

EXERCICE 43 **N1** Diagonalisabilité d'une matrice de rang 1.

n est un élément de $[2, +\infty[$. L est un élément non nul de $M_{1,n}(\mathbb{K})$ et C un élément non nul de $M_{n,1}(\mathbb{K})$.

On pose $A = CL$ et $a = LC$.

- Q1. Calculer A^2 en fonction de a et A . Qu'en déduire pour le spectre de A ?
- Q2. Montrer que A est de rang 1 (on pourra expliciter A à partir des coefficients de C et L).
- Q3. Montrer que $\text{Sp } A = \{0, a\}$.
- Q4. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^2 n'est pas nulle.

Thème abordé dans oral ESCP 1995 1.2, 1.13, 1998 2-19, 2007 2.16, 2008 2.15, 2009 2.1.

Q1) $A^2 = CLCL = LC(CL) = aA$. $A^2 = aA$. $A^2 - aA = 0_{\mathbb{K}}$.

↑
 $LC \in \mathbb{K}$ ou $LC \in \mathbb{K}$

* fallait sans doute d'abord dire que $A \in \mathbb{K}$!

Alors $\lambda^2 - a\lambda$ est un polynôme annulateur de A d'où les racines sont 0 et a .

Ainsi $\text{Sp } A \subset \{0, a\}$.

Q2) Posons $L = (l_1 \ l_2 \ \dots \ l_n)$ et $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. Alors $A = \begin{pmatrix} c_1 l_1 & c_1 l_2 & \dots & c_1 l_n \\ c_2 l_1 & c_2 l_2 & \dots & c_2 l_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n l_1 & c_n l_2 & \dots & c_n l_n \end{pmatrix} = (c_i l_j)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Alors la j -ième colonne de A est $l_j \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ donc $l_j C$ et ceci pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Ainsi $\text{rg } A = \dim \text{Vect}(l_1 C, l_2 C, \dots, l_n C) = \dim \text{Vect}(C) = 1$ car $C \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Donc $\text{rg } A = 1$.
 ↑ $L \neq 0_{\mathbb{K}}$ donc $\exists i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket, l_{i_0} \neq 0$

Exercice... Soit π une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ de rang 1. Montrer qu'il existe une matrice L' de $M_{1,n}(\mathbb{K})$ et une matrice C' de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que :

$L' \neq 0_{\mathbb{K}}, C' \neq 0_{\mathbb{K}}$ et $\pi = C'L'$.

Q3) $\text{rg } A = 1 < n$ donc A n'est pas inversible. 0 est donc valeur propre de A .

Notons que $\dim \text{SEP}(A, 0) = n - \text{rg } A = n - 1$.

$AC = (CL)C = C(LC) = aC$ et $C \neq 0_{\mathbb{K}}$. Ainsi 0 est valeur propre de A .
 ↑ $LC \in \mathbb{K}$ ou $LC \in \mathbb{K}$

et C est un vecteur propre associé.

Ainsi $\{0, a\} \subset Sp A \subset \{0, a\}$. Alors $Sp A = \{0, a\}$.

Remarque.. Cela ne signifie pas que A a deux valeurs propres distinctes !

④ 1^{er} cas.. $a=0$. $Sp A = \{0\}$ et $\dim SEP(A, 0) = n-1$. A n'est pas diagonalisable.

2nd cas.. $a \neq 0$. A a deux valeurs propres distinctes 0 et a .

$$\dim SEP(A, 0) + \dim SEP(A, a) \leq n.$$

Or $\dim SEP(A, 0) \leq n - \dim SEP(A, a) = n - (n-1) = 1$. Et $\dim SEP(A, a) \geq 1$ car

$SEP(A, a) \neq \{0\}_{\mathbb{K}}$. Ainsi $\dim SEP(A, 0) = 1$.

Alors $\dim SEP(A, 0) + \dim SEP(A, a) = 1 + 1 = 2 = n$. A est diagonalisable.

Finalement A est diagonalisable si et seulement si $a \neq 0$.

$A \neq 0_{\mathbb{K}}$ car $\lg A = 1$. Alors $A^2 = 0_{\mathbb{K}} \Leftrightarrow aA = 0_{\mathbb{K}} \Leftrightarrow a = 0$

$A^2 = 0_{\mathbb{K}} \Leftrightarrow a = 0$. Alors $A^2 \neq 0_{\mathbb{K}} \Leftrightarrow a \neq 0 \Leftrightarrow A$ est diagonalisable.

Finalement A est diagonalisable si et seulement si $A^2 \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Remarque.. On a également noté que A est diagonalisable si et seulement si A possède une autre valeur propre que 0 .

Exercice.. Note que A est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.

EXERCICE 44

N1

Diagonalisabilité d'une matrice de rang 1 again.

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1 ($n \geq 2$).

Q1. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $A^2 \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Q2. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\text{tr } A \neq 0$.

Q3. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A possède une valeur propre non nulle.

▲ On a un résultat analogue pour les matrices.

Thème abordé dans oral ESCP 1995 1.2, 1.13, 1998 2-19, 2007 2.16, 2008 2.15, 2009 2.1.

Remarque.. $\text{rg } A = 1$ donc $\text{rg } A < n$. Alors A n'est pas inversible. donc
 il y a 0 et valeur propre de A .

$$\text{dim SEP}(A, 0) = n - \text{rg } A = n - 1.$$

Q1) * Supposons A diagonalisable. Supposons que $A^2 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Alors x^2 est un polynôme annulateur de A dont la seule racine est 0. Alors $\text{Sp } A \subset \{0\}$.

Or $0 \in \text{Sp } A$ donc $\text{Sp } A = \{0\}$. Or $\text{dim SEP}(A, 0) = n - 1 \neq n$. Ceci contredit le fait que A est diagonalisable.

donc si A est diagonalisable $A^2 \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

* Supposons que $A^2 \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Montrons que A est diagonalisable.

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{K}^n de matrice A dans la base canonique de \mathbb{K}^n .

$\text{rg } f = 1$. donc $0 \in \text{Sp } f$ et $\text{dim SEP}(f, 0) = \text{dim Ker}(f) = n - 1$. Posons $E = \mathbb{K}^n$.

Or $\text{Im } f = \mathbb{K}^n$. Il existe alors un vecteur u de E tel que $\text{Im } f = \text{Vect}(u)$.

$f(u) \in \text{Im } f$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $f(u) = \lambda u$. Supposons que $\lambda = 0$. $f(u) = 0_E$.

Alors $\text{Im } f^2 = f(\text{Im } f) = f(\text{Vect}(u)) = \text{Vect}(f(u)) = \{0_E\}$. Alors $f \stackrel{L}{=} 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $A^2 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$!

donc $\lambda \neq 0$, $u \neq 0$ et $f(u) = \lambda u$. $\lambda \in \text{Sp } f$. $\{0, \lambda\} \subset \text{Sp } f$.

$n = \text{dim } E \geq \text{dim SEP}(f, 0) + \text{dim SEP}(f, \lambda) = n - 1 + \text{dim SEP}(f, \lambda) \geq n - 1 + 1 = n = \text{dim } E$
 $\uparrow \text{SEP}(f, \lambda) \neq \{0_E\}$.

Ainsi $\text{dim } E = \text{dim SEP}(f, 0) + \text{dim SEP}(f, \lambda)$.

Alors $\text{Sp } f = \{0, \lambda\}$ et f est diagonalisable. A est diagonalisable.

Si $A^2 \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$, A est diagonalisable.

$$n \geq \dim \text{SEP}(A, 0) + \dim \text{SEP}(A, \beta) = n-1 + \dim \text{SEP}(A, \beta) \geq n$$

$$\text{Alors } n = \dim \text{SEP}(A, 0) + \dim \text{SEP}(A, \beta).$$

$$\uparrow \dim \text{SEP}(A, \beta) \geq 1 \text{ car}$$

$$\text{SEP}(A, \beta) \neq \{0\}_{n, (1 \times 1)}.$$

Ainsi α ou β est une valeur propre de A ;

et A est diagonalisable.

ce qui prècède permet de dire que A est diagonalisable si et seulement si A possède une valeur propre non nulle.

EXERCICE 45 **N2** Lien entre la diagonalisabilité de f et celle de f^2 .

E est un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension n non nulle. u est un endomorphisme de E .

Q1. Montrer que si u est diagonalisable alors u^2 est diagonalisable et $\text{Ker } u^2 = \text{Ker } u$.

► Dans toute la suite on suppose u^2 diagonalisable.

Q2. On suppose que λ est une valeur propre non nulle de u^2 telle qu'il existe α dans \mathbb{K} vérifiant $\alpha^2 = \lambda$.

Montrer que $\text{SEP}(u^2, \lambda) = \text{Ker}(u - \alpha \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u + \alpha \text{Id}_E)$.

En déduire qu'il existe une base de $\text{SEP}(u^2, \lambda)$ constituée de vecteurs propres de u .

Q3. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que si $\text{Ker } u^2 = \text{Ker } u$ alors u est diagonalisable. Et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

Thème abordé dans oral ESCP 2000 2-1, 2005 2.6, 2012 2.2. Thème implicite dans oral ESCP 2006 2.17.

Q1 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de u respectivement associés aux valeurs propres $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$.

$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u(e_k) = \gamma_k e_k$ donc $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u^2(e_k) = \gamma_k^2 e_k$. Alors $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de u^2 respectivement associés aux valeurs propres $\gamma_1^2, \gamma_2^2, \dots, \gamma_n^2$. u^2 est diagonalisable.

Soit x un élément de E de coordonnées (x_1, x_2, \dots, x_n) dans la base \mathcal{B} .

$$x = \sum_{k=1}^n x_k e_k, u(x) = \sum_{k=1}^n x_k \gamma_k e_k \text{ et } u^2(x) = \sum_{k=1}^n x_k \gamma_k^2 e_k.$$

$$x \in \text{Ker } u \iff u(x) = 0_E \iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k \gamma_k = 0 \iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = 0 \text{ ou } \gamma_k = 0.$$

$$x \in \text{Ker } u \iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = 0 \text{ ou } \gamma_k^2 = 0 \iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k \gamma_k^2 = 0 \iff u^2(x) = 0_E \iff x \in \text{Ker } u^2.$$

Alors $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2$.

Si u est diagonalisable alors u^2 est diagonalisable et $\text{Ker } u^2 = \text{Ker } u$.

Q2 a) Soit x un élément de $\text{Ker}(u - \alpha \text{Id}_E)$. $u(x) = \alpha x$ donc $u^2(x) = \alpha^2 x = \lambda x$. Ainsi x appartient à $\text{Ker}(u - \alpha \text{Id}_E)$.

Par conséquent $\text{Ker}(u - \alpha \text{Id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$. On montre de même que $\text{Ker}(u + \alpha \text{Id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$.

Montrons maintenant que $\text{SEP}(u^2, \lambda) = \text{Ker}(u - \alpha \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u + \alpha \text{Id}_E)$.

Soit x un élément de $\text{SEP}(u^2, \lambda)$. $u(x) = \lambda x$.

Montrons par analyse/synthèse qu'il existe un unique élément (y, z) de $\text{Ker}(u - \alpha \text{Id}_E) \times \text{Ker}(u + \alpha \text{Id}_E)$ tel que $x = y + z$.

