, on a encore $P_\ell(\overline{\alpha}) = P_{k+1}(\overline{\alpha}) = 0$.

Ainsi α et $\overline{\alpha}$ sont deux zéros distincts de P_ℓ et P_{k+1}. Alors $(X - \alpha)(X - \overline{\alpha}) = X^2 - 2\,\Re e(\alpha)\,X + |\alpha|^2$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$ de degré 2 qui divise P_ℓ et P_{k+1}. Ceci contredit encore le fait que P_ℓ et P_{k+1} sont étrangers.

Finalement si Q divise P et P_{k+1}, Q est constant et non nul.

Ceci achève de prouver que $P = P_1 P_2 \cdots P_k$ et P_{k+1} sont étrangers.

La question 2 permet alors de dire que : $\mathrm{Ker}(PP_{k+1})(f) = \mathrm{Ker}\, P(f) \oplus \mathrm{Ker}\, P_{k+1}(f)$.

L'hypothèse de récurrence donne alors : $\mathrm{Ker}(P_1 P_2 \cdots P_{k+1})(f) = \Big(\mathrm{Ker}\, P_1(f) \oplus \mathrm{Ker}\, P_2(f) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}\, P_k(f)\Big) \oplus P_{k+1}(f)$.

Ainsi $\mathrm{Ker}(P_1 P_2 \cdots P_{k+1})(f) = \mathrm{Ker}\, P_1(f) \oplus \mathrm{Ker}\, P_2(f) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}\, P_{k+1}(f)$ et la récurrence s'achève.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(P_1 P_2 \cdots P_r)(f) = \mathrm{Ker}\, P_1(f) \oplus \mathrm{Ker}\, P_2(f) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}\, P_r(f).}$$

b) Soit i et j deux éléments distincts de $[\![1, r]\!]$. Montrons que $X - \lambda_i$ et $X - \lambda_j$ sont étrangers.

Supposons que Q soit un élément de $\mathbb{K}[X]$ qui divise $X - \lambda_i$ et $X - \lambda_j$. Montrons que Q est constant et non nul.

Comme $X - \lambda_i$ et $X - \lambda_j$ sont non nuls et de degré 1, Q n'est pas nul et de degré au plus un.

Supposons que Q est de degré un. Alors Q admet une racine α. Comme Q divise $X - \lambda_i$ et $X - \lambda_j$, α est une racine de $X - \lambda_i$ et $X - \lambda_j$. Alors $\lambda_i = \alpha = \lambda_j$ ce qui contredit le fait que λ_i et λ_j sont distincts.

Alors Q est un polynôme constant non nul. Ce qui achève de montrer que $X - \lambda_i$ et $X - \lambda_j$ sont étrangers.

Ainsi $X - \lambda_1$, $X - \lambda_2$, ..., $X - \lambda_r$ sont r éléments non nuls de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux étrangers. a) montre alors que :

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,\big((X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_r)\big)(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, Id_E) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_r\, Id_E).}$$

Q3 • Supposons que P soit un polynôme annulateur de f scindé à racines simples.

Il existe un élément c de $\mathbb{K}^*$ et r éléments distincts de $\mathbb{K}$, λ_1, λ_2, ..., λ_r tels que $P = c \displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X - \lambda_k)$.

Posons $\widehat{P} = \displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X - \lambda_k)$. $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $c \neq 0$ donc $\widehat{P}(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors $\mathrm{Ker}\,\widehat{P}(f) = E$.

Si $r = 1$, $\mathrm{Ker}(f_1 - \lambda_1\,\mathrm{Id}_E) = E$ donc $f = \lambda_1\,\mathrm{Id}_E$ et f est diagonalisable. Supposons maintenant $r \geqslant 2$

$\mathrm{Ker}\,\big((X - \lambda_1)(X - \lambda_2)\cdots(X - \lambda_r)\big)(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1\,Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_2\,Id_E) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_r\,Id_E)$ d'après Q2 b).

Alors $E = \mathrm{Ker}\,\widehat{P}(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1\,Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_2\,Id_E) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_r\,Id_E)$.

$\mathrm{Sp}\,f \subset \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\}$ car $\displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X - \lambda_k)$ est un polynôme annulateur de f dont les zźros sont λ_1, λ_2, ..., λ_r.

Posons $I = \{i \in [\![1, r]\!] \mid \mathrm{Ker}(f - \lambda_i\,Id_E) \neq \{0_E\}\}$.

Soit i un élément de $[\![1, r]\!]$. Si i est un élément de I, λ_i est valeur propre de f car $(f - \lambda_i\,Id_E) \neq \{0_E\}$; dans le cas contraire λ_i n'est pas valeur propre de f car $(f - \lambda_i\,Id_E) = \{0_E\}$!

On peut alors dire que $\mathrm{Sp}\,f = \{\lambda_i; i \in I\}$. De plus $E = \displaystyle\bigoplus_{i \in [\![1,r]\!]} \mathrm{Ker}(f - \lambda_i\,Id_E) = \bigoplus_{i \in I} \mathrm{Ker}(f - \lambda_i\,Id_E)$.

E est donc somme directe des sous-espace propres de f donc f est diagonalisable.

- Réciproquement supposons que f est diagonalisable. Soient γ_1, γ_2, ..., γ_s les valeurs propres distinctes de f.

Posons $U = (X - \gamma_1)(X - \gamma_2)\cdots(X - \gamma_s)$. U est un polynôme scindé à racines simples. Montrons que c'est un polynôme annulateur de f.

f est diagonalisable donc il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n.

$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} = \mathrm{Sp}\,f = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s\}$ donc $U(\alpha_1) = U(\alpha_2) = \cdots = U(\alpha_n) = 0$ car $U(\gamma_1) = U(\gamma_2) = \cdots = U(\gamma_s) = 0$.

Soit Δ la matrice f dans $\mathcal{B}$. $\Delta = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & \alpha_n \end{pmatrix}$. Donc $U(\Delta) = \begin{pmatrix} U(\alpha_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & U(\alpha_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & U(\alpha_n) \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Or $U(\Delta)$ est la matrice de $U(f)$ dans la base $\mathcal{B}$ donc $U(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

U est alors un polynôme annulateur scindé à racines simples de f. Finalement :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable si et seulement si } f \text{ possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.}}$$