Analyse/unicité. Supposons que $x = y + z$ avec y dans $\text{Ker}(u - \alpha \text{Id}_E)$ et z dans $\text{Ker}(u + \alpha \text{Id}_E)$.

$$u(y) = \alpha y \text{ et } u(z) = -\alpha z \text{ donc } u(x) = \alpha y - \alpha z. y + z = x \text{ et } y - z = \frac{1}{\alpha} u(x) \text{ (}\alpha \text{ n'est pas nul car } \lambda \text{ n'est pas nul).}$$

$$\text{Par addition et soustraction on obtient : } y = \frac{1}{2\alpha} (\alpha x + u(x)) \text{ et } z = \frac{1}{2\alpha} (\alpha x - u(x)). \text{ D'où l'unicité de la décomposition.}$$

$$\text{Synthèse/existence. Posons : } y = \frac{1}{2\alpha} (\alpha x + u(x)) \text{ et } z = \frac{1}{2\alpha} (\alpha x - u(x)). \text{ Clairement } x = y + z.$$

$$u(y) = \frac{1}{2\alpha} (\alpha u(x) + u^2(x)) = \frac{1}{2\alpha} (\alpha u(x) + \lambda x) = \frac{1}{2\alpha} (\alpha u(x) + \alpha^2 x) = \alpha \frac{1}{2\alpha} (u(x) + \alpha x) = \alpha y. y \in \text{Ker}(f - \alpha \text{Id}_E).$$

On montre de la même manière que $z \in \text{Ker}(f + \alpha \text{Id}_E)$. D'où l'existence de la décomposition.

$$\text{SEP}(u^2, \lambda) = \text{Ker}(u - \alpha \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u + \alpha \text{Id}_E).$$

Montrons qu'il existe une base de SEP (u^2, λ) constituée de vecteurs propres de u . Envisageons trois cas.

- $\text{Ker}(u + \alpha \text{Id}_E) = \{0_E\}$. Alors $\text{SEP}(u^2, \lambda) = \text{Ker}(u - \alpha \text{Id}_E)$ donc toute base de SEP (u^2, λ) est constituée de vecteurs propres de u associés à la valeur propre α .
- $\text{Ker}(u - \alpha \text{Id}_E) = \{0_E\}$. Alors $\text{SEP}(u^2, \lambda) = \text{Ker}(u + \alpha \text{Id}_E)$ donc toute base de SEP (u^2, λ) est constituée de vecteurs propres de u associés à la valeur propre $-\alpha$.
- $\text{Ker}(u - \alpha \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$ et $\text{Ker}(u + \alpha \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$. Soient \mathcal{S}_1 une base de $\text{Ker}(u - \alpha \text{Id}_E)$ et \mathcal{S}_2 une base de $\text{Ker}(u + \alpha \text{Id}_E)$. $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ est une base de SEP (u^2, λ) constituée de vecteurs propres de u .

Si λ est une valeur propre non nulle de u^2 telle qu'il existe α dans \mathbb{K} vérifiant $\alpha^2 = \lambda$ alors il existe une base de SEP (u^2, λ) constituée de vecteurs propres de u .

Q3 On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, que $\text{Ker } u^2 = \text{Ker } u$ et que u^2 est diagonalisable. Montrons que u est diagonalisable.

1^{er} cas : u^2 est l'endomorphisme nul.

Alors $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2 = E$. Ainsi u est également l'endomorphisme nul. Par conséquent u est diagonalisable.

2^{ème} cas : u^2 n'est pas l'endomorphisme nul.

Comme u^2 est diagonalisable, u^2 a au moins une valeur propre non nulle. Notons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres non nulles de u^2 .

Comme $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, pour tout k dans $[[1, p]]$, il existe α_k dans \mathbb{K} tel que $\alpha_k^2 = \lambda_k$.

D'après la question précédente, pour tout élément k de $[[1, p]]$, il existe une base \mathcal{B}_k de SEP (u^2, λ_k) constituée de vecteurs propres de u .

Distinguons encore deux cas.

a) 0 n'est pas valeur propre de u^2 .

$\text{Sp } u^2 = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$. u^2 est diagonalisable donc $E = \text{SEP}(u^2, \lambda_1) \oplus \text{SEP}(u^2, \lambda_2) \cdots \oplus \text{SEP}(u^2, \lambda_p)$.

Alors " $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cdots \cup \mathcal{B}_p$ " est une base de E constituée de vecteurs propres de u (et de u^2). Ainsi u est diagonalisable.

b) 0 est valeur propre de u^2 .

Soit \mathcal{B}_0 une base de $\text{Ker } u^2$ et de $\text{Ker } u$. Les éléments de \mathcal{B}_0 sont des vecteurs propres de u et u^2 .

$\text{Sp } u^2 = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$. u^2 est diagonalisable donc $E = \text{Ker } u^2 \oplus \text{SEP}(u^2, \lambda_1) \oplus \text{SEP}(u^2, \lambda_2) \cdots \oplus \text{SEP}(u^2, \lambda_p)$.

Alors $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cdots \cup \mathcal{B}_p$ est alors une base de E constituée de vecteurs propres de u (et de u^2). Ainsi u est diagonalisable.

Si u est un endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel, u est diagonalisable si et seulement si $\text{Ker } u^2 = \text{Ker } u$ et u^2 est diagonalisable.

Montrons que le résultat ne vaut pas si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si l'espace vectoriel considéré est de dimension au moins deux.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel E de dimension n sur \mathbb{R} avec $n \geq 2$.

Considérons l'endomorphisme u de E tel que $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = -e_1$ et $\forall k \in [[3, n]]$, $u(e_k) = e_k$.

$(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ étant une base de E , u est un automorphisme de E car il transforme la base \mathcal{B} de E en une base de E .

u^2 est un également un automorphisme de E comme composé de deux automorphismes de E .

Ainsi $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2 = \{0_E\}$.

Visiblement $u^2 = -Id_E$. Finalement u^2 est diagonalisable et $\text{Ker } u^2 = \text{Ker } u$.

1^{er} cas : $n = 2$.

Ici $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Soit λ un réel. $\lambda \in \text{Sp } u \iff \lambda \in \text{Sp } M_{\mathcal{B}}(u) \iff \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 + 1 = 0$.

Donc u n'a pas de valeur propre et ainsi u n'est pas diagonalisable.

2^{ème} cas : $n \geq 3$.

Soit λ un réel et soit $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ un élément de E .

$$x \in \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \iff (u - \lambda \text{Id}_E)(x) = 0_E \iff (M_{\mathcal{B}}(u) - \lambda \text{Id}_E) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}.$$

$$x \in \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \iff \begin{cases} -\lambda x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - \lambda x_2 = 0 \\ \forall k \in \llbracket 3, n \rrbracket, (1 - \lambda) x_k = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = -\lambda x_1 \\ (1 + \lambda^2) x_1 = 0 \\ \forall k \in \llbracket 3, n \rrbracket, (1 - \lambda) x_k = 0 \end{cases}.$$

$$x \in \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \iff \begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ \forall k \in \llbracket 3, n \rrbracket, (1 - \lambda) x_k = 0 \end{cases} \text{ car } 1 + \lambda^2 \text{ n'est pas nul.}$$

$$\text{Si } \lambda \neq 1 : x \in \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \iff \begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ \forall k \in \llbracket 3, n \rrbracket, x_k = 0 \end{cases} \iff x = 0_E, \text{ et } \lambda \text{ n'est pas valeur propre de } u.$$

Supposons que $\lambda = 1$. Alors $x \in \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \iff x_1 = x_2 = 0$.

Donc λ est valeur propre de u et $\text{SEP}(u, \lambda) = \text{Vect}(e_3, e_4, \dots, e_n)$.

Finalement $\text{Sp } u = \{1\}$ et $\dim \text{SEP}(u, 1) = n - 2$. Donc u n'est pas diagonalisable.

Dans les deux cas u^2 est diagonalisable, $\text{Ker } u^2 = \text{Ker } u$ et u n'est pas diagonalisable.

Le résultat ne vaut pas si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si $n \geq 2$.

EXERCICE 46

Exercice HEC 97 A étant une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère l'application F de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), F(M) = AM.$$

Q1. Montrer que F est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q2. Montrer que F est bijective si et seulement si A est inversible.

Q3. a) Soit μ une valeur propre de A et $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ un vecteur propre associé. Soient $M = \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix}$ et $N = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix}$.
Montrer que ces matrices sont des vecteurs propres de F associés à μ .

b) Montrer que F et A ont même spectre.

Q4. Montrer que si A est diagonalisable alors F est diagonalisable.

Q5. Montrer que si F est diagonalisable alors A est diagonalisable.

Rappel - tout espace vectoriel (ou peut-être) sur ce qui suit.

Soit (E_1, E_2) la base canonique de $\pi_{2,1}(\mathbb{R})$.

Soit $N \in \pi_2(\mathbb{R})$. La première (resp. seconde) colonne de N est NE_1 (resp. NE_2)

Notons la notation $C_1(N)$ (resp. $C_2(N)$).

Q1. $\forall \pi \in \pi_2(\mathbb{R}), \forall A \in \pi_2(\mathbb{R})$. F est une application linéaire de $\pi_2(\mathbb{R})$ dans $\pi_2(\mathbb{R})$.

• $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (\pi, N) \in \pi_2(\mathbb{R}) \times \pi_2(\mathbb{R}), F(\lambda\pi + N) = A(\lambda\pi + N) = \lambda A\pi + AN = \lambda F(\pi) + F(N)$.

F est linéaire.

F est un endomorphisme de $\pi_2(\mathbb{R})$.

Q2. * Supposons que A est inversible.

Soit $\pi \in \ker F$. $A\pi = F(\pi) = 0_{\pi_2(\mathbb{R})}$; $\pi = A^{-1}A\pi = A^{-1}0_{\pi_2(\mathbb{R})} = 0_{\pi_2(\mathbb{R})}$.

Alors $\ker F = \{0_{\pi_2(\mathbb{R})}\}$.

F est un endomorphisme injectif de $\pi_2(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie.

Ainsi F est bijectif. F est une application linéaire bijective.

* Supposons que F est bijective.

$\forall N \in \pi_2(\mathbb{R}), \exists! \pi \in \pi_2(\mathbb{R}), F(\pi) = N$ ou $A\pi = N$.

En particulier $\exists! \pi \in \pi_2(\mathbb{R}), A\pi = I_2$ (car $N = I_2$!)

Ceci suffit pour dire que A est inversible.

Fat bijective π et redonnant π A est inversible.

Q3 a) pour $\pi' = A\pi = A \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}$.

$$C_1(\pi') = A\pi E_1 = A C_1(\pi) = Ax = yx = y C_1(\pi) = C_1(y\pi).$$

$$C_2(\pi') = A\pi E_2 = A C_2(\pi) = A \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & yx \\ 0 & xy \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = y C_2(\pi) = C_2(y\pi).$$

π' et $y\pi$ et les mêmes colonnes. Ainsi $\pi' = y\pi$.

Donc $F(\pi) = A\pi = \pi' = y\pi$. Soit pour $C_1(\pi) = x \neq 0_{n_2, (1)}$ donc $\pi \neq 0_{n_2, (1)}$

Alors y est une valeur propre de F et π est un vecteur propre associé.

De même de même que $F(N) = yN$ et $N \neq 0_{n_2, (1)}$.

N est un vecteur propre de F associé à la valeur propre y .

↳ ça pourrait faire celle à la main pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \dots$

b) nous venons de montrer que $S_p A \subset S_p F$. Montrons l'inverse.

Soit $y \in S_p F$. $\exists \pi \in \pi_2, (1)$, $F(\pi) = y\pi$ et $\pi \neq 0_{n_2, (1)}$.

$A\pi = y\pi$ donc $A\pi E_i = y\pi E_i$ pour $i \in \{1, 2\}$.

$\forall i \in \{1, 2\}$, $A C_i(\pi) = y C_i(\pi)$.

$A C_1(\pi) = y C_1(\pi)$ et $A C_2(\pi) = y C_2(\pi)$. (1)

$\pi \neq 0_{n_2, (1)}$ donc $C_1(\pi) \neq 0_{n_2, (1)}$ ou $C_2(\pi) \neq 0_{n_2, (1)}$ (2)

(1) et (2) permettent de dire que y est valeur propre de A .

Ceci achève de montrer que $S_p F \subset S_p A$.

Finalement $S_p F = S_p A$.

Q4) Supposons que A est diagonalisable. Soit (x_1, x_2) une base de $\pi_2, (1)$ constituée de vecteurs propres associés aux valeurs propres y_1 et y_2 (non nécessairement distinctes...).

$$\text{Pour } X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, N_1 = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ y_1 & 0 \end{pmatrix}, N_2 = \begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}, \pi_1 = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ y_1 & 0 \end{pmatrix}, \pi_2 = \begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}.$$

d'après Q 3 a) $B = (\pi_1, N_1, \pi_2, N_2)$ est une famille de vecteurs propres de F associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2$. Notons que B est une base de $\pi_2(\mathbb{R})$. Comme B est de cardinal 4 et que $\dim \pi_2(\mathbb{R}) = 4$ il suffit de montrer que la famille est libre. Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\alpha\pi_1 + \beta N_1 + \gamma\pi_2 + \delta N_2 = 0_{\pi_2(\mathbb{R})}$.

$$\text{Alors } 0_{\pi_2(\mathbb{R})} = 0_{\pi_2(\mathbb{R})} E_1 = \alpha\pi_1 E_1 + \beta N_1 E_1 + \gamma\pi_2 E_1 + \delta N_2 E_1.$$

$$\text{D'où } \alpha C_1(\pi_1) + \beta C_1(N_1) + \gamma C_1(\pi_2) + \delta C_1(N_2) = 0_{\pi_2(\mathbb{R})}.$$

$$\text{Or } \alpha X_1 + \beta 0_{\pi_2(\mathbb{R})} + \gamma X_2 + \delta 0_{\pi_2(\mathbb{R})} = 0_{\pi_2(\mathbb{R})}.$$

Ainsi $\alpha X_1 + \gamma X_2 = 0_{\pi_2(\mathbb{R})}$ et (X_1, X_2) est une base de $\pi_2(\mathbb{R})$.

Alors $\alpha = \gamma = 0$. De même en utilisant E_2 (et les mêmes colonnes) on montre que $\beta = \delta = 0$.

Ceci achève de montrer que B est une famille libre de $\pi_2(\mathbb{R})$.

rien n'est une base de $\pi_2(\mathbb{R})$. rien n'est une base de $\pi_2(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de F .

Puis de conclure : F est diagonalisable.

(Q5) Réciproquement supposons F diagonalisable et montrons que A est diagonalisable.

1^{ère} cas... F a au moins deux valeurs propres distinctes. Alors A admet deux valeurs propres distinctes. Comme $A \in \pi_2(\mathbb{R})$: A est diagonalisable.

2^{ème} cas... F admet une seule valeur propre λ .

$$\text{Alors } \pi_2(\mathbb{R}) = S E(F, \lambda) = \mathcal{K}_2(F - \lambda \text{Id}_{\pi_2(\mathbb{R})}). \text{ D'où } F = \lambda \text{Id}_{\pi_2(\mathbb{R})}.$$

$$\text{D'où } \forall \pi \in \pi_2(\mathbb{R}), A\pi = F(\pi) = \lambda\pi. \text{ En particulier } A J_2 = \lambda J_2.$$

Ainsi $A = \lambda I_2$. A est diagonalisable ! (A est scalaire !)

Propriété... F est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

EXERCICE 47

Exercice $\varphi(v) = u \circ v$. Lien entre la réduction de φ et celle de u . Oral ESCP 2005.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} de dimension finie $n \geq 1$.

On considère un endomorphisme u de E et on note φ l'application de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même définie par :

$\forall v \in \mathcal{L}(E), \varphi(v) = u \circ v$.

Q1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

Q2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

a) Montrer que si λ est une valeur propre de φ , alors λ est une valeur propre de u .

b) Etablir la réciproque (on pourra faire intervenir un projecteur).

Q3. a) Notons $E(\lambda, \varphi)$ le sous-espace propre de φ associé à la valeur propre λ et $E(\lambda, u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ . **NOTATIONS CROQUANTES !!**

Montrer que $E(\lambda, \varphi) = \mathcal{L}(E, E(\lambda, u))$.

b) En déduire que φ est diagonalisable si et seulement si u est diagonalisable.

Q1 • $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall v \in \mathcal{L}(E), \varphi(v) = u \circ v \in \mathcal{L}(E)$.

φ est une application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$.

• $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (v, w) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E), \varphi(\lambda v + w) = u \circ (\lambda v + w) = \lambda u \circ v + u \circ w = \lambda \varphi(v) + \varphi(w)$.

φ est linéaire.

Ainsi φ est un endomorphisme de E .

Q2 a) Supposons que λ est valeur propre de φ . $\exists v \in \mathcal{L}(E), v \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\varphi(v) = \lambda v$.

$v \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $\exists t \in E, v(t) \neq 0_E$.

$\lambda v(t) = \varphi(v)(t) = (u \circ v)(t) = u(v(t))$.

Ainsi $u(v(t)) = \lambda v(t)$ et $v(t) \neq 0_E$ donc λ est valeur propre de u .

b) Supposons que λ est valeur propre de u . $\exists x \in E, x \neq 0_E$ et $u(x) = \lambda x$.

Prenons $D = \text{vect}(x)$. Soit D' un supplémentaire de D dans E .

Soit p la projection sur D parallèlement à D' .

• $p \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ car $\text{Im } p = D = \text{vect}(x) \neq \{0_E\}$.

• Montrons que $\varphi(p) = \lambda p$. Soit \tilde{e} matrice que $u \circ p = \lambda p$ ou

que $(u - \lambda Id_E) \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ou que : $\text{Im } p \subset \text{Ker}(u - \lambda Id_E)$!

$$I_{mp} = \text{Vect}(u) \subset \text{SEP}(u, \lambda) = \mathcal{K}_u(u - \lambda \text{Id}_E).$$

\uparrow
 x est un vecteur propre de u
 associé à λ

Alors $\forall y \in I_{mp}, (u - \lambda \text{Id}_E)(y) = 0$. Dac $\forall t \in E, (u - \lambda \text{Id}_E)(t) = 0_E$.

$\forall t \in E, ((u - \lambda \text{Id}_E) \circ p)(t) = 0_E$. $(u - \lambda \text{Id}_E) \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $u \circ p - \lambda p = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $u \circ p = \lambda p$. $u(p) = \lambda p$.

$\psi(p) = \lambda p$ avec $p \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ dac $\lambda \in \text{Sp } \psi$.

Finalment: $\text{Sp } u = \text{Sp } \psi$.

③ a) soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

$f \in E(\lambda, \psi) \Leftrightarrow f \in \text{SEP}(\psi, \lambda) \Leftrightarrow \psi(f) = \lambda f \Leftrightarrow u \circ f = \lambda f$.

$f \in E(\lambda, \psi) \Leftrightarrow \forall x \in E, u(f(x)) = \lambda f(x) \Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) \in \text{SEP}(u, \lambda)$.

$f \in E(\lambda, \psi) \Leftrightarrow \exists \text{Im } f \subset \text{SEP}(u, \lambda) \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} f \in \mathcal{L}(E, \text{SEP}(u, \lambda))$.

Ainsi $E(\lambda, \psi) \stackrel{(*)}{=} \mathcal{L}(E, E(\lambda, u))$ ou $\text{SEP}(\psi, \lambda) \stackrel{(*)}{=} \mathcal{L}(E, \text{SEP}(u, \lambda))$.

On rappelle que $\dim \mathcal{L}(E) = (\dim E)^2 = n^2$ et pour tout sous-espace F de E

$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F = n \times \dim F$. $\text{Sp } \psi = \text{Sp } u$

ψ diagonalisable $\Leftrightarrow \dim \mathcal{L}(E) = \sum_{\lambda \in \text{Sp } \psi} \dim \text{SEP}(\psi, \lambda) \stackrel{\uparrow}{\Leftrightarrow} n^2 = \sum_{\lambda \in \text{Sp } u} \dim \mathcal{L}(E, \text{SEP}(u, \lambda))$.

ψ diagonalisable $\Leftrightarrow n^2 = \sum_{\lambda \in \text{Sp } u} n \times \dim \text{SEP}(u, \lambda) \Leftrightarrow n = \sum_{\substack{\lambda \in \text{Sp } u \\ \lambda \neq 0}} \dim \text{SEP}(u, \lambda)$.

ψ diagonalisable $\Leftrightarrow \dim E = \sum_{\lambda \in \text{Sp } u} \dim \text{SEP}(u, \lambda) \Leftrightarrow u$ diagonalisable.

ψ diagonalisable $\Leftrightarrow u$ diagonalisable.

Remarques - 1°) les arguments de ③ a) permettent de retrouver plus rapidement les résultats de ② ($\mathcal{L}(E, E(\lambda, u)) \neq \{0\} \Leftrightarrow E(\lambda, u) \neq \{0\} \dots$) et de même (*) est impropre ! Il aurait pu être fallu noter que $\text{SEP}(\psi, \lambda)$ est isomorphe à $\mathcal{L}(E, \text{SEP}(u, \lambda)) \dots$

EXERCICE 48

N2

Lien entre la diagonalisabilité de A et de $M \rightarrow AM$. ESCP 2009 2.18

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On définit T sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), T(M) = AM$.

Q1. a) Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que T soit un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q2. Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Montrer que λ est une valeur propre de T en exhibant une matrice propre associée.

Q3. On suppose dans cette question que A est diagonalisable. Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) une base de \mathbb{C}^n formée de vecteurs propres de A .

a) En considérant les matrices $X_i^t X_j$, pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, montrer que T est diagonalisable.

b) Déterminer le rang de $X_i^t X_j$.

On admet que toute matrice de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet au moins une valeur propre.

Q4. On suppose dans cette question que T est diagonalisable. Soit $(M_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ une base de vecteurs propres de T .

a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Montrer que l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, définie par $\varphi(M) = MX$ est une application linéaire surjective.

b) En considérant la famille $(\varphi(M_{i,j}))_{1 \leq i, j \leq n}$, montrer que A est diagonalisable.

JFC : c) Montrer le résultat admis.

Thème abordé dans oral ESCP 1994 2.1 avec $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On trouve dans oral ESCP 1994 2.5 $M \rightarrow AMB$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec des matrices A et B particulière.

Q1) Q1 Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $(\pi, N) \in \Pi_n(\mathbb{C}) \times \Pi_n(\mathbb{C})$.

$$T(\lambda\pi + N) = A(\lambda\pi + N) = \lambda A\pi + AN = \lambda T(\pi) + T(N).$$

$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall (\pi, N) \in \Pi_n(\mathbb{C}) \times \Pi_n(\mathbb{C}), T(\lambda\pi + N) = \lambda T(\pi) + T(N)$, T est linéaire.

$\forall \pi \in \Pi_n(\mathbb{C}), T(\pi) = A\pi \in \Pi_n(\mathbb{C})$. T est une application de $\Pi_n(\mathbb{C})$ dans $\Pi_n(\mathbb{C})$.

Ainsi T est un endomorphisme de $\Pi_n(\mathbb{C})$.

b) * Supposons que T est un automorphisme de $\Pi_n(\mathbb{C})$. Alors T est bijectif.

$$\forall N \in \Pi_n(\mathbb{C}), \exists ! \pi \in \Pi_n(\mathbb{C}), T(\pi) = N$$

$$\text{En particulier } \exists ! A^{-1} \in \Pi_n(\mathbb{C}), T(A^{-1}) = I_n. \text{ Alors } AA^{-1} = I_n.$$

Ceci suffit pour dire que A est inversible.

* Réciproquement supposons que A est inversible. Soit $\pi \in \text{Ker } T$.

$$T(\pi) = 0_{\Pi_n(\mathbb{C})}. A\pi = 0_{\Pi_n(\mathbb{C})}. \pi = A^{-1}A\pi = A^{-1}0_{\Pi_n(\mathbb{C})} = 0_{\Pi_n(\mathbb{C})}. \pi = 0_{\Pi_n(\mathbb{C})}.$$

Donc $\text{Ker } T = \{0_{\Pi_n(\mathbb{C})}\}$. Alors T est un endomorphisme injectif de $\Pi_n(\mathbb{C})$ qui

est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie. Alors T est bijectif donc T est un

automorphisme de $\Pi_n(\mathbb{C})$.

Finalement T est un automorphisme de $\pi_n(\mathbb{C})$ et seulement si A est inversible.

Q2) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.

Soit π la matrice de $\pi_n(\mathbb{C})$ dont la première colonne est X et dont les autres colonnes sont nulles.

$X \neq 0_{\pi_n(\mathbb{C})}$ donc la première colonne de π n'est pas nulle ainsi $\pi \neq 0$ par la matrice nulle de $\pi_n(\mathbb{C})$. Par ailleurs que $T(\pi) = \lambda \pi$ c'est à dire que $A\pi = \lambda \pi$.

Soit (E_1, E_2, \dots, E_n) la base canonique de $\pi_n(\mathbb{C})$.

Pour tout N dans $\pi_n(\mathbb{C})$, NE_j est la $j^{\text{ème}}$ colonne de N si j est un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Alors $\pi E_1 = X$ donc $A\pi E_1 = AX = \lambda X = \lambda \pi E_1 = (\lambda \pi) E_1 = (\lambda \pi) E_1 = \lambda (\pi E_1)$.

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A\pi E_j = A \cdot 0_{\pi_n(\mathbb{C})} = 0_{\pi_n(\mathbb{C})} = \lambda \cdot 0_{\pi_n(\mathbb{C})} = \lambda (\pi E_j) = (\lambda \pi) E_j = (\lambda \pi) E_j$.

Finalement $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (\lambda \pi) E_j = (\lambda \pi) E_j$. Pour tout j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\lambda \pi$ est égale est à la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\lambda \pi$. donc $A\pi = \lambda \pi$.

Alors $\pi \neq 0_{\pi_n(\mathbb{C})}$ et $T(\pi) = \lambda \pi$. λ est donc une valeur propre de T.

Toute valeur propre de A est une valeur propre de T.

Q3) a) Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket \exists$ suite α_i dans \mathbb{C} tel que $Ax_i = \alpha_i x_i$.

montrons que $(x_i^t x_j)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ est une base de $\pi_n(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de T.

Soit $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. $T(x_i^t x_j) = Ax_i^t x_j = \alpha_i x_i^t x_j$. $T(x_i^t x_j) = \alpha_i x_i^t x_j$.

Pour $x_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ et $x_j = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$. $x_i^t x_j = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} (\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_n) = (\beta_p \ \beta_q)_{(p,q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$.

$x_i \neq 0_{\pi_n(\mathbb{C})}$ et $x_j \neq 0_{\pi_n(\mathbb{C})}$. Alors $\exists \beta_p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists q \in \llbracket 1, n \rrbracket, \beta_p \neq 0$ et $\beta_q \neq 0$.

donc $\beta_p \beta_q \neq 0$. Alors $x_i^t x_j$ a au moins un coefficient différent de 0. donc $x_i^t x_j \neq 0_{\pi_n(\mathbb{C})}$.

Ainsi $x_i^t x_j$ est un vecteur propre de T associé à la valeur propre α_i .

montrons que $(x_i^t x_j)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ est une base de $\Pi_n(\mathbb{C})$. Il suffit de montrer que cette famille est libre car sa cardinal n^2 coïncide avec la dimension de $\Pi_n(\mathbb{C})$.

Soit $(\beta_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ une famille d'éléments de \mathbb{C} telle que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} x_i^t x_j = 0_{\Pi_n(\mathbb{C})}$

soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$0_{\Pi_n(\mathbb{C})} = 0_{\Pi_n(\mathbb{C})} E_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} x_i^t x_j E_k = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n \beta_{i,j} x_j E_k \right)}_{\in \mathbb{C}} x_i.$$

Comme (x_1, x_2, \dots, x_n) est une base de $\Pi_{n,1}(\mathbb{C})$, (x_1, x_2, \dots, x_n) est libre.

$$\text{Ainsi } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} x_j E_k = 0_{\mathbb{C}}.$$

Plus $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} x_j E_k = 0_{\mathbb{C}}$. Fixons i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\text{Posons } \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} x_j = (s_1 \ s_2 \ \dots \ s_n).$$

$$0_{\mathbb{C}} = \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} x_j E_k = s_k \text{ et ceci pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket. \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, s_k = 0.$$

$$\text{Ainsi } \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} x_j = 0_{\Pi_{1,n}(\mathbb{C})}. \text{ En temps que } \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} x_j = 0_{\Pi_{1,n}(\mathbb{C})}.$$

La liberté de (x_1, x_2, \dots, x_n) donne alors $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \beta_{i,j} = 0$.

Ainsi $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \beta_{i,j} = 0$. Ceci achève de montrer que $(x_i^t x_j)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ est une famille libre et même une base de $\Pi_n(\mathbb{C})$.

C'est même une base de $\Pi_n(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de T .

Ainsi T est diagonalisable

$$\text{b) Soit } (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2. \text{ Reprenons } x_i = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \text{ et } x_j = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix}.$$

$$x_i^t x_j = (\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_n) \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} = \sum_{q=1}^n \beta_q \delta_q. \text{ Mais la } q^{\text{ème}} \text{ colonne de } x_i^t x_j \text{ est } \delta_q x_i.$$

$$\text{rg } x_i^t x_j = \dim \text{Vect}(\delta_1 x_i, \delta_2 x_i, \dots, \delta_n x_i) = \dim \text{Vect}(x_i) \stackrel{x_i \neq 0_{\Pi_{1,n}(\mathbb{C})}}{=} 1$$

$$\uparrow x_j \neq 0_{\Pi_{1,n}(\mathbb{C})} \text{ donc } \exists q_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket, \delta_{q_0} \neq 0.$$

$$\text{rg } (x_i^t x_j) = 1.$$

Pour tout $(i,j) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ et de rang 1.

Q4 a) $\forall \pi \in \pi_n(\mathcal{A}), \pi x \in \pi_{n,1}(\mathcal{A}). \forall \pi \in \pi_n(\mathcal{A}), \varphi(\pi) \in \pi_{n,1}(\mathcal{A}).$

soit φ est une application de $\pi_n(\mathcal{A})$ dans $\pi_{n,1}(\mathcal{A})$.

$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall (\pi, \pi') \in (\pi_n(\mathcal{A}))^2, \varphi(\lambda(\pi + \pi')) = (\lambda(\pi + \pi'))x = \lambda\pi x + \lambda\pi' x = \lambda\varphi(\pi) + \lambda\varphi(\pi').$ φ est linéaire.

Ainsi φ est une application linéaire de $\pi_n(\mathcal{A})$ dans $\pi_{n,1}(\mathcal{A})$.

Pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x \neq 0_{\pi_{n,1}(\mathcal{A})}. \exists \lambda \in \overline{1,n}, x_\lambda \neq 0.$

Alors $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda x = x$ donc $\frac{1}{x_\lambda} \lambda x = 1$. Alors $\forall y \in \pi_{n,1}(\mathcal{A}), \frac{1}{x_\lambda} y \lambda x = y$.

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \lambda \in \mathbb{C} \\ \uparrow \\ \lambda \text{ est scalaire} \end{array}$$

soit $\forall y \in \pi_{n,1}(\mathcal{A}), \varphi(\frac{1}{x_\lambda} y \lambda x) = y$. Ainsi tout élément de $\pi_{n,1}(\mathcal{A})$ possède un antécédent par φ dans $\pi_n(\mathcal{A})$. Alors φ est surjective.

φ est une application linéaire surjective de $\pi_n(\mathcal{A})$ dans $\pi_{n,1}(\mathcal{A})$.

b) $\forall (i,j) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n}, \exists \lambda_{i,j} \in \mathbb{C}, \lambda_{i,j} \pi_{i,j} = \pi_{i,j} \lambda_{i,j}$ et $\pi_{i,j} \neq 0_{\pi_n(\mathcal{A})}$.

$\forall (i,j) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n}, \lambda_{i,j} \pi_{i,j} x = \lambda_{i,j} (\pi_{i,j} x)$ ou $\lambda_{i,j} \varphi(\pi_{i,j}) = \lambda_{i,j} \varphi(\pi_{i,j})$.

Rappelons que φ est une application linéaire surjective.

Alors $\pi_{n,1}(\mathcal{A}) = \varphi(\pi_n(\mathcal{A})) = \varphi(\text{Vect}(\{\pi_{i,j} \mid (i,j) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n}\})) = \text{Vect}(\{\varphi(\pi_{i,j}) \mid (i,j) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n}\})$.
 \uparrow
 $\{\pi_{i,j} \mid (i,j) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n}\}$ est une base de $\pi_n(\mathcal{A})$.

$\{\varphi(\pi_{i,j}) \mid (i,j) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n}\}$ est une famille génératrice de $\pi_{n,1}(\mathcal{A})$.

Donc on peut extraire de cette famille une base de $\pi_{n,1}(\mathcal{A})$. Plus précisément il existe une

petite partie K de $\overline{1,n} \times \overline{1,n}$ telle que $\{\varphi(\pi_{i,j}) \mid (i,j) \in K\}$ soit une base de $\pi_{n,1}(\mathcal{A})$.

soit ces conditions 1 $^\circ$ $\{\varphi(\pi_{i,j}) \mid (i,j) \in K\}$ est une base de $\pi_{n,1}(\mathcal{A})$

2 $^\circ$ $\forall (i,j) \in K, \lambda_{i,j} \varphi(\pi_{i,j}) = \lambda_{i,j} \varphi(\pi_{i,j})$

3 $^\circ$ $\forall (i,j) \in K, \varphi(\pi_{i,j}) \neq 0_{\pi_{n,1}(\mathcal{A})}$ (une base ne contient pas le vecteur nul).

Finalement $(\varphi(\pi_{ij}))_{(i,j) \in K}$ est une base de $\pi_{ij}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de A .

Alors A est diagonalisable.

ceci achève de montrer que φ est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

c) notons que A possède au moins une valeur propre.

$(I, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ est une famille de $\pi_n(\mathbb{C})$ de cardinal n^2 . (comme dim $\pi_n(\mathbb{C}) = n^2$, cette famille est liée). Alors $\exists (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n^2}$, $\sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k = O_{\pi_n(\mathbb{C})}$ et $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \neq 0_{\mathbb{C}^{n^2}}$.

Posons $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. P est un polynôme annulateur non nul de A .

Supposons que P est constant. Alors $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0$ et $a_0 \neq 0$ car P est non nul.

Soit $O_{\pi_n(\mathbb{C})} = P(A) = a_0 I_n$. Comme a_0 n'est pas nul : $I_n = O_{\pi_n(\mathbb{C})}$!! Soit P n'est pas constant.

$P \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg P \geq 1$. Ainsi P est scindé. $\exists c \in \mathbb{N}^*$, $\exists r \in \mathbb{N}^*$, $\exists (p_1, p_2, \dots, p_r) \in \mathbb{C}^r$, $P = c \prod_{i=1}^r (X - p_i)$

Alors $O_{\pi_n(\mathbb{C})} = c \prod_{i=1}^r (A - p_i I_n)$ et $c \neq 0$. Soit $\prod_{i=1}^r (A - p_i I_n) = O_{\pi_n(\mathbb{C})}$. La matrice $\prod_{i=1}^r (A - p_i I_n)$

n'est donc pas inversible ! un produit de matrices inversibles est tout une matrice inversible

nécessairement et l'une des matrices $A - p_1 I_n, A - p_2 I_n, \dots, A - p_r I_n$ n'est pas inversible.

$\exists p_0 \in [1, r]$ tel que $A - p_{p_0} I_n$ ne soit pas inversible. $p_{p_0} \in Sp A$.

Ainsi A admet au moins une valeur propre.

Exercice L'endomorphisme $\varphi : M \rightarrow AM - MA$

Q1 (E_1, E_2, \dots, E_n) est la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$.

a) Montrer que la famille $(E_i^t E_j)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ est la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$.

b) (X_1, X_2, \dots, X_n) et (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) sont deux bases de $M_{n,1}(\mathbb{K})$.

Montrer que si i et j sont deux éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket : E_i^t E_j$ est combinaison linéaire de la famille $(X_p^t Y_q)_{(p,q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$.

En déduire proprement et simplement que $(X_p^t Y_q)_{(p,q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ est une base de $M_n(\mathbb{K})$.

Dans la suite A est une matrice **diagonalisable** de $M_n(\mathbb{K})$.

On pose, pour tout M dans $M_n(\mathbb{K})$, $\varphi(M) = AM - MA$.

Q2 Montrer que φ est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{K})$.

Q3 Soit X est un vecteur propre de A associé à la valeur λ et Y un vecteur propre de ${}^t A$ associé à la valeur μ

a) Montrer que $X^t Y$ est une matrice non nulle de $M_n(\mathbb{K})$.

b) Montrer que $X^t Y$ est vecteur propre de φ associé à la valeur propre $\lambda - \mu$.

Q4 a) Montrer que toute valeur propre de A est une valeur propre de ${}^t A$. Comparer $\text{Sp } A$ et $\text{Sp } {}^t A$.

b) Montrer que ${}^t A$ est diagonalisable (on pourra utiliser la semblabilité... et retrouver les résultats de a) !)

Q5 a) Utiliser Q4 b), Q1 b) et Q3 b) pour montrer que φ est diagonalisable.

b) Écrire le $\text{Sp } \varphi$ avec les éléments de $\text{Sp } A$. φ est-il un automorphisme de $M_n(\mathbb{K})$?

Q1 soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Posons $E_i = \begin{pmatrix} x_i \\ 1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $E_j = \begin{pmatrix} y_j \\ 1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k=i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $y_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Notons que $E_i^t E_j \in M_n(\mathbb{K})$ car $E_i \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ et ${}^t E_j \in M_{1,n}(\mathbb{K})$.

Posons $E_i^t E_j = (a_{p,q})_{\substack{1 \leq p, q \leq n \\ 1 \leq p, q \leq n}}$. $\forall (p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{p,q} = x_p y_q$

Ainsi $\forall (p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{si } (p, q) = (i, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

doit $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$.

si $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $E_{i,j}$ est l'élément de $M_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de la i -ième ligne et de la j -ième colonne qui vaut 1.

Ainsi $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, E_i^t E_j = E_{i,j}$.

Donc $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ 1 \leq i, j \leq n}}$ est la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$.

b) Soit $(i, j) \in \overline{1, n} \times \overline{1, n}$.

p. 2

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est une base de $\Pi_n(K)$ et $\varepsilon_i \in \Pi_n(K)$ donc $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$ tel que

$$\varepsilon_i = \sum_{p=1}^n \alpha_p \chi_p. \text{ De même } \exists (\beta_1, \dots, \beta_n) \in K^n \text{ tel que } \varepsilon_j = \sum_{q=1}^n \beta_q \chi_q.$$

$$\text{Ainsi } \varepsilon_i^t \varepsilon_j = \left(\sum_{p=1}^n \alpha_p \chi_p \right)^t \left(\sum_{q=1}^n \beta_q \chi_q \right) = \left(\sum_{p=1}^n \alpha_p \chi_p \right) \left(\sum_{q=1}^n \beta_q \varepsilon_q \right)$$

$$\text{Donc } \varepsilon_i^t \varepsilon_j = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \alpha_p \beta_q \chi_p^t \chi_q.$$

Pour tout $(i, j) \in \overline{1, n} \times \overline{1, n}$, $\varepsilon_i^t \varepsilon_j$ est combinaison linéaire des éléments de la

famille $(\chi_p^t \chi_q)_{\substack{1 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq n}}$.



$$\text{Ainsi } \Pi_n(K) = \text{Vect} \left((\varepsilon_i^t \varepsilon_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \right) \subset \text{Vect} \left((\chi_p^t \chi_q)_{\substack{1 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq n}} \right) \subset \Pi_n(K)$$

Donc $\Pi_n(K) = \text{Vect} \left((\chi_p^t \chi_q)_{\substack{1 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq n}} \right)$. Ainsi la famille $(\chi_p^t \chi_q)_{\substack{1 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq n}}$ est une

base généralisée de cardinal n^2 de $\Pi_n(K)$ qui est un K -espace vectoriel de dimension n^2 .

Ainsi $(\chi_p^t \chi_q)_{\substack{1 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq n}}$ est une base de $\Pi_n(K)$.

Q2. • $\forall \pi \in \Pi_n(K)$, $A\pi - \pi A \in \Pi_n(K)$; est une application de $\Pi_n(K)$ dans $\Pi_n(K)$.

• Soit $(\pi, \nu) \in (\Pi_n(K))^2$. Soit $\lambda \in K$.

$$\varphi(\lambda(\pi + \nu)) = A(\lambda(\pi + \nu)) - (\lambda(\pi + \nu))A = \lambda A\pi + \lambda A\nu - \lambda\pi A - \lambda\nu A = \lambda(A\pi - \pi A) + \lambda(A\nu - \nu A) = \lambda(\varphi(\pi) + \varphi(\nu)).$$

φ est donc linéaire.

φ est un endomorphisme de $\Pi_n(K)$.

Q3. a) Posons $\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ n_1 \end{pmatrix}$ et $\gamma = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ n_2 \end{pmatrix}$. $\alpha \in \Pi_{n_1}(K)$ et $\gamma \in \Pi_{n_2}(K)$.

$$\text{Ainsi } \alpha^t \gamma \in \Pi_n(K). \text{ Précisément } \alpha^t \gamma = (\alpha_i \gamma_j)_{\substack{1 \leq i \leq n_1 \\ 1 \leq j \leq n_2}}$$

α (resp. γ) est un vecteur propre de A (resp. B) donc $\alpha \neq 0 \in \Pi_{n_1}(K)$ (resp. $\gamma \neq 0 \in \Pi_{n_2}(K)$)

Ainsi $\exists i_0 \in \overline{1, n_1}$, $\alpha_{i_0} \neq 0$ et $\exists j_0 \in \overline{1, n_2}$, $\gamma_{j_0} \neq 0$.

Par conséquent $\alpha_{i_0} \gamma_{j_0} \neq 0$ et $\alpha_{i_0} \gamma_{j_0}$ est un coefficient non nul.

$X^t Y$ est une matrice nulle de $M_n(K)$.

b) $AX = \lambda X$ et ${}^t AY = \mu Y$. Alors $AX = \lambda X$ et ${}^t A = {}^t({}^t AY) = \mu {}^t Y$.

Ainsi $\varphi(X^t Y) = AX^t Y - X^t Y A = (\lambda X)^t Y - X^t (\mu Y) = (\lambda - \mu)(X^t Y)$.

$X^t Y \in M_n(K)$, $X^t Y \neq 0_{M_n(K)}$ et $\varphi(X^t Y) = (\lambda - \mu) X^t Y$.

Alors $X^t Y$ est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre $\lambda - \mu$.

Q4 a) Soit λ une valeur propre de A .

$A - \lambda J_n$ n'est pas inversible.

Ainsi ${}^t(A - \lambda J_n) = {}^t(A - \lambda J_n)$ n'est pas inversible.

Alors λ est valeur propre de ${}^t A$.

Toute valeur propre de A est une valeur propre de ${}^t A$.

Donc $Sp A \subset Sp {}^t A$

Par ailleurs $Sp {}^t A \subset Sp ({}^t({}^t A))$ ($A := {}^t A$!!!); donc $Sp {}^t A \subset Sp A$.

Finalement $Sp A = Sp {}^t A$.

b) A est diagonalisable. Existe une matrice inversible P de $M_n(K)$ et une matrice diagonale D de $M_n(K)$ telles que $P^{-1} A P = D$.

Alors ${}^t(P^{-1} A P) = {}^t D$ donc ${}^t P {}^t A {}^t P^{-1} = {}^t D = D$!

Posons $Q = {}^t P^{-1}$. P^{-1} est inversible : $\exists Q$ et inversible

et $Q^{-1} = {}^t(P^{-1})^{-1} = {}^t P$

Alors $Q \in GL_n(K)$ et $D = {}^t P {}^t A {}^t P^{-1} = Q^{-1} {}^t A Q$.

Donc ${}^t A$ est semblable à la matrice diagonale D .

${}^t A$ est diagonalisable.

Remarque ... $Sp {}^t A = Sp D = Sp A$; $Sp {}^t A = Sp A$.

à retrouver le résultat de a)

Noter que cette démonstration utilise le fait que A est diagonalisable mais pas celle de a) ...

Q5 a) A (resp. tA) est diagonalisable dans \mathbb{C} par une base (x_1, \dots, x_n) (resp. (x_1, \dots, x_n)) de $\Pi_n(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de A (resp. tA) associés aux valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (resp. $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$).
 Alors $\exists \gamma = (\gamma_p^t \gamma_q)_{1 \leq p, q \leq n}$ et une base de $\Pi_n(\mathbb{C})$ d'après Q3 b

et pour tout (p, q) dans $\Pi_n(\mathbb{C})$, $\gamma_p^t \gamma_q$ est un vecteur propre de φ associée à la valeur propre $\alpha_p - \beta_q$ d'après Q3 b

Alors $(\gamma_p^t \gamma_q)_{1 \leq p, q \leq n}$ et une base de $\Pi_n(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de φ .

Ainsi φ est diagonalisable.

b) 1) et 2) de a) permettent de dire que :

$$Sp \varphi = \{ \alpha_i - \beta_j ; (i, j) \in \Pi_n(\mathbb{C}) \}.$$

$$\text{A} \quad \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \} = Sp A = Sp {}^tA = \{ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \}.$$

$$\text{Ainsi } \underline{Sp \varphi = \{ \lambda \cdot \mu ; (\lambda, \mu) \in (Sp A)^{\times 2} \}}.$$

$$\text{Alors } \{ \lambda - \lambda ; \lambda \in Sp A \} \subset Sp \varphi \quad !!$$

$$\text{Donc } \{ 0 \} \subset Sp \varphi \quad . \quad 0 \in Sp \varphi$$

0 est valeur propre de φ . φ n'est pas injectif.

φ n'est pas un isomorphisme de $\Pi_n(\mathbb{C})$.

EXERCICE 50 **N2** Diagonalisabilité de l'endomorphisme $v \rightarrow v \circ u - u \circ v$ de $\mathcal{L}(E)$.

Ce sont les deux dernières parties d'un problème qui figure dans les sujets proposés à la fin de cet article.

E est un espace vectoriel de dimension n sur \mathbb{K} ($n \geq 1$). f est un endomorphisme de E .

On note Φ_f l'application qui à tout élément g de $\mathcal{L}(E)$ associe $f \circ g - g \circ f$. Φ_f est clairement un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

Partie IV ► Ici f est diagonalisable. On se propose de montrer que Φ_f est diagonalisable.

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de f .

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

$(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout (i, j) dans $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, $u_{i,j}$ est l'endomorphisme de E de matrice $E_{i,j}$ dans \mathcal{B} .

Q1. Calculer $\Phi_f(u_{i,j})$ pour tout (i, j) dans $\llbracket 1, n \rrbracket^2$. En déduire que Φ_f est diagonalisable et préciser son spectre.

Q2. a) Montrer que $\text{Ker } \Phi_f = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, g(\text{SEP}(f, \lambda_i)) \subset \text{SEP}(f, \lambda_i)\}$.

b) En déduire que $\text{Ker } \Phi_f$ est isomorphe à $\mathcal{L}(\text{SEP}(f, \lambda_1)) \times \mathcal{L}(\text{SEP}(f, \lambda_2)) \times \dots \times \mathcal{L}(\text{SEP}(f, \lambda_p))$.

c) Préciser la dimension de $\text{Ker } \Phi_f$ et le $\text{rg } \Phi_f$. Et si $p = n$?

Partie V

Dans cette partie on suppose que Φ_f est diagonalisable. On se propose de montrer que f est diagonalisable.

Q1. On suppose que f admet au moins une valeur propre λ . $(g_1, g_2, \dots, g_{n^2})$ est une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de vecteurs propres de Φ_f respectivement associés aux valeurs propres $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n^2}$ et x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ .

a) Pour tout i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, calculer $f(g_i(x))$ en fonction de λ, β_i et $g_i(x)$.

b) On pose $\forall g \in \mathcal{L}(E), \varphi(g) = g(x)$. Montrer que φ est une application linéaire surjective de $\mathcal{L}(E)$ dans E .

c) Montrer que f est diagonalisable.

On se propose de montrer que le spectre de f n'est pas vide.

Q2. Ici $K = \mathbb{C}$.

a) Montrer que f possède un polynôme annulateur non nul P .

b) En remarquant que P est scindé montrer qu'au moins une des racines de P est une valeur propre de f . Conclure.

Q3. Ici $K = \mathbb{R}$ et on raisonne par l'absurde. Supposons que f n'a pas de valeur propre. Soit A la matrice de f dans une base de E .

On considère l'endomorphisme ψ_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \psi_A(M) = AM - MA$.

On considère également l'endomorphisme $\widehat{\psi}_A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \widehat{\psi}_A(M) = AM - MA$.

a) Montrer que ψ_A est diagonalisable.

Montrer que $\widehat{\psi}_A$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont réelles.

b) Montrer qu'il existe un complexe non réel γ valeur propre de A . Montrer que $\bar{\gamma}$ est valeur propre de A et de ${}^t A$.

Soit X (resp. Y) un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \gamma X$ (${}^t AY = \bar{\gamma} Y$).

Calculer $\widehat{\psi}_A(X {}^t Y)$ et en déduire une contradiction.

Q4. Conclure.

PARTIE IV Réduction de ϕ_f lorsque f est diagonalisable

(Q1) Soit $(i, j) \in \overline{1, n} \times \overline{1, n}$. $\forall k \in \overline{1, n}$, $u_{i,j}(e_k) = \begin{cases} e_i & \text{si } k=j \\ 0_E & \text{si } k \neq j \end{cases}$.

$$\forall k \in \overline{1, n}, \phi_f(u_{i,j})(e_k) = (f \circ u_{i,j} - u_{i,j} \circ f)(e_k) = f(u_{i,j}(e_k)) - u_{i,j}(f(e_k))$$

$$\forall k \in \overline{1, n}, \phi_f(u_{i,j})(e_k) = f(u_{i,j}(e_k)) - u_{i,j}(d_k e_k) = f(u_{i,j}(e_k)) - d_k u_{i,j}(e_k).$$

$$\forall k \in \overline{1, n} - \{j\}, \phi_f(u_{i,j})(e_k) = f(0_E) - d_k 0_E = 0_E.$$

$$\phi_f(u_{i,j})(e_j) = f(u_{i,j}(e_j)) - d_j u_{i,j}(e_j) = f(e_i) - d_j e_i = d_i e_i - d_j e_i = (d_i - d_j) e_i.$$

$$\phi_f(u_{i,j})(e_j) = (d_i - d_j) e_i = (d_i - d_j) u_{i,j}(e_j).$$

Notons que $\forall k \in \overline{1, n} - \{j\}, \phi_f(u_{i,j})(e_k) = 0_E = (d_i - d_j) u_{i,j}(e_k)$.

Ainsi les endomorphismes $\phi_f(u_{i,j})$ et $(d_i - d_j) u_{i,j}$ coïncident sur la base

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E . Il s'agit donc d'égalité.

Finalement $\forall (i, j) \in \overline{1, n} \times \overline{1, n}, \phi_f(u_{i,j}) = (d_i - d_j) u_{i,j}$.

Soit $(i, j) \in \overline{1, n} \times \overline{1, n}$. $\pi_{\mathcal{B}}(u_{i,j}) = E_{i,j} \neq 0_{n,n}(K)$ d'ac $u_{i,j} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Ainsi $d_i - d_j$ est une valeur propre de ϕ_f et $u_{i,j}$ est un vecteur associé.

Notons que $(u_{i,j})_{(i,j) \in \overline{1, n} \times \overline{1, n}}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$. Comme cette famille

a pour cardinal n^2 qui est la dimension de $\mathcal{L}(E)$ il suffit de montrer qu'elle est libre.

Soit $(\delta_{i,j})_{(i,j) \in \overline{1, n} \times \overline{1, n}}$ une famille d'éléments de K tels que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{i,j} u_{i,j} = 0_{\mathcal{L}(E)}$

$$\text{Alors } 0_{n,n}(K) = \pi_{\mathcal{B}}(0_{\mathcal{L}(E)}) = \pi_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{i,j} u_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{i,j} \pi_{\mathcal{B}}(u_{i,j}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{i,j} E_{i,j}$$

← c'est la base canonique de $\pi_n(K)$

Comme la famille $(E_{i,j})_{(i,j) \in \overline{1,p} \times \overline{1,p}}$ est linéaire : $\forall (i,j) \in \overline{1,p} \times \overline{1,p}, \delta_{i,j} = 0$.

ceci achève de montrer que la famille $(u_{i,j})_{(i,j) \in \overline{1,p} \times \overline{1,p}}$ est linéaire.

d'après ce qui a été dit plus haut $(u_{i,j})_{(i,j) \in \overline{1,p} \times \overline{1,p}}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.

ici on s'est une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de vecteurs propres de ϕ_f .

Alors ϕ_f est diagonalisable.

Rappelons que pour tout $(i,j) \in \overline{1,p} \times \overline{1,p}$, $u_{i,j}$ est un vecteur propre de ϕ_f associé à la valeur propre $\lambda_i - \lambda_j$. Comme $(u_{i,j})_{(i,j) \in \overline{1,p} \times \overline{1,p}}$ est une

base de $\mathcal{L}(E)$: $\text{Sp } \phi_f = \{ \lambda_i - \lambda_j ; (i,j) \in \overline{1,p} \times \overline{1,p} \}$ ou

$\text{Sp } \phi_f = \{ \lambda_i - \lambda_j ; (i,j) \in \overline{1,p} \times \overline{1,p} \}$.

Q2 a) * Soit $f \in \text{Ker } \phi_f$. Soit $i \in \overline{1,p}$. Soit $x \in \text{SEP}(f, \lambda_i)$.

$$\phi_f(g) = 0_{\mathcal{L}(E)}. \text{ Alors } f \circ g = g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

$$0_E = f(g(x)) - g(f(x)) = f(g(x)) - g(\lambda_i x) = f(g(x)) - \lambda_i g(x).$$

$$0_E = (f - \lambda_i \text{Id}_E)(g(x)). \text{ Alors } g(x) \in \text{SEP}(f, \lambda_i).$$

Ainsi $\forall i \in \overline{1,p}, \forall x \in \text{SEP}(f, \lambda_i), g(x) \in \text{SEP}(f, \lambda_i)$. $\forall i \in \overline{1,p}, g(\text{SEP}(f, \lambda_i)) \subset \text{SEP}(f, \lambda_i)$.

* Réciproquement soit g un endomorphisme de E tel que :

$\forall i \in \overline{1,p}, g(\text{SEP}(f, \lambda_i)) \subset \text{SEP}(f, \lambda_i)$. Montrons que $g \in \text{Ker } \phi_f$.

$$\phi_f(g) = f \circ g - g \circ f. \text{ Soit } x \in E. \exists ! (x_1, \dots, x_p) \in \text{SEP}(f, \lambda_1) \times \dots \times \text{SEP}(f, \lambda_p),$$

$$x = \sum_{i=1}^p x_i. \quad \phi_f(g)(x) = \phi_f(g)\left(\sum_{i=1}^p x_i\right) = \sum_{i=1}^p \phi_f(g)(x_i) = \sum_{i=1}^p (f \circ g - g \circ f)(x_i).$$

$$\phi_f(g)(x) = \sum_{i=1}^p (f(g(x_i)) - g(f(x_i))) = \sum_{i=1}^p (\lambda_i g(x_i) - g(\lambda_i x_i)) = \sum_{i=1}^p 0_E = 0_E$$

Alors $\forall c \in E, \phi_f(g)(c) = 0_E$. $\phi_f(g) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $g \in \text{Ker } \phi_f$.

Finalement $\text{Ker } \phi_f = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid \forall i \in \{1, \dots, p\}, g(\text{SEP}(f, \lambda_i)) \subset \text{SEP}(f, \lambda_i)\}$.

Remarque... $\text{Ker } \phi_f$ est l'ensemble des endomorphismes de E qui laissent stables les sous-espaces propres de f .

b) Soit $h \in \text{Ker } \phi_f$. $\text{SEP}(f, \lambda_1), \dots, \text{SEP}(f, \lambda_p)$ sont stables par h .

Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ nous notons h_i l'endomorphisme de $\text{SEP}(f, \lambda_i)$ qui a tout x dans $\text{SEP}(f, \lambda_i)$ associe $h(x)$.

Pour $\forall h \in \text{Ker } \phi_f$, $T(h) = (h_1, h_2, \dots, h_p)$.

T est une application de $\text{Ker } \phi_f$ dans $\mathcal{L}(\text{SEP}(f, \lambda_1)) \times \mathcal{L}(\text{SEP}(f, \lambda_2)) \times \dots \times \mathcal{L}(\text{SEP}(f, \lambda_p))$.
notons que T est un isomorphisme.

* Soit $\lambda \in K$. Soit $(h, \tilde{h}) \in \text{Ker } \phi_f \cap \text{Ker } \phi_f$.

$$T(\lambda h + \tilde{h}) = (\lambda h_1 + \tilde{h}_1, \lambda h_2 + \tilde{h}_2, \dots, \lambda h_p + \tilde{h}_p).$$

$$T(\lambda h + \tilde{h}) = (\lambda h_1 + \tilde{h}_1, \lambda h_2 + \tilde{h}_2, \dots, \lambda h_p + \tilde{h}_p)$$

$$T(\lambda h + \tilde{h}) = \lambda (h_1, h_2, \dots, h_p) + (\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_p) = \lambda T(h) + T(\tilde{h}).$$

T est linéaire.

Soit $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ un élément de $\mathcal{L}(\text{SEP}(f, \lambda_1)) \times \mathcal{L}(\text{SEP}(f, \lambda_2)) \times \dots \times \mathcal{L}(\text{SEP}(f, \lambda_p))$.

notons par un abus de notation que $\exists! h \in \text{Ker } \phi_f$, $T(h) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$.

* Supposons que h soit un élément de $\text{Ker } \phi_f$ tel que $T(h) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$.

Soit $x \in E$. $\exists! (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \text{SEP}(f, \lambda_1) \times \text{SEP}(f, \lambda_2) \times \dots \times \text{SEP}(f, \lambda_p)$, $x = \sum_{i=1}^p x_i$

$$h(x) = \sum_{i=1}^p h(x_i) = \sum_{i=1}^p h_i(x_i) = \sum_{i=1}^p \varphi_i(x_i)$$

$$\text{Soit } h(x) = \sum_{i=1}^p \varphi_i(x_i) \dots \text{ si } x = \sum_{i=1}^p x_i \text{ avec } (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \text{SEP}(f, \lambda_1) \cap \text{SEP}(f, \lambda_2) \times \dots \times \text{SEP}(f, \lambda_p)$$

d'où l'unicité de h.

* Soit h l'application de E dans E qui a tout x élément de E

tel que $x = \sum_{i=1}^p x_i$ avec $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \text{SEP}(f, \lambda_1) \cap \text{SEP}(f, \lambda_2) \times \dots \times \text{SEP}(f, \lambda_p)$

on a $\sum_{i=1}^p \varphi_i(x_i)$. Notons que $h \in \text{Ka } \Phi_f$ et que $\tau(h) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$.

→ Soit $\lambda \in K$. Soit $(x, y) \in E^2$.

$\exists! (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \text{SEP}(f, \lambda_1) \times \text{SEP}(f, \lambda_2) \times \dots \times \text{SEP}(f, \lambda_p)$, $x = \sum_{i=1}^p x_i$

$\exists! (y_1, y_2, \dots, y_p) \in \text{SEP}(f, \lambda_1) \times \text{SEP}(f, \lambda_2) \times \dots \times \text{SEP}(f, \lambda_p)$, $y = \sum_{i=1}^p y_i$

$\lambda x + y = \sum_{i=1}^p (\lambda x_i + y_i)$ et $\forall i \in \overline{1, p}$, $\lambda x_i + y_i \in \text{SEP}(f, \lambda_i)$.

$$\text{Alors } h(\lambda x + y) = \sum_{i=1}^p \varphi_i(\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum_{i=1}^p \varphi_i(x_i) + \sum_{i=1}^p \varphi_i(y_i) = \lambda h(x) + h(y)$$

\uparrow
 $\varphi_i \in \mathcal{X}(\text{SEP}(f, \lambda_i))$ pour tout $i \in \overline{1, p}$.

Par conséquent h est linéaire.

→ Soit $h \in \mathcal{X}(E)$. Soit $x \in \text{SEP}(f, \lambda_i)$. Pour $\forall h \in \overline{1, p}$, $x_k = \begin{cases} x & \text{si } k=i \\ 0 & \text{si } k \neq i \end{cases}$

$x = \sum_{k=1}^p x_k$ avec $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \text{SEP}(f, \lambda_1) \times \text{SEP}(f, \lambda_2) \times \dots \times \text{SEP}(f, \lambda_p)$.

$$\text{Soit } h(x) = \sum_{k=1}^p \varphi_k(x_k) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p \varphi_k(0_E) + \varphi_i(x) = \varphi_i(x) = \varphi_i(x) \in \text{SEP}(f, \lambda_i)$$

Pour $\forall i \in \overline{1, p}$, $\forall x \in \text{SEP}(f, \lambda_i)$, $h(x) \in \text{SEP}(f, \lambda_i)$.

$\forall i \in \overline{1, p}$, $h(\text{SEP}(f, \lambda_i)) \subset \text{SEP}(f, \lambda_i)$.

Soit $h \in \text{Ka } \Phi_f$.

→ Nous avons vu que $\forall i \in \overline{1, p}$, $\forall x \in \text{SEP}(f, \lambda_i) = h(x) = \varphi_i(x)$.

Alors $\forall i \in \overline{1, p}$, $\forall x \in \text{SEP}(f, \lambda_i)$, $h_i(x) = h(x) = \varphi_i(x)$.

$\tau(h) = (h_1, h_2, \dots, h_p) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$.

Ceci achève de montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ admet un côté d'at et un seul dans $K\langle \varphi \rangle$ par T .

Ceci pour tout $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ dans $\mathcal{L}(SEV(f, \lambda_1)) \times \mathcal{L}(SEV(f, \lambda_2)) \times \dots \times \mathcal{L}(SEV(f, \lambda_p))$.

Soit T et une application bilinéaire bijective de $K\langle \varphi \rangle$ dans $\mathcal{L}(SEV(f, \lambda_1)) \times \mathcal{L}(SEV(f, \lambda_2)) \times \dots \times \mathcal{L}(SEV(f, \lambda_p))$.

$K\langle \varphi \rangle$ est isomorphe à $\mathcal{L}(SEV(f, \lambda_1)) \times \mathcal{L}(SEV(f, \lambda_2)) \times \dots \times \mathcal{L}(SEV(f, \lambda_p))$.

c) Pour $\forall i \in \{1, p\}$, $n_i = \dim SEV(f, \lambda_i)$.

$$\forall i \in \{1, p\}, \dim \mathcal{L}(SEV(f, \lambda_i)) = n_i^2.$$

$$\text{Alors } \dim K\langle \varphi \rangle = \dim (\mathcal{L}(SEV(f, \lambda_1)) \times \mathcal{L}(SEV(f, \lambda_2)) \times \dots \times \mathcal{L}(SEV(f, \lambda_p))) = \sum_{i=1}^p n_i^2$$

$$\text{tg } \varphi_f = \dim \mathcal{L}(E) - \dim K\langle \varphi \rangle = n^2 - \sum_{i=1}^p n_i^2$$

$$\dim K\langle \varphi \rangle = \sum_{i=1}^p n_i^2 \text{ et } \dim \text{tg } \varphi_f = n^2 - \sum_{i=1}^p n_i^2 \text{ où } \forall i \in \{1, p\}, n_i = \dim SEV(f, \lambda_i)$$

Si $p = n$: f admet n valeurs propres dans $\bar{\mathbb{C}}$ deux à deux distinctes et $\dim E = n$.

Alors $\forall i \in \{1, n\}$, $\dim SEV(f, \lambda_i) = 1$. $\forall i \in \{1, n\}$, $n_i = 1$.

Soit $\dim K\langle \varphi \rangle = n$ et $\dim \text{tg } \varphi_f = n^2 - n$.

Remarque 1. Nous retrouverons les résultats de II § 7.

2. $K\langle \varphi \rangle$ est le commutant de f . Nous retrouverons à travers $\dim K\langle \varphi \rangle = \sum_{i=1}^p (\dim SEV(f, \lambda_i))^2$

un résultat très classique.

PARTIE V f est diagonalisable lorsque ϕ_f est diagonalisable

(Q1) a) soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. $\phi_f(q_i) = \beta_i q_i$; $f q_i = q_i \circ f = \beta_i q_i$.

$$\text{Alors } \beta_i q_i(x) = f(q_i(x)) - q_i(f(x)) = f(q_i(x)) - q_i(\lambda x) = f(q_i(x)) - \lambda q_i(x).$$

$$\text{Donc } \underline{\underline{f(q_i(x)) = (\lambda + \beta_i) q_i(x)}}.$$

b) • φ est une application de $\mathcal{L}(E)$ dans E par définition.

• Soit $\lambda \in K$. Soit $(g, h) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$.

$$\varphi(\lambda g + h) = (\lambda g + h)(x) = \lambda g(x) + h(x) = \lambda \varphi(g) + \varphi(h).$$

$$\forall \lambda \in K, \forall (g, h) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E), \varphi(\lambda g + h) = \lambda \varphi(g) + \varphi(h). \underline{\underline{\varphi \text{ est linéaire.}}}$$

• Montrons que φ est surjective. Soit $y \in E$. Montrons qu'il existe g dans $\mathcal{L}(E)$

tel que $\varphi(g) = y$ c'est à dire tel que $g(x) = y$.

x est un vecteur propre de f donc λx n'est pas nul. Posons $u_1 = x$.

(u_1) est une famille libre de E car u_1 n'est pas nul.

On peut donc compléter cette famille en une base (u_1, u_2, \dots, u_n) de E . arbitraire!

Soit g l'endomorphisme de E tel que $g(u_1) = y$ et $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, g(u_k) = \underset{\downarrow}{0_E}$.

Alors $g \in \mathcal{L}(E)$ et $g(x) = g(u_1) = y$. Donc $\varphi(g) = y$.

$\forall y \in E, \exists g \in \mathcal{L}(E), \varphi(g) = y$. φ est surjective.

Ainsi φ est une application linéaire surjective de $\mathcal{L}(E)$ dans E .

c) (q_1, q_2, \dots, q_n) est une base de $\mathcal{L}(E)$.

Alors $E = \varphi(\mathcal{L}(E)) = \varphi(\text{Vect}(q_1, q_2, \dots, q_n)) = \text{Vect}(\varphi(q_1), \varphi(q_2), \dots, \varphi(q_n))$.

\uparrow φ est surjective

$(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))$ et donc une famille génératrice de E .

(*) On peut alors extraire de cette famille une base $(g_i(x))_{i \in I}$ de E .

Alors pour tout $i \in I$, $g_i(x) \neq 0_E$.

rien qu' : pour tout $i \in I$, $g_i(x) \neq 0_E$ et $f(g_i(x)) = (\lambda + \beta_i) g_i(x)$.

Ainsi $(g_i(x))_{i \in I}$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f .

donc f est diagonalisable.

(*) Preuve du résultat de cours (?) propos e.

posons $\mathcal{B} = \{ L \in \mathcal{P}(\{1, \dots, n\}) \mid L \neq \emptyset \text{ et } (g_i(x))_{i \in L} \text{ est l.b.} \}$

posons $\tilde{\mathcal{L}} = \{ \text{card } L; L \in \mathcal{L} \}$. $\tilde{\mathcal{L}} \subset \{1, \dots, n\}$.

$\Rightarrow (g_1(x), \dots, g_n(x))$ est une famille génératrice de E .

donc on trouve un des vecteurs de cette famille n'est pas nul.

$\exists i_0 \in \{1, \dots, n\}$, $g_{i_0}(x) \neq 0_E$. $(g_{i_0}(x))$ est l.b.

Alors $i_0 \in \mathcal{B}$. donc $\tilde{\mathcal{L}} \neq \emptyset$. Ainsi $\tilde{\mathcal{L}} \neq \emptyset$.

$\rightarrow \tilde{\mathcal{L}}$ est une partie non vide de $\{1, \dots, n\}$. $\tilde{\mathcal{L}}$ possède un plus grand élément r . Reprenons donc une partie I de $\{1, \dots, n\}$ de cardinal r telle que $(g_i(x))_{i \in I}$ soit une famille l.b. de E .

Notons que cette famille est une base de E . Notons donc

qu'elle est génératrice. Supposons que cette famille n'est pas

génératrice. Alors le sous-espace vectoriel F qu'elle engendre est

strictement inclus dans $E = \text{Vect}(g_1(x), \dots, g_n(x))$.

Noter que $e \notin I$ car $g_e(x) \notin F$.

Pour $I' = I \cup \{e\}$, card $I' = r+1$. Ainsi $I' \notin \mathcal{L}$.

Alors la famille $(g_i(x))_{i \in I'}$ est liée.

Il existe une famille $(\delta_i)_{i \in I'}$ d'éléments de K telle que

$\sum_{i \in I'} \delta_i g_i(x) = 0_E$ et telle qu'au moins un élément de cette famille ne

soit pas nul.

Le $g_e(x) + \sum_{i \in I} \delta_i g_i(x) = 0_E$. Supposons $\delta_e \neq 0$.

Alors $g_e(x) = \sum_{i \in I} \left(-\frac{\delta_i}{\delta_e}\right) g_i(x) \in F$!! Donc $\delta_e = 0$.

Alors $\sum_{i \in I} \delta_i g_i(x) = 0_E$. Comme $(g_i(x))_{i \in I}$ est libre : $\forall i \in I, \delta_i = 0$.

Finalement $\forall i \in I', \delta_i = 0$ ce qui est contradictoire.

Donc $(g_i(x))_{i \in I}$ est une famille génératrice de E . C'est aussi une famille

libre donc c'est une base de E .

(P2) ^{$K = \mathbb{C}$} a) On a $\dim \mathcal{L}(E) = n^2$ donc $(\exists d \in \mathbb{C}, f_1, \dots, f^{n^2})$ est une famille liée de $\mathcal{L}(E)$

car son cardinal est $n^2 + 1$.

$\exists (a_0, a_1, \dots, a_{n^2}) \in \mathbb{C}^{n^2+1} \setminus \{0_{\mathbb{C}^{n^2+1}}\}, \sum_{i=0}^{n^2} a_i f^i = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Pour $P = \sum_{i=0}^{n^2} a_i X^i$, $P \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$ et $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

f possède un polynôme annihilateur non nul P .

b) Supposons que P est constant. $\exists c \in \mathbb{C}^*, P = c$.

... $c \text{ Id} = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et donc $c = 0$!!

Alors P n'est pas constant. Comme $P \in \mathbb{C}[X]$, P est divisible.

$\exists r \in \mathbb{N}^*, \exists c \in \mathbb{C}^*, \exists (t_1, t_2, \dots, t_r) \in \mathbb{C}^r, P = c(x-t_1)\dots(x-t_r)$.

$P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors $c(f-t_1 \text{Id}_E) \circ \dots \circ (f-t_r \text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Ça n'est

pas nul d'ac. $(f-t_1 \text{Id}_E) \circ \dots \circ (f-t_r \text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Supposons que pour tout $i \in \{1, r\}$, $f-t_i \text{Id}_E$ est bijectif.

Alors $(f-t_1 \text{Id}_E) \circ \dots \circ (f-t_r \text{Id}_E)$ est bijectif comme composé de r

endomorphismes bijectifs. Alors $0_{\mathcal{L}(E)}$ est un endomorphisme bijectif de E .

Ceci est impossible car $\dim E \geq 1$.

Donc $\exists i \in \{1, r\}$ tel que $f-t_i \text{Id}_E$ n'est pas bijectif.

Alors $f-t_i \text{Id}_E$ n'est pas injectif car $\dim E < +\infty$.

Alors $t_i \in \text{Sp } f$.

L'une des racines de P est une valeur propre de f .

Le spectre de f n'est pas vide.

(Q3) $K = \mathbb{R}$. Nous cherchons B la base de E telle que $\pi_B(f) = A$.

a) Rappelons que $(g_1, g_2, \dots, g_{n^2})$ est une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de

vecteurs propres de ϕ_f respectivement associés aux valeurs propres

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n^2}$. Pour $\forall i \in \{1, n^2\}$, $\pi_i = \pi_B(g_i)$.

$\forall i \in \{1, n^2\}$, $B_i g_i = \phi_f(g_i) = f \circ g_i = g_i \circ f$.

Alors $\forall i \in \{1, n^2\}$, $B_i \pi_i = A \pi_i = \pi_i A = \psi_n(\pi_i)$.

$\forall i \in \{1, n\}$, $\psi_A(\pi_i) = \beta_i \pi_i$.

Soit $i \in \{1, n\}$, g_i est un vecteur propre de ϕ_f donc $g_i \neq 0_{\mathbb{R}(E)}$.

Alors $\pi_i \neq 0_{\pi_n(\mathbb{R})}$. Donc π_i est un vecteur propre de ψ_A associé à la valeur propre β_i .

$(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ est une famille de $\pi_n(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de ψ_A . Notons que cette famille est une base de $\pi_n(\mathbb{R})$. Comme son cardinal coïncide avec la dimension de $\pi_n(\mathbb{R})$ il suffit de noter que cette famille est libre. Soit $(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathbb{R}^{n^2}$ tel que $\sum_{i=1}^n \delta_i \pi_i = 0_{\pi_n(\mathbb{R})}$.

$$\text{Alors } \pi_B(0_{\mathbb{R}(E)}) = 0_{\pi_n(\mathbb{R})} = \sum_{i=1}^n \delta_i \pi_i = \sum_{i=1}^n \delta_i \pi_B(g_i) = \pi_B\left(\sum_{i=1}^n \delta_i g_i\right)$$

$$\sum_{i=1}^n \delta_i g_i = 0_{\mathbb{R}(E)}. \text{ La liberté de } (g_1, g_2, \dots, g_n) \text{ donne : } \delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n = 0$$

ceci a donc de montrer que $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ est une famille libre

de $\pi_n(\mathbb{R})$ et même une base de $\pi_n(\mathbb{R})$.

$(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ est une base de $\pi_n(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de ψ_A .

Alors ψ_A est diagonalisable.

$\forall i \in \{1, n\}$, $\pi_i \in \pi_n(\mathbb{R})$ et $\psi_A(\pi_i) = \beta_i \pi_i$. Et $\forall i \in \{1, n\}$ $\pi_i \neq 0_{\pi_n(\mathbb{R})}$

Alors $\forall i \in \{1, n\}$, $\pi_i \in \pi_n(\mathbb{C})$, $\hat{\psi}_A(\pi_i) = \psi_A(\pi_i) = \beta_i \pi_i$ et $\pi_i \neq 0_{\pi_n(\mathbb{C})}$

$(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ est donc une famille de $\pi_n(\mathbb{C})$ constituée de

vecteurs propres ^{de $\hat{\psi}_A$} . Notons que $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ est une base de

\mathbb{C} -espace vectoriel $\pi_n(\mathbb{C})$. Le cardinal de cette famille est tout égal à

La dimension de $\pi_n(\mathbb{C})$ il suffit de montrer que la famille est libre.

Soit $(\sigma_1, \dots, \sigma_{n^2}) \in \underline{\mathbb{C}}^{n^2}$ tel que $\sum_{k=1}^{n^2} \sigma_k \pi_k = 0_{\pi_n(\mathbb{C})}$

$$\sum_{k=1}^{n^2} \operatorname{Re}(\sigma_k) \pi_k + i \sum_{k=1}^{n^2} \operatorname{Im}(\sigma_k) \pi_k = 0_{\pi_n(\mathbb{C})}.$$

Or pour tout $k \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket$, π_k est une matrice à coefficients réels.

$$\text{Ainsi } \sum_{k=1}^{n^2} \operatorname{Re}(\sigma_k) \pi_k = \sum_{k=1}^{n^2} \operatorname{Im}(\sigma_k) \pi_k = 0_{\pi_n(\mathbb{R})}.$$

Comme $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n^2})$ est une famille libre du \mathbb{R} -espace vectoriel $\pi_n(\mathbb{R})$

il vient : $\forall k \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket$, $\operatorname{Re}(\sigma_k) = \operatorname{Im}(\sigma_k) = 0$.

Donc $\forall k \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket$, $\sigma_k = 0$.

Ainsi $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n^2})$ est une famille libre de $\pi_n(\mathbb{C})$.

De plus $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n^2})$ est une base de $\pi_n(\mathbb{C})$.

De plus encore $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n^2})$ est une base de $\pi_n(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de $\hat{\Psi}_A$ associés aux valeurs propres $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n^2}$.

Ainsi 1° $\hat{\Psi}_A$ est diagonale

et $\operatorname{Sp} \hat{\Psi}_A = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n^2}\}$ sont les valeurs propres de

$\hat{\Psi}_A$ sont réelles.

b) $A \in \pi_n(\mathbb{R})$ donc $A \in \pi_n(\mathbb{C})$. Soit k l'endomorphisme de $\underline{\mathbb{C}}^n$ de matrice A dans la base canonique de \mathbb{C}^n .

d'après Q2 (!!) $\operatorname{Sp} k \neq \emptyset$. Or $\operatorname{Sp}_e A \neq \emptyset$.

Or $\text{Sp}_{\mathbb{R}} A = \emptyset$ par hypothèse donc $\text{Sp}_{\mathbb{R}} A = \emptyset \dots$ et $\text{Sp}_{\mathbb{C}} A \neq \emptyset$

Alors il existe un complexe non nul δ valeur propre de A .

$$\exists X \in \Pi_{n,1}(\mathbb{C}), \quad AX = \delta X \text{ et } X \neq 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{C})}.$$

$$\text{En conjuguant il vient : } \overline{A} \overline{X} = \overline{AX} = \overline{\delta X} \text{ et } \overline{X} \neq 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{R})}.$$

$$\text{Or } A \in \Pi_n(\mathbb{R}) \text{ donc } \overline{A} = A. \text{ Ainsi } A \overline{X} = \overline{\delta X} \text{ et } \overline{X} \neq 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{C})}$$

donc $\overline{\delta} \in \text{Sp}_{\mathbb{C}} A$. $A - \overline{\delta} I_n$ n'est pas inversible. Donc ${}^t(A - \delta I_n)$ n'est pas inversible. Mais ${}^t(A - \overline{\delta} I_n)$ n'est pas inversible. $\overline{\delta}$ est valeur propre de tA .

$\overline{\delta}$ est valeur propre de A et de tA .

$$\exists X \in \Pi_{n,1}(\mathbb{C}), \quad X \neq 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{C})} \text{ et } AX = \delta X \quad (\delta \in \text{Sp}_{\mathbb{C}} A) -$$

$$\exists Y \in \Pi_{n,1}(\mathbb{C}), \quad Y \neq 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{C})} \text{ et } {}^tAY = \overline{\delta} Y \quad (\overline{\delta} \in \text{Sp}_{\mathbb{C}} {}^tA).$$

Notons que $X^t Y \in \Pi_n(\mathbb{C})$.

$$\widehat{\Psi}_A(X^t Y) = AX^t Y - X^t YA = \delta X^t Y - X^t ({}^tAY) = \delta X^t Y - X^t (\overline{\delta} Y).$$

$$\widehat{\Psi}_A(X^t Y) = \delta X^t Y - \overline{\delta} X^t Y = (\delta - \overline{\delta}) X^t Y. \text{ Or } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\exists p \in \overline{1, n} \mathbb{B}, \quad x_p \neq 0 \text{ car } X \neq 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{C})}.$$

$$\exists q \in \overline{1, n} \mathbb{B}, \quad y_q \neq 0 \text{ car } Y \neq 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{C})}.$$

Alors $x_p y_q \neq 0$. Or $x_p y_q$ est le coefficient de $X^t Y$ situé à l'intersection de la p ième ligne et de la q ième colonne donc $X^t Y \neq 0_{\Pi_n(\mathbb{C})}$.

$$\widehat{\Psi}_A(X^t Y) = (\delta - \overline{\delta}) X^t Y \text{ et } X^t Y \neq 0_{\Pi_n(\mathbb{C})}.$$

\dots

ce $T - \bar{T} = \varepsilon i$ Im T et $\exists \varepsilon \neq 0$ et par un réel nul car $\delta \notin \mathbb{R}$.

Alors $T - \bar{T}$ est une valeur propre de $\hat{\Psi}_A$ qui n'est pas réelle.

ce qui contredit Q3 a).
 □

Q4) En supposant $n_f = \phi$ nous avons obtenu une contradiction.

Alors f possède au moins une valeur propre.

Q3 permet alors de dire que f est diagonalisable.

donc n_f est diagonalisable : f est diagonalisable.

rien ϕ est diagonalisable n'est nul et n'est pas diagonalisable...

d'après Q4.